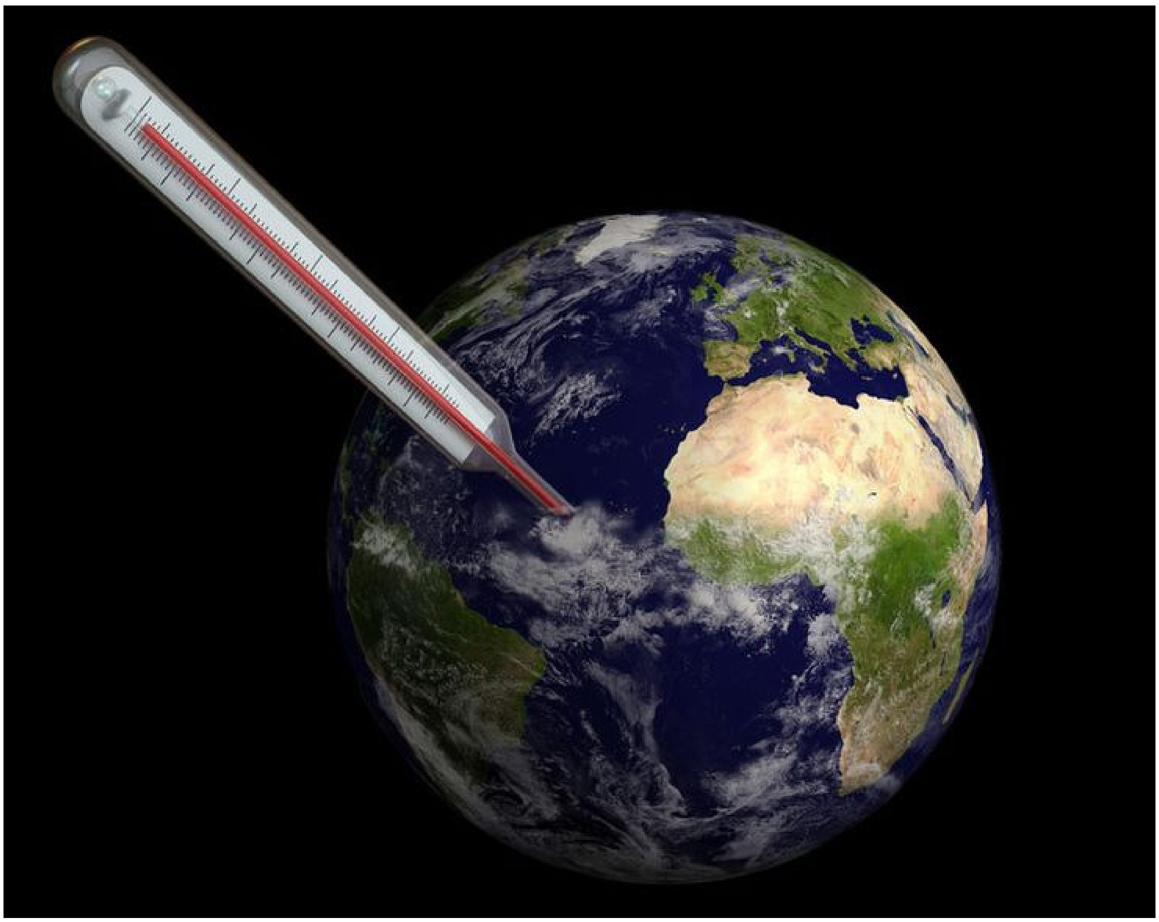
3 LE SYSTÈME TERRE-SOLEIL

Quelle est la température moyenne à la surface de la Terre, sachant que l'albédo est de 0,30 ?

