Solutionnaire du chapitre 5

1. Si on obtient 15 x 10^6 J avec 5 kg, la quantité d'énergie qu'on peut obtenir avec 1,9885 x 10^{30} kg est

$$\begin{aligned} E &= \frac{15\times10^6 J}{5kg}\cdot 1,9885\times10^{30} kg \\ &= 5,9655\times10^{36} J \end{aligned}$$

La durée de vie du Soleil serait alors de

$$\begin{aligned} t &= \frac{E}{L} \\ &= \frac{5,9655\times10^{36} J}{3,828\times10^{26} W} \\ &= 1,558\times10^{10} s \\ &= 493,8 ans \end{aligned}$$

2. Calculons l'énergie libérée par cette contraction. L'énergie gravitationnelle initiale est

$$U_g = -\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R}$$

Alors que l'énergie finale est

$$U_g' = -\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R'}$$

La variation d'énergie de l'étoile est donc

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\left(U_g' - U_g\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R'} - -\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R}\right) \\
&= \frac{4}{5}GM^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \\
&= \frac{4}{5}\cdot 6,674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(2\cdot 1,9885\times10^{30}\,kg\right)^2\cdot\left(\frac{1}{30\cdot 1,496\times10^{11}\,m} - \frac{1}{0,1\cdot 1,496\times10^{11}\,m}\right) \\
&= -5,62\times10^{40}\,J
\end{aligned}
$$

Si l'énergie gravitationnelle de l'étoile a baissé de 5,62 x 10^{40} J, c'est que l'étoile a rayonné 5,62 x 10^{40} J. La puissance rayonnée est donc de

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{E}{t} \\
&= \frac{5,62\times10^{40}\,J}{100\,000\cdot 365,25\cdot 24\cdot 60\cdot 60} \\
&= 1,781\times10^{28}\,W \\
&= 46,5L_\odot
\end{aligned}
$$

3. L'énergie gravitationnelle est

$$U_g = -\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R}$$

Puisque la puissance est le rythme auquel cette énergie change, on a

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{dU_g}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(-\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R}\right) \\
&= \frac{d}{dR}\left(-\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R}\right)\frac{dR}{dt} \\
&= \frac{8}{5}\frac{GM^2}{R^2}\frac{dR}{dt}
\end{aligned}
$$

Selon le théorème du viriel, seulement la moitié de l'énergie est rayonnée. Cela veut dire que la puissance obtenue par la gravitation doit être de

$$\begin{aligned} P &= 2\cdot 3{,}828\times 10^{26}W \\ &= 7{,}656\times 10^{26}W \end{aligned}$$

On a donc

$$7{,}656\times 10^{26}W = \frac{8}{5}\frac{GM^2}{R^2}\frac{dR}{dt}$$

$$7{,}656\times 10^{26}W = \frac{8}{5}\cdot\frac{6{,}674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(1{,}9885\times 10^{30}kg\right)^2}{\left(6{,}957\times 10^{8}m\right)^2}\cdot\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = 8{,}776\times 10^{-7}\,\frac{m}{s}$$

Si on change les unités pour avoir de km par siècle, on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= 8{,}776\times 10^{-7}\,\frac{m}{s}\cdot\frac{1km}{1000m}\cdot\frac{100\cdot 365{,}25\cdot 24\cdot 60\cdot 60s}{1\,\text{siècle}} \\ &= 2{,}77\,\frac{km}{siecle} \end{aligned}$$

4. Trouvons premièrement le nombre de désintégrations par seconde dans le Soleil. Comme il y a 1,9885 x 10^{33} g dans le Soleil et qu'il y a 12 400 désintégrations par seconde dans un gramme, le nombre total de désintégrations par seconde est

$$\begin{aligned} N &= 1{,}9885\times 10^{33}g\cdot 12400\,\frac{des}{g\,s} \\ &= 2{,}466\times 10^{37}\,\frac{des}{s} \end{aligned}$$

Comme chaque désintégration donne 4,27 MeV, l'énergie libérée par seconde, qui est la luminosité, est

$$\begin{aligned} L &= 2{,}466\times 10^{37}\,\frac{des}{s}\cdot 4{,}27\,\frac{MeV}{des} \\ &= 1{,}053\times 10^{38}MeV \\ &= 1{,}697\times 10^{25}W \end{aligned}$$

Ceci représente 4,4 % de sa luminosité actuelle.

