Solutionnaire du chapitre 7

1. La période est

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{int}} &= \frac{1}{T_{ext}} + \frac{1}{S} \\ \frac{1}{365,25\,j} &= \frac{1}{T_{ext}} + \frac{1}{398,88\,j} \\ T_{ext} &= 4332,1\,j \\ &= 11,86 ans \end{aligned}$$

2. La période est

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{int}} &= \frac{1}{T_{ext}} + \frac{1}{S} \\ \frac{1}{T_{int}} &= \frac{1}{365,25\,j} + \frac{1}{115,88\,j} \\ T_{int} &= 87,97\,j \end{aligned}$$

3. Dans ce cas, Mars est la planète interne et Jupiter est la planète externe. Le temps entre les conjonctions est la période synodique. Cette période est

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{int}} &= \frac{1}{T_{ext}} + \frac{1}{S} \\ \frac{1}{686,96\,j} &= \frac{1}{4335,35\,j} + \frac{1}{S} \\ S &= 816,31\,j \end{aligned}$$

4. Le rayon est

$$\begin{aligned} r &= 1UA \cdot \sin\theta \\ &= 1UA \cdot \sin 22,8° \\ &= 0,3875UA \end{aligned}$$

5. On trouve le rayon avec

$$\cos\left(\frac{t_{oq}}{S}\cdot 360°\right)=\frac{1UA}{r}$$
$$\cos\left(\frac{87,44\,j}{398,88\,j}\cdot 360°\right)=\frac{1UA}{r}$$
$$r=5,202UA$$

6. On trouve le rayon maximal avec

$$\begin{aligned}d&=\sqrt[3]{\frac{M_c}{2M_{pert}}}\,r\\&=\sqrt[3]{\frac{3,302\times 10^{23}kg}{2\cdot 1,9885\times 10^{30}kg}}\cdot 4,6\times 10^{10}m\\&=2\times 10^{6}m\\&=200\,000\,km\end{aligned}$$

7. a) La densité est de

$$\rho=\frac{M}{volume}$$

La masse est formée de deux parties : le noyau et le manteau. La masse du noyau est égal à sa densité multipliée par son volume. Disons que le volume du noyau est de V'. On a donc

$$M_1=\rho_1 V'$$

La masse du manteau est aussi égale à la masse multipliée par le volume. Dans ce cas, le volume est celui d'une sphère de volume V dans laquelle il y a une cavité de rayon V'. La masse est donc

$$M_2=\rho_2\left(V-V'\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{M_1 + M_2}{V} \\ &= \frac{\rho_1 V' + \rho_2 \left(V - V'\right)}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\ &= \frac{\rho_1 V' + \rho_2 \left(V - V'\right)}{V} \\ &= \rho_1 \left(\frac{V'}{V}\right) + \rho_2 \left(1 - \left(\frac{V'}{V}\right)\right) \\ &= \rho_2 + \left(\rho_1 - \rho_2\right)\left(\frac{V'}{V}\right)\end{aligned}$$

En utilisant les valeurs pour la Terre, on a

$$\rho = \rho_2 + \left(\rho_1 - \rho_2\right)\left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$4400 \tfrac{kg}{m^3} = 3000 \tfrac{kg}{m^3} + \left(12000 \tfrac{kg}{m^3} - 3000 \tfrac{kg}{m^3}\right) \cdot \left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$1400 = 9000 \cdot \left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$\frac{V'}{V} = 0{,}156$$

(Ce n'est pas très loin de la véritable valeur de 0,17)

b) En utilisant les valeurs pour Mercure, on a

$$\rho = \rho_2 + \left(\rho_1 - \rho_2\right)\left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$5300 \tfrac{kg}{m^3} = 3000 \tfrac{kg}{m^3} + \left(12000 \tfrac{kg}{m^3} - 3000 \tfrac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$2300 = 9000\left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$\frac{V'}{V} = 0{,}256$$

(C'est quand même assez loin de la véritable valeur de 0,42 ☹.)