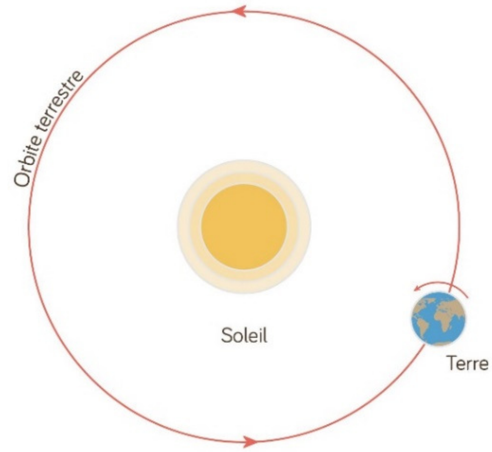


www.pinterest.co.uk/explore/solutions-of-global-warming/?lp=true

Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

3.1 LA FORCE GRAVITATIONNELLE ENTRE DEUX ASTRES

On sait que la Terre tourne autour du Soleil. Plus précisément, selon les lois de Newton et la loi de la gravitation, les deux objets doivent tous les deux tourner autour de leur centre de masse. Toutefois, puisque le Soleil est beaucoup plus massif que la Terre, le centre de masse du système Terre-Soleil est presque au centre du Soleil. On peut donc dire en première approximation que la Terre tourne effectivement autour du Soleil.



www.schoolmouv.fr/cours/la-terre-une-planete-qui-abrite-la-vie/fiche-de-cours

Selon la gravitation, ce mouvement autour du Soleil peut-être un cercle, mais ce n'est pas la seule possibilité. Dans cette section, on va examiner les différentes orbites possibles autour du Soleil.

Pour connaitre le mouvement de la Terre autour du Soleil, il faut connaitre la force faite par le Soleil sur la Terre.

On pourrait être tenté d'utiliser directement la formule

$$F_g = \frac{GMm}{r^2}$$

mais il ne faut pas se précipiter. Cette formule donne la force entre deux masses ponctuelles. Peut-être que la formule est différente entre deux astres qui ne sont pas ponctuels.

Pour déterminer la force, on doit faire le calcul de la force en deux étapes.

1) Dans la première partie, on détermine le champ gravitationnel fait par le Soleil de masse M.

2) Dans la deuxième partie, on calcule la force faite sur la Terre placée dans le champ fait par le Soleil.

Calcul du champ fait par le Soleil

Fort heureusement, on a déjà fait ce calcul au chapitre 1. On avait obtenu alors un résultat très simple pour un objet sphérique comme le Soleil. Le champ est le même que le champ fait par une masse ponctuelle située au centre du Soleil.

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

On peut donc remplacer le Soleil par une masse ponctuelle de même masse et l'effet sur la Terre est identique.

Calcul de la force sur la Terre

On trouve la force en séparant la Terre en petits morceaux infinitésimaux. Chacun de ces morceaux subit une force gravitationnelle dont la grandeur est

$$dF_g = gdm$$

Ensuite, on doit sommer ces forces avec une intégrale pour avoir la force totale sur la Terre. Ça semble bien plaisant, mais il n'est pas nécessaire de faire tout ce calcul.

On sait, par la troisième loi de Newton, que la force faite par le Soleil sur la Terre a la même grandeur que la force faite par la Terre sur le Soleil. Or, la force sur le Soleil, qui est remplacé par une masse ponctuelle, est facile à trouver. Le champ fait par la Terre est simplement

$$g = \frac{Gm}{r^2}$$

Alors, la force sur la masse ponctuelle (le Soleil) est

$$F_g = Mg = \frac{GMm}{r^2}$$

Ainsi, par la 3^e loi de Newton, la force sur la Terre est donc aussi

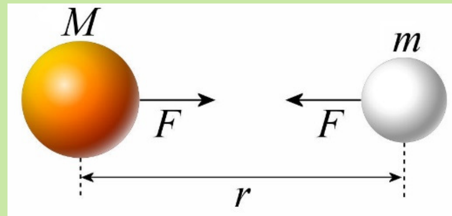
$$F_g = \frac{GMm}{r^2}$$

On arrive donc à la conclusion que la force entre deux astres ayant une symétrie sphérique est

Force entre deux astres

$$F_g = \frac{GMm}{r^2}$$

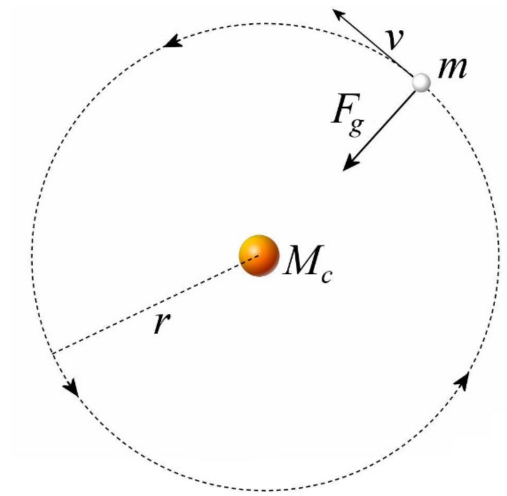
où r est la distance entre les <u>centres</u> des sphères.



