

# Solutionnaire du chapitre 8

1. On trouve le rayon minimal avec

$$R > \sqrt{\frac{3S}{2\pi G \rho^2}}$$
$$R > \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \times 10^8 \text{ Pa}}{2\pi \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \left(2750 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2}}$$
$$R > 435 \text{ km}$$

2. Pour avoir une planète sphérique en roche, on doit avoir

$$R > \sqrt{\frac{3S}{2\pi G \rho^2}}$$
$$R > \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \times 10^8 \text{ Pa}}{2\pi \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \left(2300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2}}$$
$$R > 520 \text{ km}$$

Est-ce qu'on atteint ce rayon avec  $10^{21} \text{ kg}$ . Si on forme une boule avec cette quantité de roche, on a

$$\rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume}}$$
$$2300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{10^{21} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$
$$R = 470 \text{ km}$$

La planète n'est donc pas sphérique.

3. L'angle par jour est

$$\frac{\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi \text{ rad}}{365,25 \text{ j}} \cdot \frac{\frac{1UA}{r_p}}{\left(1 + \sqrt{\frac{1UA}{r_p}}\right)}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{\Delta t} &= \frac{2\pi rad}{365,25 j} \cdot \frac{\frac{1UA}{55UA}}{\left(1 + \sqrt{\frac{1UA}{55UA}}\right)} \\ &= 0,0002756 \frac{rad}{j} \\ &= 0,01579 \frac{^\circ}{j}\end{aligned}$$

En 14 jours, le changement est

$$\begin{aligned}\theta &= 0,01579 \frac{^\circ}{j} \cdot 14 j \\ &= 0,221^\circ\end{aligned}$$

**4.** L'angle par jour est de  $1/75 \text{ }^\circ/\text{jour} = 0,00023271 \text{ rad/jour}$ . On a donc

$$\begin{aligned}0,00023271 \frac{rad}{j} &= \frac{2\pi rad}{365,25 j} \cdot \frac{\frac{1UA}{r_p}}{\left(1 + \sqrt{\frac{1UA}{r_p}}\right)} \\ 0,013528 &= \frac{\frac{1UA}{r_p}}{\left(1 + \sqrt{\frac{1UA}{r_p}}\right)}\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à isoler la distance. Pour y arriver, on va poser que

$$u = \sqrt{\frac{1UA}{r_p}}$$

On a alors

$$\begin{aligned}0,013528 &= \frac{u^2}{(1+u)} \\ 0,013528 \cdot (1+u) &= u^2 \\ 0 &= u^2 - 0,013528 \cdot u - 0,013528\end{aligned}$$

La solution de cette équation quadratique est  $u = 0,12327$  (Il y a aussi une solution négative, qui n'a pas de sens ici.)

On a donc

$$0,12327 = \sqrt{\frac{1UA}{r_p}}$$

$$r_p = 65,8UA$$

**5.** a) La température moyenne est

$$T = 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L_{\text{étoile}}}{1L_{\odot}}\right) \left(\frac{1UA}{D}\right)^2 (1-A)}$$

Pour avoir une température de 150 K, on doit avoir

$$150K = 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1L_{\odot}}{1L_{\odot}}\right) \cdot \left(\frac{1UA}{D}\right)^2 \cdot (1-0,5)}$$

$$0,53899 = \sqrt[4]{\left(\frac{1UA}{D}\right)^2} \cdot 0,5$$

$$0,08439 = \left(\frac{1UA}{D}\right)^2 \cdot 0,5$$

$$D = 2,43UA$$

b) La température locale maximale est

$$T = 393,6K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L_{\text{étoile}}}{1L_{\odot}}\right) \left(\frac{1UA}{D}\right)^2 (1-A)}$$

Pour avoir une température de 150 K, on doit avoir

$$150K = 393,6K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1L_{\odot}}{1L_{\odot}}\right) \cdot \left(\frac{1UA}{D}\right)^2 \cdot (1-0,5)}$$

$$0,3811 = \sqrt[4]{\left(\frac{1UA}{D}\right)^2} \cdot 0,5$$

$$0,02109 = \left(\frac{1UA}{D}\right)^2 \cdot 0,5$$

$$D = 4,87UA$$

**6.** La perte de masse à chaque passage est

$$\begin{aligned} M &= 25\,000 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot (365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{s}) \\ &= 7,89 \times 10^{11} \text{ kg} \end{aligned}$$

Le nombre de passages est donc

$$N = \frac{M_{\text{tot}}}{M} = \frac{10^{14} \text{ kg}}{7,89 \times 10^{11} \text{ kg}} = 127$$

**7.** Pour déterminer le type d'orbite, nous allons calculer l'énergie mécanique. Le signe de l'énergie nous dira le type d'orbite. Cette énergie est

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GMm}{r}$$

On n'a pas la masse de la comète, mais ce n'est pas grave, car on veut uniquement savoir le signe de l'énergie. On a donc

$$\begin{aligned} E_{\text{mec}} &= m \left( \frac{1}{2}v^2 + \frac{-GM}{r} \right) \\ &= m \left( \frac{1}{2} \cdot (45\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + \frac{-6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} \text{ kg}}{0,652 \cdot 1,496 \times 10^{11} \text{ m}} \right) \\ &= m \left( 1,0125 \times 10^9 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + -1,3606 \times 10^9 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) \\ &= m \left( -3,48 \times 10^8 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) \end{aligned}$$

Comme l'énergie est négative, l'orbite est elliptique.

