

Solutionnaire du chapitre 8

1. On trouve le rayon minimal avec

$$R > \sqrt{\frac{3S}{2\pi G \rho^2}}$$
$$R > \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \times 10^8 \text{ Pa}}{2\pi \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \left(2750 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2}}$$
$$R > 435 \text{ km}$$

2. Pour avoir une planète sphérique en roche, on doit avoir

$$R > \sqrt{\frac{3S}{2\pi G \rho^2}}$$
$$R > \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \times 10^8 \text{ Pa}}{2\pi \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \left(2300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2}}$$
$$R > 520 \text{ km}$$

Est-ce qu'on atteint ce rayon avec 10^{21} kg. Si on forme une boule avec cette quantité de roche, on a

$$\rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume}}$$
$$2300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{10^{21} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$
$$R = 470 \text{ km}$$

La planète n'est donc pas sphérique.

3. On trouve le rayon maximal avec

$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt[3]{\frac{M_c}{2M_{pert}}} r \\
 &= \sqrt[3]{\frac{3,302 \times 10^{23} \text{ kg}}{2 \cdot 1,9885 \times 10^{30} \text{ kg}}} \cdot 4,6 \times 10^{10} \text{ m} \\
 &= 2 \times 10^6 \text{ m} \\
 &= 200\,000 \text{ km}
 \end{aligned}$$

4. a) La densité est de

$$\rho = \frac{M}{\text{volume}}$$

La masse est formée de deux parties : le noyau et le manteau. La masse du noyau est égal à sa densité multipliée par son volume. Disons que le volume du noyau est de V' . On a donc

$$M_1 = \rho_1 V'$$

La masse du manteau est aussi égale à la masse multipliée par le volume. Dans ce cas, le volume est celui d'une sphère de volume V dans laquelle il y a une cavité de rayon V' . La masse est donc

$$M_2 = \rho_2 (V - V')$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{M_1 + M_2}{V} \\
 &= \frac{\rho_1 V' + \rho_2 (V - V')}{\frac{4}{3} \pi R^3} \\
 &= \frac{\rho_1 V' + \rho_2 (V - V')}{V} \\
 &= \rho_1 \left(\frac{V'}{V} \right) + \rho_2 \left(1 - \left(\frac{V'}{V} \right) \right) \\
 &= \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \left(\frac{V'}{V} \right)
 \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs pour la Terre, on a

$$\rho = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \left(\frac{V'}{V} \right)$$

$$4400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 3000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + \left(12000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 3000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left(\frac{V'}{V} \right)$$

$$1400 = 9000 \cdot \left(\frac{V'}{V} \right)$$

$$\frac{V'}{V} = 0,156$$

(Ce n'est pas très loin de la véritable valeur de 0,17)

b) En utilisant les valeurs pour Mercure, on a

$$\rho = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \left(\frac{V'}{V} \right)$$

$$5300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 3000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + \left(12000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 3000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left(\frac{V'}{V} \right)$$

$$2300 = 9000 \left(\frac{V'}{V} \right)$$

$$\frac{V'}{V} = 0,256$$

(C'est quand même assez loin de la véritable valeur de 0,42 ☹.)

5. a) La température est

$$T = \sqrt[4]{\frac{L_{\text{étoile}} (1 - A)}{16\pi\sigma D^2}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{3,828 \times 10^{26} \text{ W} \cdot (1 - 0,90)}{16\pi \cdot 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot (1,082 \times 10^{11} \text{ m})^2}}$$

$$= 184 \text{ K}$$

$$= -89^\circ \text{C}$$

b) Puisque la température est de 462 °C et qu'elle devrait être de -89,1 °C, l'effet de serre fait augmenter la température de 551 °C

6. Le champ gravitationnel sur Mars est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_{\sigma}}{R_{\sigma}^2} \\ &= \frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 6,4185 \times 10^{23} kg}{(3,386 \times 10^6 m)^2} \\ &= 3,736 \frac{N}{kg} \end{aligned}$$

a) On trouve la durée de chute avec

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \\ 7000m &= \frac{1}{2} \cdot 3,736 \frac{N}{kg} \cdot t^2 \\ t &= 61,21s \end{aligned}$$

b) On peut trouver la vitesse avec

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} + at \\ &= 3,736 \frac{N}{kg} \cdot 61,21s \\ &= 228,7 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

7. Au plus près, la distance entre Mars et la Terre est de 0,52 UA. Ainsi, l'angle entre la Terre et la Lune à cette distance est

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{3,844 \times 10^8 m}{0,52 \cdot 1,496 \times 10^{11} m} \\ &= 0,00494 rad \\ &= 0,283^\circ \\ &= 17,0' \end{aligned}$$

On peut donc voir la Terre et la Lune séparément.