8. a) La température est

$$T=\sqrt[4]{\frac{L_{étoile}(1-A)}{16\pi\sigma D^2}}$$
$$=\sqrt[4]{\frac{3,828\times10^{26}W\cdot(1-0,90)}{16\pi\cdot5,67\times10^{-8}\frac{W}{m^2K^4}\cdot\left(1,082\times10^{11}m\right)^2}}$$
$$=184K$$
$$=-89°C$$

b) Puisque la température est de 462 °C et qu'elle devrait être de -89,1 °C, l'effet de serre fait augmenter la température de 551 °C

9. Le champ gravitationnel sur Mars est

$$g=\frac{GM_{♂}}{R_{♂}^2}$$
$$=\frac{6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot6,4185\times10^{23}kg}{\left(3,386\times10^6m\right)^2}$$
$$=3,736\tfrac{N}{kg}$$

a) On trouve la durée de chute avec

$$y=y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}at^2$$
$$7000m=\frac{1}{2}\cdot3,736\tfrac{N}{kg}\cdot t^2$$
$$t=61,21s$$

b) On peut trouver la vitesse avec

$$v_y=v_{0y}+at$$
$$=3,736\tfrac{N}{kg}\cdot61,21s$$
$$=228,7\tfrac{m}{s}$$

10. Au plus près, la distance entre Mars et la Terre est de 0,52 UA. Ainsi, l'angle entre la Terre et la Lune à cette distance est

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{3,844\times 10^{8} m}{0,52\cdot 1,496\times 10^{11} m}\\ &= 0,00494 rad\\ &= 0,283°\\ &= 17,0'\end{aligned}$$

On peut donc voir la Terre et la Lune séparément.

11. a) La variation d'énergie thermique est

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_f - E_i\\ &= MCT_f - MCT_i\\ &= MC\left(T_f - T_i\right)\\ &= MC\Delta T\end{aligned}$$

On doit donc trouver la masse de cette planète. Puisque le rayon est de 10 000 km et que la densité est de 7800 kg/m³, la masse est

$$\begin{aligned}M &= \rho\cdot volume\\ &= \rho\cdot \tfrac{4}{3}\pi R^3\\ &= 7800\tfrac{kg}{m^3}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(10^7 m\right)^3\\ &= 3,267\times 10^{25} kg\end{aligned}$$

La variation d'énergie thermique est donc

$$\begin{aligned}\Delta E &= MC\Delta T\\ &= 3,267\times 10^{28} g\cdot 0,444\tfrac{J}{g°C}\cdot\left(-200°C\right)\\ &= -2,9\times 10^{30} J\end{aligned}$$

Il y aura donc 2,9 x 10^{30} J d'émise.

b) Le changement de rayon est

$$\frac{\Delta R}{R} = \alpha \Delta T$$

$$\frac{\Delta R}{10^7 m} = 1,17 \times 10^{-5} {}^\circ C^{-1} \cdot \left(-200^\circ C\right)$$

$$\Delta R = -23\,400 m$$

Le rayon diminue donc de 23 400 m.

c) La variation d'énergie gravitationnelle est

$$\begin{aligned}
\Delta E &= E_f - E_i \\
&= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_f} - -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_i} \\
&= -\frac{3GM^2}{5}\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_1}\right) \\
&= -\frac{3 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \left(3,267 \times 10^{25} kg\right)^2}{5} \cdot \left(\frac{1}{9976600 m} - \frac{1}{10^7 m}\right) \\
&= -1 \times 10^{31} J
\end{aligned}$$

L'énergie émise par contraction gravitationnelle est donc de 10^{31} J.

d) La proportion est

$$\begin{aligned}
\frac{E_g}{E_g + E_t} &= \frac{10^{31} J}{10^{31} J + 2,9 \times 10^{30} J} \\
&= 77,6\%
\end{aligned}$$

12. La vitesse de libération est

$$\begin{aligned}
v_{lib} &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} \\
&= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,48 \times 10^{23} kg}{2,634 \times 10^6 m}} \\
&= 2739 \tfrac{m}{s}
\end{aligned}$$

La vitesse des molécules est

$$v_{azote} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}38\times10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 110K}{28 \cdot 1{,}66\times10^{-27}\,kg}} \\ = 256\,\tfrac{m}{s}$$

On a donc

$$\frac{v_{lib}}{v_{molécules}} = \frac{2739\,\frac{m}{s}}{313\,\frac{m}{s}} = 10{,}7$$

Ganymède pourrait donc garder une atmosphère d'azote.