**8.** a) La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2GM_{\text{soleil}}}{r_p}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} \text{ kg}}{5 \times 10^{10} \text{ m}}} \\ &= 72,86 \frac{\text{km}}{\text{s}} \end{aligned}$$

- b) Comme on sait que l'énergie mécanique est nulle sur une trajectoire parabolique, on peut trouver la vitesse avec la conservation de l'énergie

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r}$$

$$0 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{-GM_c}{r}$$

$$0 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{-6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg}{2 \times 10^{11} m}$$

$$v = 36,43 \frac{km}{s}$$

9. a) On peut trouver la vitesse avec la formule de l'excentricité.

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

$$1,2 = \frac{v_p^2 \cdot (5 \times 10^{10} m)}{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg} - 1$$

$$v_p = 76,42 \frac{km}{s}$$

- b) On pourra trouver sa vitesse avec la conservation de l'énergie. Sur cette trajectoire, l'énergie est

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

On a donc

$$-\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r}$$

$$-\frac{GM_c (1-e)}{2r_p} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{-GM_c}{r}$$

$$\frac{-6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg \cdot (1-1,2)}{2 \cdot 5 \times 10^{10} m} = \frac{1}{2} \cdot v^2 + \frac{-6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg}{2 \times 10^{11} m}$$

$$2,6542 \times 10^6 \frac{J}{kg} = \frac{1}{2} \cdot v^2 + -6,6356 \times 10^6 \frac{J}{kg}$$

$$v = 43,10 \frac{km}{s}$$

**10.** On trouve  $\theta_{\max}$  avec

$$\begin{aligned}\delta &= 2\theta_{\max} - 180^\circ \\ 10^\circ &= 2\theta_{\max} - 180^\circ \\ \theta_{\max} &= 95^\circ\end{aligned}$$

De là, on peut trouver l'excentricité avec

$$\begin{aligned}\cos \theta_{\max} &= -\frac{1}{e} \\ \cos 95^\circ &= -\frac{1}{e} \\ e &= 11,47\end{aligned}$$

**11.** a)

Pour trouver cette vitesse, on va utiliser l'équation de la conservation de l'énergie mécanique et l'équation de la conservation du moment cinétique.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_\infty^2 &= \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GM_\odot m}{r_p} \\ v_\infty b &= v_p r_p\end{aligned}$$

En isolant  $r_p$  dans la 2<sup>e</sup> équation et en remplaçant dans la 1<sup>re</sup> équation, on a

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GM_\odot mv_p}{v_\infty b}$$

Il ne reste qu'à isoler  $v_p$ .

$$v_\infty^2 = v_p^2 - \frac{2GM_\odot v_p}{v_\infty b}$$

On obtient alors une équation quadratique. Avec les valeurs, on obtient

$$\begin{aligned}(50\,000 \frac{m}{s})^2 &= v_p^2 - \frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg}{50\,000 \frac{m}{s} \cdot 1,5 \times 10^{11} m} \cdot v_p \\ 2,5 \times 10^9 \frac{m^2}{s^2} &= v_p^2 - 35389,997 \frac{m}{s} \cdot v_p\end{aligned}$$

La solution de cette équation est

$$v_p = 70733,78615 \frac{m}{s}$$

(L'autre solution est négative et ne signifie rien ici.) La vitesse au point le plus près est donc de 70,734 km/s.

b) On peut trouver l'excentricité avec

$$v_p = v_\infty \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}$$

On a alors

$$707334 \frac{m}{s} = 50\,000 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}$$

$$1,41467 = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}$$

$$2,0013 = \frac{e+1}{e-1}$$

$$2,0013 \cdot (e-1) = e+1$$

$$2,0013 \cdot e - 2,0013 = e+1$$

$$2,0013 \cdot e - e = 2,0013 + 1$$

$$e = \frac{2,0013+1}{2,0013-1}$$

$$= 2,997$$

c) L'angle est donné par

$$\delta = 2\theta_{\max} - 180^\circ$$

Il nous faut donc  $\theta_{\max}$ . La valeur de cet angle est

$$\cos \theta_{\max} = -\frac{1}{e}$$

$$\cos \theta_{\max} = -\frac{1}{2,977}$$

$$\theta_{\max} = 109,49^\circ$$

L'angle de déviation est donc

$$\begin{aligned}\delta &= 2\theta_{\max} - 180^\circ \\ &= 2 \cdot 171,48^\circ - 180^\circ \\ &= 38,98^\circ\end{aligned}$$