8. a) La variation d'énergie thermique est

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= E_f - E_i \\
 &= MCT_f - MCT_i \\
 &= MC(T_f - T_i) \\
 &= MC\Delta T
 \end{aligned}$$

On doit donc trouver la masse de cette planète. Puisque le rayon est de 10 000 km et que la densité est de 7800 kg/m³, la masse est

$$\begin{aligned}
 M &= \rho \cdot \text{volume} \\
 &= \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \\
 &= 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (10^7 \text{ m})^3 \\
 &= 3,267 \times 10^{25} \text{ kg}
 \end{aligned}$$

La variation d'énergie thermique est donc

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= MC\Delta T \\
 &= 3,267 \times 10^{28} \text{ g} \cdot 0,444 \frac{\text{J}}{\text{g}^\circ\text{C}} \cdot (-200^\circ\text{C}) \\
 &= -2,9 \times 10^{30} \text{ J}
 \end{aligned}$$

Il y aura donc $2,9 \times 10^{30}$ J d'émission.

b) Le changement de rayon est

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta R}{R} &= \alpha \Delta T \\
 \frac{\Delta R}{10^7 \text{ m}} &= 1,17 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \cdot (-200^\circ\text{C}) \\
 \Delta R &= -23\,400 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Le rayon diminue donc de 23 400 m.

c) La variation d'énergie gravitationnelle est

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= E_f - E_i \\
 &= -\frac{3 GM^2}{5 R_f} - \left(-\frac{3 GM^2}{5 R_i}\right) \\
 &= -\frac{3GM^2}{5} \left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i}\right) \\
 &= -\frac{3 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot (3,267 \times 10^{25} \text{ kg})^2}{5} \cdot \left(\frac{1}{9976600 \text{ m}} - \frac{1}{10^7 \text{ m}}\right) \\
 &= -1 \times 10^{31} \text{ J}
 \end{aligned}$$

L'énergie émise par contraction gravitationnelle est donc de 10^{31} J.

d) La proportion est

$$\begin{aligned}
 \frac{E_g}{E_g + E_i} &= \frac{10^{31} \text{ J}}{10^{31} \text{ J} + 2,9 \times 10^{30} \text{ J}} \\
 &= 77,6\%
 \end{aligned}$$

9. La vitesse de libération est

$$\begin{aligned}
 v_{lib} &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} \\
 &= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,48 \times 10^{23} \text{ kg}}{2,634 \times 10^6 \text{ m}}} \\
 &= 2739 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

La vitesse des molécules est

$$\begin{aligned}
 v_{azote} &= \sqrt{\frac{2 \cdot 1,38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 110 \text{ K}}{28 \cdot 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}}} \\
 &= 256 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{v_{lib}}{v_{molécules}} = \frac{2739 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{256 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 10,7$$

Ganymède pourrait donc garder une atmosphère d'azote.

10. La force de marée faite par la Lune sur la Terre est

$$F_{\text{J}} = \frac{2GM_{\text{J}}mR_{\oplus}}{r_{\oplus\text{J}}^3}$$

Alors que la force de marée faite par Jupiter sur Io est

$$F_{\text{J}} = \frac{2GM_{\text{J}}mR_{\text{Io}}}{r_{\text{J-Io}}^3}$$

Le rapport est donc

$$\begin{aligned} \frac{F_{\text{J}}}{F_{\text{J}}} &= \frac{\left(\frac{2GM_{\text{J}}mR_{\text{Io}}}{r_{\text{J-Io}}^3}\right)}{\left(\frac{2GM_{\text{J}}mR_{\oplus}}{r_{\oplus\text{J}}^3}\right)} \\ &= \frac{r_{\oplus\text{J}}^3 M_{\text{J}} R_{\text{Io}}}{r_{\text{J-Io}}^3 M_{\text{J}} R_{\oplus}} \\ &= \frac{(3,844 \times 10^8 \text{ m})^3 \cdot 1,8986 \times 10^{27} \text{ kg} \cdot 1,822 \times 10^6 \text{ m}}{(4,217 \times 10^8 \text{ m})^3 \cdot 7,44 \times 10^{22} \text{ kg} \cdot 6,378 \times 10^6 \text{ m}} \\ &= 5\,522 \end{aligned}$$

11. Pour la partie la plus près de l'anneau, la période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_{\text{h}}}} \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(6,69 \times 10^7 \text{ m})^3}{6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,6846 \times 10^{26} \text{ kg}}} \\ &= 17\,651 \text{ s} \\ &= 4,90 \text{ h} \end{aligned}$$

Pour la partie la plus éloignée de l'anneau, la période est

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_h}} \\
 &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(1,2 \times 10^8 \text{ m})^3}{6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,6846 \times 10^{26} \text{ kg}}} \\
 &= 42\,404 \text{ s} \\
 &= 11,78 \text{ h}
 \end{aligned}$$

Comme la partie la plus près tourne plus rapidement autour de Saturne que la planète sur elle-même, on verrait les particules de celle partie de l'anneau se lever à l'ouest et se coucher à l'est. Comme la partie la plus éloignée tourne moins rapidement autour de Saturne que la planète sur elle-même, on verrait les particules de celle partie de l'anneau se lever à l'est et se coucher à l'ouest.