13. La force de marée faite par la Lune sur la Terre est

$$F_{☽} = \frac{2GM_{☽} m R_{\oplus}}{r^3_{\oplus ☽}}$$

Alors que la force de marée faite par Jupiter sur Io est

$$F_{♃} = \frac{2GM_{♃} m R_{io}}{r^3_{♃\text{-io}}}$$

Le rapport est donc

$$\frac{F_{♃}}{F_{☽}} = \frac{\left(\frac{2GM_{♃} m R_{io}}{r^3_{♃\text{-io}}}\right)}{\left(\frac{2GM_{☽} m R_{\oplus}}{r^3_{\oplus ☽}}\right)} \\ = \frac{r^3_{\oplus ☽} M_{♃} R_{io}}{r^3_{♃\text{-io}} M_{☽} R_{\oplus}} \\ = \frac{\left(3{,}844\times10^{8}\,m\right)^3 \cdot 1{,}8986\times10^{27}\,kg \cdot 1{,}822\times10^{6}\,m}{\left(4{,}217\times10^{8}\,m\right)^3 \cdot 7{,}44\times10^{22}\,kg \cdot 6{,}378\times10^{6}\,m} \\ = 5\,522$$

14. Pour la partie la plus près de l'anneau, la période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{\mathrm{h}}}} \\ &= 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\left(6,69\times 10^{7}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,6846\times 10^{26}kg}} \\ &= 17\ 651s \\ &= 4,90h \end{aligned}$$

Pour la partie la plus éloignée de l’anneau, la période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{\mathrm{h}}}} \\ &= 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\left(1,2\times 10^{8}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,6846\times 10^{26}kg}} \\ &= 42\ 404s \\ &= 11,78h \end{aligned}$$

Comme la partie la plus près tourne plus rapidement autour de Saturne que la planète sur elle-même, on verrait les particules de celle partie de l’anneau se lever à l’ouest et se coucher à l’est. Comme la partie la plus éloignée tourne moins rapidement autour de Saturne que la planète sur elle-même, on verrait les particules de celle partie de l’anneau se lever à l’est et se coucher à l’ouest.

15. a) L’intensité est

$$\begin{aligned} I &= \frac{L}{4\pi D^2} \\ &= \frac{3,828\times 10^{26}W}{4\pi\left(18,28\cdot 1,496\times 10^{11}m\right)^2} \\ &= 4,073\,\frac{W}{m^2} \end{aligned}$$

b) L’énergie captée est de

$$\begin{aligned} E &= I\cdot A_{capteur} \\ &= I\pi R^2 \\ &= 3,696\,\frac{W}{m^2}\cdot\pi\cdot\left(2,5362\times 10^{7}m\right)^2 \\ &= 8,231\times 10^{15}W \end{aligned}$$

c) La puissance émise vers la Terre est

$$\begin{aligned} L &= 0,51 \cdot 8,231\times 10^{15} W \\ &= 4,198\times 10^{15} W \end{aligned}$$

d) L'intensité reçue sur Terre est

$$\begin{aligned} I &= \frac{L}{2\pi D^2} \\ &= \frac{4,198\times 10^{15} W}{2\pi\left(17,26\cdot 1,496\times 10^{11} m\right)^2} \\ &= 1,002\times 10^{-10} \tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

(C'est 2π au lieu de 4π au diviseur, car seulement la moitié de la planète émet de la lumière et cette lumière va se répartir sur une demi-sphère. Ce n'est pas tout-à-fait vrai, mais on va dire que c'est une approximation.)

e) On trouve la magnitude bolométrique avec

$$\begin{aligned} I &= 2,52\times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2}\cdot 10^{-0,4 m_{bol}} \\ 1,002\times 10^{-10} \tfrac{W}{m^2} &= 2,52\times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2}\cdot 10^{-0,4 m_{bol}} \\ 0,00325 &= 10^{-0,4 m_{bol}} \\ m_{bol} &= 6,0 \end{aligned}$$

La véritable valeur est de 5,32, ce qui veut dire que notre intensité calculée est presque exactement 2 fois trop petite.