**12.** a) La formule de la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GM_\odot m}{r_p}$$

nous donne

$$\begin{aligned}v_\infty^2 &= v_p^2 - \frac{2GM_\odot}{r_p} \\ &= \left(100000 \frac{m}{s}\right)^2 - \frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg}{0,5 \cdot 1,496 \times 10^{11} m} \\ &= 6,457 \times 10^9 \frac{m^2}{s^2} \\ v_\infty &= 80\,360 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

b) On trouve la valeur de  $b$  avec

$$v_\infty b = v_p r_p$$

On a donc

$$\begin{aligned}80360 \frac{m}{s} \cdot b &= 100000 \frac{m}{s} \cdot 0,5UA \\ b &= 0,6222UA\end{aligned}$$

**13.** a)

Pour connaître la forme de l'orbite, on va calculer le signe de l'énergie mécanique de la comète. Cette énergie est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_c m}{r}$$

On n'a pas la masse de la comète, mais de toute façon, on cherche uniquement le signe de l'énergie. On a donc



$$\begin{aligned}
 E_{mec} &= m \left( \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM_T}{r} \right) \\
 &= m \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \left( 100 \frac{m}{s} \right)^2 - \frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,972 \times 10^{24} kg}{10^{11} m} \right) \\
 &= m \cdot \left( 1014,2872 \frac{m^2}{s^2} \right)
 \end{aligned}$$

Comme la valeur est positive, l'orbite est hyperbolique.

b) On sait que

$$E_{mec} = m \cdot \left( 1014,2872 \frac{m^2}{s^2} \right)$$

Au point le plus près de la Terre, on aura donc

$$\begin{aligned}
 m \cdot \left( 1014,2872 \frac{m^2}{s^2} \right) &= \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GM_T m}{r_p} \\
 1014,2872 \frac{m^2}{s^2} &= \frac{1}{2} v_p^2 - \frac{GM_T}{r_p}
 \end{aligned}$$

Il nous faut une deuxième équation pour résoudre. Cette deuxième équation est la conservation du moment cinétique.

$$\begin{aligned}
 v r \sin \psi &= v_p r_p \\
 100 \frac{m}{s} \cdot 10^{11} m \cdot \sin 0,5^\circ &= v_p r_p \\
 8,7265 \times 10^{10} \frac{m^2}{s} &= v_p r_p \\
 v_p &= \frac{8,7265 \times 10^{10} \frac{m^2}{s}}{r_p}
 \end{aligned}$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation de l'énergie, on arrive à

$$1014,2872 \frac{m^2}{s^2} = \frac{1}{2} v_p^2 - \frac{GM_T}{r_p}$$

$$1014,2872 \frac{m^2}{s^2} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{8,7265 \times 10^{10} \frac{m^2}{s}}{r_p} \right)^2 - \frac{GM_T}{r_p}$$

$$1014,2872 \frac{m^2}{s^2} = \frac{3,8076211 \times 10^{21} \frac{m^4}{s^2}}{r_p^2} - \frac{3,9857128 \times 10^{14} \frac{m^3}{s^2}}{r_p}$$

$$1014,2872 \frac{m^2}{s^2} \cdot r_p^2 = 3,8076211 \times 10^{21} \frac{m^4}{s^2} - 3,9857128 \times 10^{14} \frac{m^3}{s^2} \cdot r_p$$

$$1014,2872 \cdot r_p^2 + 3,9857128 \times 10^{14} m \cdot r_p - 3,8076211 \times 10^{21} m^2 = 0$$

La solution de cette équation quadratique est

$$r_p = \frac{-3,9857128 \times 10^{14} m \pm \sqrt{(3,9857128 \times 10^{14} m)^2 + 4 \cdot 1014,2872 \cdot 3,8076211 \times 10^{21} m^2}}{2 \cdot 1014,2872}$$

$$= \frac{-3,9857128 \times 10^{14} m \pm 3,985906589 \times 10^{14} m}{2 \cdot 1014,2872}$$

$$= \frac{1,938 \times 10^{10} m}{2 \cdot 1014,2872} \text{ (On garde uniquement la réponse positive)}$$

$$= 9553 \text{ km}$$

Comme cette valeur est plus grande que le rayon de la Terre, la comète ne frappe pas la Terre. Elle passe cependant très près (à 3182 km de la surface).

c) On peut trouver l'excentricité avec la formule de l'énergie

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

$$1014,2872 \frac{m^2}{s^2} \cdot m = -\frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,972 \times 10^{24} kg \cdot m \cdot (1-e)}{2 \cdot 9,553 \times 10^6 m}$$

$$(1-e) = -4,86 \times 10^{-5}$$

$$e = 1,0000486$$

**14.** Le rayon de Hill est

$$r_H = \sqrt[3]{\frac{M_c}{2M_{pert}}} r$$

Comme l'objet perturbateur a une masse deux fois plus grande que celle de la masse centrale et que la distance de l'objet perturbateur est de 4,2 al, on a

$$\begin{aligned}r_H &= \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot 4,2al \\ &= 2,646al\end{aligned}$$

En mètres, cette distance est

$$2,646al \cdot 9,46 \times 10^{15} \frac{m}{al} = 2,503 \times 10^{16} m$$

En unité astronomique, on arrive à

$$\frac{2,503 \times 10^{16} m}{1,496 \times 10^{11} \frac{m}{UA}} = 167,310UA$$