5. L'énergie libérée lors de la première étape est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(2\cdot 1,007\ 825\ 032u - 2,014\ 101\ 778u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(0,001\,548\,286u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= 1,442 MeV\end{aligned}$$

L'énergie libérée lors de la deuxième étape est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(1,007\ 825\ 032u + 2,014\ 101\ 778u - 3,016\ 029\ 319u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(0,005\,897\,491u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= 5,494 MeV\end{aligned}$$

L'énergie libérée lors de la troisième étape est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(2\cdot 3,016\ 029\ 319u - 4,002\ 603\ 254u - 2\cdot 1,007\ 825\ 032u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(0,013\,805\,532u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= 12,860 MeV\end{aligned}$$

6. a) L'énergie libérée est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(3\cdot 4,002\,603\,254u - 12,000\,000\,000u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(0,007\,809\,762u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= 7,275 MeV\end{aligned}$$

b) Le rendement est

$$\begin{aligned}R &= \frac{E}{M_{initiale}}\\ &= \frac{7,275\times 10^{6}\cdot 1,602\times 10^{-19}J}{3\cdot 4,002\,603\,254\cdot 1,660\ 559\times 10^{-27}kg}\\ &= 5,845\times 10^{13}\,\tfrac{J}{kg}\end{aligned}$$

c) Comme le Soleil est composé à 27,1 % d'hélium, la masse d'hélium dans le Soleil est

$$\begin{aligned} M_{He} &= 0,271 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg \\ &= 5,389 \times 10^{29} kg \end{aligned}$$

L'énergie est donc

$$\begin{aligned} E &= R \cdot M \\ &= 5,845 \times 10^{13} \tfrac{J}{kg} \cdot 5,389 \times 10^{29} kg \\ &= 3,15 \times 10^{43} J \end{aligned}$$

d) La durée de vie est

$$E = Pt$$
$$3,15 \times 10^{43} J = 3,828 \times 10^{26} W \cdot t$$
$$t = 8,228 \times 10^{16} s$$
$$t = 2,61 \times 10^{9} ans$$

Ce qui est 2,61 milliards d'années.

7. Le nombre de moles d'hydrogène dans 50 % de la densité est

$$n_H = \frac{N_H}{V} = \frac{0,5 \cdot \rho}{0,001 \frac{kg}{mol}} = 500 \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho$$

Le nombre de moles d'hélium dans 40 % de la densité est

$$n_{He} = \frac{N_{He}}{V} = \frac{0,4 \cdot \rho}{0,004 \frac{kg}{mol}} = 100 \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho$$

Le nombre de moles de carbone dans 10 % de la densité est

$$n_C = \frac{N_C}{V} = \frac{0,1 \cdot \rho}{0,012 \frac{kg}{mol}} = \frac{25}{3} \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho$$

Le nombre de moles d'électrons libres est donc

$$n_é = \frac{N_é}{V} = 1 \cdot 500 \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho + 2 \cdot 100 \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho + 6 \cdot \frac{25}{3} \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho = 750 \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho$$

Le nombre total de moles par unité de volume est donc de

$$\begin{aligned} n &= 500 \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho + 100 \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho + \frac{25}{3} \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho + 750 \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho \\ &= 1358,3 \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho \end{aligned}$$

8. a) L'intensité est

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{-k\rho x} \\ &= 1 \tfrac{W}{m^2} \cdot e^{-0,05 \frac{m^2}{kg} \cdot 2 \frac{kg}{m^3} \cdot 50m} \\ &= 6,74 \times 10^{-3} \tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

b) Le libre parcours moyen est

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{k\rho} \\ &= \frac{1}{0,05 \frac{m^2}{kg} \cdot 2 \frac{kg}{m^3}} \\ &= 10m \end{aligned}$$