<u>Annexe</u>

La magnitude calculée est beaucoup trop haute. Des études plus poussées ont montré que la magnitude est

$$m = H + 5\log\left(\frac{d_{BS} d_{BO}}{(1UA)^2}\right) - 2,5\log q$$

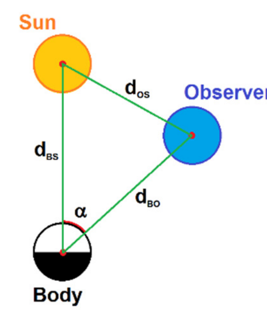
Dans cette formule, *H* est la magnitude absolue qui, pour une planète, est définie comme la magnitude qu'aurait un objet s'il était en opposition parfaite à 1 UA de distance. Cette magnitude absolue dépend du diamètre et de l'albédo géométrique *p* selon la formule suivante.

$$D = \frac{1329km}{\sqrt{p}} \cdot 10^{-0,2H}$$

Dans le cas d'Uranus, on a

$$2 \cdot 25\,362km = \frac{1329km}{\sqrt{0,51}} \cdot 10^{-0,2 \cdot H}$$
$$H = -7,177$$

Les valeurs des *d* dans la formule sont montrées sur la figure de droite. Dans le cas qui nous intéresse (Uranus et Soleil en opposition), on a



$$d_{BS} = 18,28UA$$
$$d_{BO} = 17,26UA$$

Finalement *q* est appelée l'intégrale de phase. Ce facteur tient compte du fait que la réflexion sur une sphère est plus compliquée que sur une surface plane. L'approximation des sphères idéales en réflexion diffuse donne

$$q = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\alpha}{180°}\right)\cos\alpha + \frac{1}{\pi}\sin\alpha$$

où *a* est l'angle (en degrés) montré sur la figure. À l'opposition, cet angle est 0 et *q* est

$$q = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{0°}{180°}\right)\cos 0° + \frac{1}{\pi}\sin 0°$$
$$= \frac{2}{3}$$

On a donc

$$\begin{aligned} m &= H + 5\log\left(\frac{d_{BS}d_{BO}}{(1UA)^2}\right) - 2,5\log q \\ &= -7,177 + 5\cdot\log\left(\frac{18,28UA\cdot 17,26UA}{(1UA)^2}\right) - 2,5\cdot\log\frac{2}{3} \\ &= -7,177 + 5\cdot\log(315,5128) - 2,5\cdot\log\frac{2}{3} \\ &= 5,76 \end{aligned}$$

Ce résultat est beaucoup plus près de la réalité, mais il manque encore un peu de luminosité (on est à 66% du maximum observé).

16. a) La température est

$$\begin{aligned} T &= 278,3K\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{L_{étoile}}{1L_\odot}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2(1-A)} \\ &= 278,3K\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1L_\odot}{1L_\odot}\right)\cdot\left(\frac{1UA}{30,07UA}\right)^2\cdot(1-0,29)} \\ &= 278,3K\cdot\sqrt[4]{1\cdot\left(\frac{1}{30,07}\right)^2\cdot(1-0,29)} \\ &= 46,6K \end{aligned}$$

b) On a

$$P_{recue} = P_{émise}$$

$$1,5\cdot\frac{L_{étoile}R_{planète}^2(1-A)}{4D^2} = \sigma 4\pi R_{planète}^2 T^4$$

$$1,5\cdot\frac{L_{étoile}(1-A)}{4D^2} = \sigma 4\pi T^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{1,5\cdot L_{étoile}(1-A)}{16\pi\sigma D^2}}$$

Avec les valeurs, on obtient

$$
\begin{aligned}
T &= \sqrt[4]{\frac{1,5 \cdot L_{étoile}\left(1-A\right)}{16\pi\sigma D^2}} \\
&= \sqrt[4]{\frac{1,5 \cdot 3,828\times 10^{26} W \cdot \left(1-0,29\right)}{16\pi \cdot 5,67\times 10^{-8} \frac{W}{m^2K^4} \cdot \left(30,07 \cdot 1,496\times 10^{11} m\right)^2}} \\
&= 51,6K
\end{aligned}
$$