Puisqu'on connait maintenant la force entre la Terre et le Soleil, nous allons déterminer l'effet de cette force pour trouver la forme de la trajectoire de la Terre autour du Soleil.

3.2 LES ORBITES CIRCULAIRES

On va commencer par un cas simple : une orbite circulaire. (On va noter la masse au centre de l'orbite par M_c, pour masse centrale.)



Si la planète en orbite fait un mouvement circulaire, il faut une force centripète. Comme il n'y a que la force de gravitation qui agit sur la planète, c'est cette force qui joue le rôle de force centripète. On a donc

$$\frac{GM_c m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

On voit alors que l'objet en orbite doit avoir une vitesse très précise pour être en orbite circulaire. Si on isole v, on obtient

La vitesse d'un objet en orbite circulaire

$$v = \sqrt{\frac{GM_c}{r}}$$

Le temps nécessaire pour faire le tour de l'objet central (la période T) est donc

$$T = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_c}{r}}}$$

En simplifiant, on obtient

La période d'un objet en orbite circulaire

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_c}}$$

L'énergie mécanique de l'objet en orbite circulaire est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E_k + U \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_c m}{r} \end{aligned}$$

Mais puisque la force centripète est égale à la force de gravitation, on a

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GM_c m}{r^2}$$

De là, on peut obtenir

$$\begin{aligned} mv^2 &= \frac{GM_c m}{r} \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{GM_c m}{2r} \end{aligned}$$

Si on utilise cette valeur de l'énergie cinétique dans notre formule de l'énergie mécanique, on arrive à

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{GM_c m}{2r} - \frac{GM_c m}{r} \\ &= \left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{GM_c m}{r} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{GM_c m}{r} \end{aligned}$$

On a donc

Énergie mécanique d'un objet en orbite circulaire

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2r}$$

Toutefois, il est très rare que la vitesse soit exactement celle qu'on doit avoir pour obtenir une orbite circulaire. Ainsi, l'orbite de la Terre autour du Soleil n'est pas une orbite circulaire et il faut donc continuer notre investigation pour connaitre la véritable trajectoire de la Terre autour du Soleil.

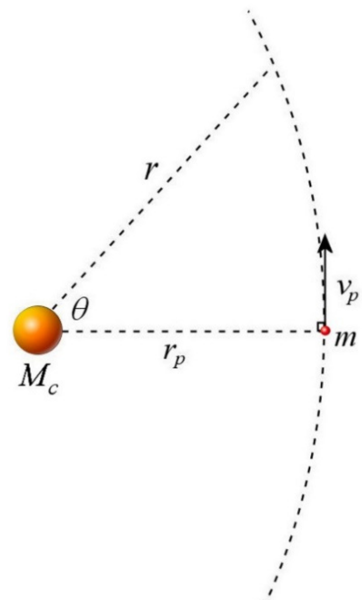
3.3 FORMULE GÉNÉRALE DE LA TRAJECTOIRE PRÈS D'UN OBJET MASSIF

Sachant que les astres s'attirent par la force de gravitation selon

$$F_g = \frac{GM_c m}{r^2}$$

on va déterminer comment un astre très massif comme le Soleil modifie la trajectoire des objets beaucoup moins massifs qui passent près de lui. (Ceci est exactement ce que Halley demanda à Newton de faire en 1684 et qui lança ce dernier dans la découverte des lois qui portent aujourd'hui son nom.)

Forme de la trajectoire

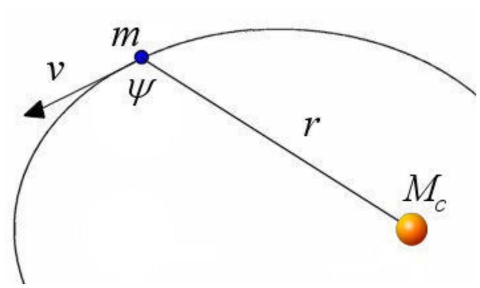


Considérons un objet qui suit une trajectoire près d'une masse centrale, comme le Soleil.