9. On a

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{-k\rho x} \\ 0,5 I_0 &= I_0 e^{-k \cdot 1,3 \frac{kg}{m^3} \cdot 1000m} \\ 0,5 &= e^{-k \cdot 1,3 \frac{kg}{m^3} \cdot 1000m} \\ \ln(0,5) &= -k \cdot 1,3 \tfrac{kg}{m^3} \cdot 1000m \\ k &= 5,33 \times 10^{-4} \tfrac{m^2}{kg} \end{aligned}$$

10. a) n est

$$\begin{aligned} n &= 1625 \tfrac{mol}{kg} \cdot \rho \\ &= 1625 \tfrac{mol}{kg} \cdot 152900 \tfrac{kg}{m^3} \\ &= 2,485 \times 10^8 \tfrac{mol}{m^3} \end{aligned}$$

La pression est donc

$$\begin{aligned} P &= nRT \\ &= 2,485\times10^{8} \tfrac{mol}{m^3}\cdot 8,31\tfrac{J}{Kmol}\cdot 15,67\times10^{6} K \\ &= 3,24\times10^{16} Pa \end{aligned}$$

b) La pression calculée est 1,34 fois plus grande que la pression selon le modèle.

c) On a

$$\begin{aligned} P &= nRT \\ 2,36\times10^{16} Pa &= n\cdot 8,31\tfrac{J}{Kmol}\cdot 15,67\times10^{6} K \\ n &= 1,812\times10^{6} \tfrac{mol}{m^3} \end{aligned}$$

Si la proportion d'hydrogène est A, alors la proportion d'hélium est $1 - A$. La valeur de n est alors la somme de

$$n_H = \frac{N_H}{V} = \frac{A\rho}{0,001\frac{kg}{mol}}$$

$$n_{He} = \frac{N_{He}}{V} = \frac{(1-A)\cdot\rho}{0,004\frac{kg}{mol}}$$

$$n_{é} = \frac{N_{é}}{V} = 1\cdot\frac{A\rho}{0,001\frac{kg}{mol}} + 2\cdot\frac{(1-A)\rho}{0,004\frac{kg}{mol}}$$

Au total, on doit donc avoir

$$n = \frac{A\rho}{0,001\frac{kg}{mol}} + \frac{(1-A)\rho}{0,004\frac{kg}{mol}} + 1\cdot\frac{A\rho}{0,001\frac{kg}{mol}} + 2\cdot\frac{(1-A)\rho}{0,004\frac{kg}{mol}}$$

$$1,812\times10^{6} \tfrac{mol}{m^3} = \frac{2A\rho}{0,001\frac{kg}{mol}} + \frac{3(1-A)\rho}{0,004\frac{kg}{mol}}$$

Ce qui donne

$$\frac{2A}{0,001\,\frac{kg}{mol}}+\frac{3(1-A)}{0,004\,\frac{kg}{mol}}=\frac{1,812\times10^{6}\,\frac{mol}{m^3}}{\rho}$$

$$\frac{8A}{0,004\,\frac{kg}{mol}}+\frac{3(1-A)}{0,004\,\frac{kg}{mol}}=\frac{1,812\times10^{6}\,\frac{mol}{m^3}}{152\,900\,\frac{kg}{m^3}}$$

$$8A+3(1-A)=\frac{1,812\times10^{6}\,\frac{mol}{m^3}}{152\,900\,\frac{kg}{m^3}}\cdot 0,004\,\frac{kg}{mol}$$

$$8A+3(1-A)=4,7412$$

$$8A+3-3A=4,7412$$

$$5A=1,7412$$

$$A=0,348$$

On doit donc avoir 34,8 % d'hydrogène et 65,1 % d'hélium.