12. a) L'intensité est

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{L}{4\pi D^2} \\
 &= \frac{3,828 \times 10^{26} \text{ W}}{4\pi (18,28 \cdot 1,496 \times 10^{11} \text{ m})^2} \\
 &= 4,073 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}
 \end{aligned}$$

b) L'énergie captée est de

$$\begin{aligned}
 E &= I \cdot A_{\text{capteur}} \\
 &= I\pi R^2 \\
 &= 3,696 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \pi \cdot (2,5362 \times 10^7 \text{ m})^2 \\
 &= 8,231 \times 10^{15} \text{ W}
 \end{aligned}$$

c) La puissance émise vers la Terre est

$$\begin{aligned}
 L &= 0,51 \cdot 8,231 \times 10^{15} \text{ W} \\
 &= 4,198 \times 10^{15} \text{ W}
 \end{aligned}$$

d) L'intensité reçue sur Terre est

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{L}{2\pi D^2} \\
 &= \frac{4,198 \times 10^{15} \text{ W}}{2\pi (17,26 \cdot 1,496 \times 10^{11} \text{ m})^2} \\
 &= 1,002 \times 10^{-10} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}
 \end{aligned}$$

(C'est 2π au lieu de 4π au diviseur, car seulement la moitié de la planète émet de la lumière et cette lumière va se répartir sur une demi-sphère. Ce n'est pas tout-à-fait vrai, mais on va dire que c'est une approximation.)

e) On trouve la magnitude bolométrique avec

$$\begin{aligned}
 I &= 2,52 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-0,4m_{bol}} \\
 1,002 \times 10^{-10} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} &= 2,52 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-0,4m_{bol}} \\
 0,00325 &= 10^{-0,4m_{bol}} \\
 m_{bol} &= 6,0
 \end{aligned}$$

La véritable valeur est de 5,32, ce qui veut dire que notre intensité calculée est presque exactement 2 fois trop petite.

Voici mon hypothèse ; 5,32 est la magnitude visuelle alors que 6 est la magnitude bolométrique. Si on suppose que l'énergie totale est uniquement dans le visible et qu'Uranus a absorbé toutes les autres longueurs d'onde, alors notre valeur de l'intensité serait l'intensité visuelle. La magnitude visuelle serait alors de

$$\begin{aligned}
 I_V &= 0,306 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-0,4m} \\
 1,002 \times 10^{-10} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} &= 0,306 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-0,4m} \\
 m &= 3,71
 \end{aligned}$$

Si on suppose que seulement une partie de la lumière réfléchiée est dans la partie visible du spectre, on peut arriver à 5,32.

Si quelqu'un a une autre idée pour expliquer la différence de magnitude, dites-la-moi!

13. a) La température est

$$\begin{aligned}
 T &= 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L_{\text{étoile}}}{1L_{\odot}}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2(1-A)} \\
 &= 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1L_{\odot}}{1L_{\odot}}\right)\cdot\left(\frac{1UA}{30,07UA}\right)^2\cdot(1-0,29)} \\
 &= 278,3K \cdot \sqrt[4]{1\cdot\left(\frac{1}{30,07}\right)^2\cdot(1-0,29)} \\
 &= 46,6K
 \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
 P_{\text{recue}} &= P_{\text{émise}} \\
 1,5 \cdot \frac{L_{\text{étoile}} R_{\text{planète}}^2 (1-A)}{4D^2} &= \sigma 4\pi R_{\text{planète}}^2 T^4 \\
 1,5 \cdot \frac{L_{\text{étoile}} (1-A)}{4D^2} &= \sigma 4\pi T^4 \\
 T &= \sqrt[4]{\frac{1,5 \cdot L_{\text{étoile}} (1-A)}{16\pi\sigma D^2}}
 \end{aligned}$$

Avec les valeurs, on obtient

$$\begin{aligned}
 T &= \sqrt[4]{\frac{1,5 \cdot L_{\text{étoile}} (1-A)}{16\pi\sigma D^2}} \\
 &= \sqrt[4]{\frac{1,5 \cdot 3,828 \times 10^{26} \text{ W} \cdot (1-0,29)}{16\pi \cdot 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot (30,07 \cdot 1,496 \times 10^{11} \text{ m})^2}} \\
 &= 51,6K
 \end{aligned}$$