Dans sa trajectoire, l'objet va, à un moment donné, passer à sa position la plus près du Soleil (appelée le périhélie). La distance entre l'objet et le Soleil à ce moment sera notée r_p et la vitesse à ce moment sera notée v_p. Notez également que la vitesse à cet endroit est perpendiculaire à la distance. Cette position sera notre point de référence pour l'angle θ utilisé pour donner la position.

On veut connaitre la forme de la trajectoire, ce qui signifie qu'on veut savoir r en fonction de θ.

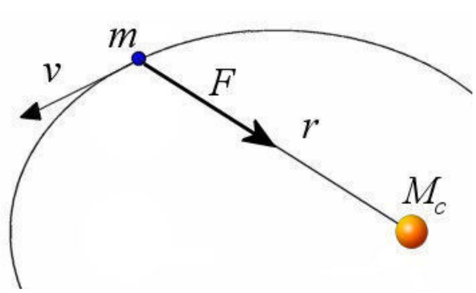
<u>La conservation du moment cinétique</u>



Commençons par un rappel de ce qu'est le moment cinétique.

$$L = mvr\sin\psi$$

Dans cette formule, l'angle ψ est l'angle entre la vitesse de l'objet en orbite et la ligne qui va de la masse centrale à l'objet en orbite (ligne r sur la figure).



Il y a conservation du moment cinétique si la somme des moments de force externes est nulle. Sur la trajectoire, il n'y a qu'une seule force, la gravitation, qui agit sur le corps. Le moment de force, calculé à partir de la masse centrale, est

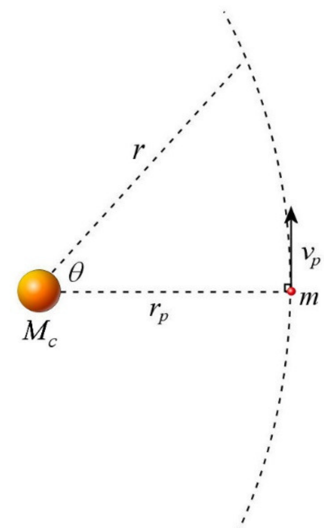
$$\tau = Fr\sin\phi$$

où ϕ est l'angle entre la force et une ligne allant de la masse centrale à l'objet en orbite (ligne r sur la figure). Ce moment de force est nul, car la force est dirigée directement vers le corps central, donc dans la même direction que la ligne allant de la masse centrale à l'objet en orbite. L'angle ϕ est donc nul et la somme des moments de force est nulle.

Cela signifie que le moment cinétique est constant partout sur la trajectoire. On a donc

$$L = mrv\sin\psi = \text{constante}$$

On peut donc calculer la valeur de L en prenant n'importe quel point sur l'orbite. On va prendre le point le plus près de la masse centrale.



À ce moment, on a

$$r = r_p$$
$$v = v_p$$
$$\psi = 90°$$

On a alors

$$L = mr_p v_p$$

Si on résume, on a

Moment cinétique d'un objet près d'une masse centrale

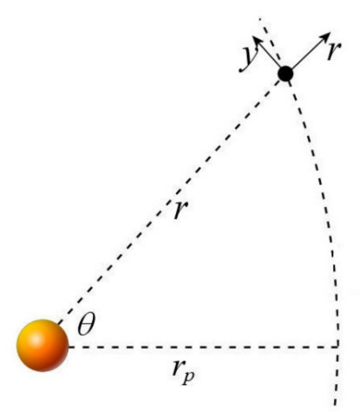
$$L = mvr\sin\psi = mv_p r_p$$

L est une constante

<u>L'équation des forces sur l'objet</u>

Dans son mouvement, la seule force qui agit sur l'objet est la force de gravitation. On a donc

$$-\frac{GM_c m}{r^2}\vec{i} = m\vec{a}$$



(On utilise les axes montrés sur la figure. Ici, on utilise $\vec{i}$ pour le vecteur unitaire dans la direction de l'axe r.)