11. a) La densité serait

$$\begin{aligned}\rho_{centre}&\approx 153\,\tfrac{tonnes}{m^3}\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot^3}{R^3}\\&\approx 153\,\tfrac{tonnes}{m^3}\cdot\frac{1,5M_\odot}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot^3}{(1,35R_\odot)^3}\\&\approx 153\,\tfrac{tonnes}{m^3}\cdot 1,5\cdot\frac{1}{(1,35)^3}\\&\approx 93,3\,\tfrac{tonnes}{m^3}\end{aligned}$$

b) Le Soleil réel a une densité de 153 kg/m³. Donc la densité par rapport à celle du Soleil réel est

$$\frac{93,3\,\frac{tonnes}{m^3}}{153\,\frac{tonnes}{m^3}}=0,609$$

La densité est donc 60,9 % de la densité du Soleil réel.

c) La pression serait

$$\begin{aligned}P_{centre} &\approx 2,36\times10^{16}\,Pa\cdot\frac{M^2}{M_\odot^2}\cdot\frac{R_\odot^4}{R^4}\\&\approx 2,36\times10^{16}\,Pa\cdot\frac{\left(1,5M_\odot\right)^2}{M_\odot^2}\cdot\frac{R_\odot^4}{\left(1,35R_\odot\right)^4}\\&\approx 2,36\times10^{16}\,Pa\cdot1,5^2\cdot\frac{1}{\left(1,35\right)^4}\\&\approx 1,60\times10^{16}\,Pa\end{aligned}$$

d) Le Soleil réel a une pression centrale de 2,36 x 10^{16} Pa. Donc la pression par rapport à celle du Soleil réel est

$$\frac{1,60\times10^{16}\,Pa}{2,36\times10^{16}\,Pa}=0,677$$

C'est donc 67,7 % de la pression au centre du Soleil réel.

e) La température serait

$$\begin{aligned}T_{centre} &\approx 15,7MK\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot}{R}\\&\approx 15,7MK\cdot\frac{1,5M_\odot}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot}{\left(1,35R_\odot\right)}\\&\approx 15,7MK\cdot1,5\cdot\frac{1}{1,35}\\&\approx 17,4MK\end{aligned}$$

C'est 17,4 millions de K.

f) Le Soleil actuel a une température de 15,7 x 10^6 K. Donc, la température par rapport à celle du Soleil actuel est

$$\frac{17,4\times10^6\,K}{15,7\times10^6\,K}=1,11$$

La température est donc 1,11 fois plus grande.

12. a) On sait que le rythme sont

$$\text{Rythme de fusion}_{PP} = k_1 T^4$$
$$\text{Rythme de fusion}_{CNO} = k_2 T^{19,9}$$

De plus, on sait qu'il y a égalité à 18,5 millions de kelvins. On a donc

$$1 = \frac{k_2 \left(1,85\times10^7 K\right)^{19,9}}{k_1 \left(1,85\times10^7 K\right)^4}$$
$$\frac{k_2}{k_1} = \left(1,85\times10^7 K\right)^{-15,9}$$

Pour avoir un rythme 2 fois plus grand, on doit avoir

$$2 = \frac{k_2 T^{19,9}}{k_1 T^4}$$
$$2 = \left(1,85\times10^7 K\right)^{-15,9} \cdot \frac{T^{19,9}}{T^4}$$
$$2 = \left(1,85\times10^7 K\right)^{-15,9} \cdot T^{15,9}$$
$$2 = \left(\frac{T}{1,85\times10^7 K}\right)^{15,9}$$
$$\frac{T}{1,85\times10^7 K} = \sqrt[15,9]{2}$$
$$T = 1,932\times10^7 K$$

C'est 19,32 millions de kelvins.

b) À 15 670 000 K, on a

$$\text{Rythme de fusion}_{PP} = k_1 T^4$$
$$\text{Rythme de fusion}_{CNO} = k_2 T^{19,9}$$

Le rythme de fusion totale est

$$\text{Rythme de fusion total} = k_1 T^4 + k_2 T^{19,9}$$

La proportion provenant de la réaction PP est donc

$$\frac{\text{Rythme de fusion}_{PP}}{\text{Rythme de fusion total}} = \frac{k_1 T^4}{k_1 T^4 + k_2 T^{19,9}}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{k_2}{k_1} T^{15,9}}$$

Avec les valeurs on obtient

$$\frac{\text{Rythme de fusion}_{PP}}{\text{Rythme de fusion total}} = \frac{1}{1 + \frac{k_2}{k_1} T^{15,9}}$$
$$= \frac{1}{1 + \left(1,85 \times 10^7 K\right)^{-15,9} \cdot \left(1,567 \times 10^7 K\right)^{15,9}}$$
$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{1,567 \times 10^7 K}{1,85 \times 10^7 K}\right)^{15,9}}$$
$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{1,567}{1,85}\right)^{15,9}}$$
$$= 0,933$$

Ainsi, 93,3 % de l'énergie provient de la réaction PP. Il reste donc 6,7 % pour le cycle CNO.

13. Avec un Soleil à 1 masse solaire, le rythme de fusion est

$$\text{Rythme de fusion}_0 \propto \rho_0 T_0^{19,9}$$
$$= (\text{constante})\, \rho_0 T_0^{19,9}$$

Avec un Soleil à 0,9 masse solaire, le rythme de fusion est

$$\text{Rythme de fusion} = (\text{constante})\, \rho T^{19,9}$$

Pour trouver le rythme le rythme à cette masse, il nous faut la densité et la température.

La densité est

$$\begin{aligned}
\rho &\approx 153\tfrac{tonnes}{m^3}\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot^3}{R^3}\\
&\approx \rho_0\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot^3}{R^3}\\
&\approx \rho_0\cdot\frac{0,9M_\odot}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot^3}{\left(0,924R_\odot\right)^3}\\
&\approx \rho_0\cdot 0,9\cdot\frac{1}{\left(0,924\right)^3}\\
&\approx 1,14\rho_0
\end{aligned}$$

La température est

$$\begin{aligned}
T_{centre} &\approx 15,7MK\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot}{R}\\
&\approx T_0\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot}{R}\\
&\approx T_0\cdot\frac{0,9M_\odot}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot}{\left(0,924R_\odot\right)}\\
&\approx T_0\cdot 0,9\cdot\frac{1}{0,924}\\
&\approx 0,974T_0
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&\frac{\text{Rythme de fusion}}{\text{Rythme de fusion}_0}=\frac{\left(\text{constante}\right)\rho T^{19,9}}{\left(\text{constante}\right)\rho_0 T_0^{19,9}}\\
&=\frac{\rho T^{19,9}}{\rho_0 T_0^{19,9}}\\
&=\frac{1,14\rho_0\left(0,974T_0\right)^{19,9}}{\rho_0 T_0^{19,9}}\\
&=0,679
\end{aligned}$$

14. À 15 millions de kelvins, on a

$$\begin{aligned} kT &= 1,38065\times10^{-23}\,\tfrac{J}{K}\cdot 15\,000\,000K \\ &= 2,071\times10^{-16}\,J \\ &= 1,293keV \end{aligned}$$

Avec cette valeur, l'intégrale

$$N = \left(1,084keV\right)^{3/2} N_{tot}\int_{E_1}^{E_2}\frac{\sqrt{E}}{\left(kT\right)^{3/2}}e^{-\frac{E}{kT}}dE$$

devient

$$\begin{aligned} N &= \left(1,084keV\right)^{3/2} N_{tot}\int_{E_1}^{E_2}\frac{\sqrt{E}}{\left(1,293keV\right)^{3/2}}e^{-\frac{E}{1,293keV}}dE \\ &= 0,7676N_{tot}\int_{E_1}^{E_2}\sqrt{E}\cdot e^{-\frac{E}{1,293keV}}dE \end{aligned}$$

Avec les bornes, on obtient

$$N = 0,7676N_{tot}\int_{3}^{12}\sqrt{E}\cdot e^{-\frac{E}{1,293keV}}dE$$

Le code pour cette intégrale sur wolfram est

integrate (x^ 0.5*exp(-x/1.293)) from 3 to 12

Cette intégrale vaut 0,2603.

On a donc

$$\begin{aligned} N &= 0,7676N_{tot}\cdot 0,2603 \\ &= 0,1998N_{tot} \end{aligned}$$

Donc, 20,0 % des particules ont une énergie entre 3 et 12 keV.