Pour la composante radiale (dans le sens de l'axe des r), cela donne

$$-\frac{GM_c m}{r^2} = ma_r$$
$$-\frac{GM_c}{r^2} = a_r$$

Une partie de la force va servir à faire l'accélération centripète pour garder le corps à la même distance de la masse centrale. S'il y a plus ou moins de force que la force centripète nécessaire, cet excès ou ce manque de force fera changer la distance *r*. On peut donc écrire l'accélération comme étant

$$a_r = a_c + \frac{d^2r}{dt^2}$$

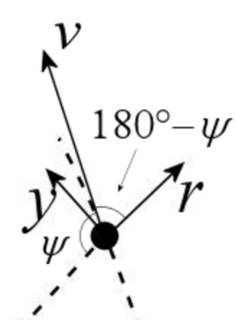
On a donc

$$-\frac{GM_c}{r^2} = a_c + \frac{d^2r}{dt^2}$$

Puisque l'accélération centripète est $-\omega^2 r$, on a

$$-\frac{GM_c}{r^2} = -\omega^2 r + \frac{d^2r}{dt^2}$$

Dans cette équation, le $\omega^2 r$ est en fait lié au moment cinétique.



La composante en *y* de la vitesse est $v_y = v\sin(180° - \psi)$. Mais comme $\sin(180° - \psi) = \sin(\psi)$, la composante en *y* de la vitesse est $v_y = v\sin\psi$. Ainsi, le moment cinétique $mvr\sin\psi$ peut s'écrire sous la forme suivante.

$$L = mrv_y$$

Finalement, puisque $v_y = \omega r$, on peut écrire $L = m\omega r^2$, ce qui nous amène à

$$\omega = \frac{L}{mr^2}$$

En utilisant ce résultat, on peut écrire notre équation de la trajectoire sous la forme suivante.

$$-\frac{GM_c}{r^2} = -\frac{L^2}{m^2r^4}r + \frac{d^2r}{dt^2}$$

$$-\frac{GM_c}{r^2} = -\frac{L^2}{m^2r^3} + \frac{d^2r}{dt^2}$$

À partir de là, il ne reste qu'à faire la solution de cette équation pour obtenir *r* en fonction de θ. Vous pouvez voir ce brassage mathématique dans le document suivant.
http://physique.merici.ca/astro/preuvetrajectoire.pdf

La solution de cette équation est

Forme de la trajectoire pour un objet près d'une masse centrale

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

où e est un facteur appelé *excentricité* qui vaut

Excentricité

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

Les orbites circulaires

Si l'excentricité est nulle, alors la formule de la trajectoire devient

$$r = r_p$$

Cela nous indique que r ne varie pas avec l'angle et que r est une constante. Avec un rayon constant, on a une orbite circulaire.

Pour obtenir une telle excentricité nulle, on doit avoir

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

$$0 = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

$$v_p = \sqrt{\frac{GM_c}{r_p}}$$

L'indice p est bien inutile ici puisqu'avec une orbite circulaire, la distance la plus près de la masse centrale est toujours la même et est égale au rayon de l'orbite. On peut donc écrire.

$$v = \sqrt{\frac{GM_c}{r}}$$

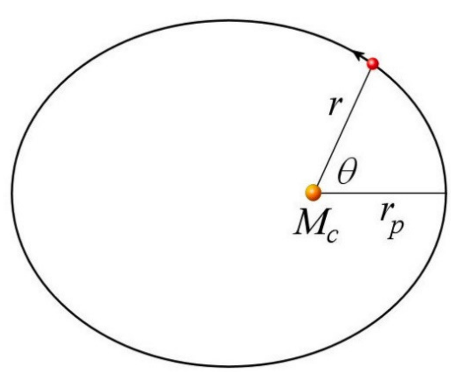
C'est exactement ce qu'on avait obtenu précédemment.

3.4 LES ORBITES ELLIPTIQUES

Quand l'excentricité est entre 0 et 1, la valeur de r change avec l'angle.

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

La trajectoire est alors une ellipse.



Pour obtenir une telle ellipse, la vitesse au point P doit se situer entre deux valeurs. La valeur minimale se trouve avec l'excentricité minimale.

$$e > 0$$

$$\frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 > 0$$

$$v_p > \sqrt{\frac{GM_c}{r_p}}$$

La valeur maximale se trouve avec l'excentricité maximale.

$$e < 1$$

$$\frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 < 1$$

$$v_p < \sqrt{\frac{2GM_c}{r_p}}$$

On a donc une orbite elliptique si la vitesse au point le plus près est entre ces deux valeurs.

$$\sqrt{\frac{GM_c}{r_p}} < v_p < \sqrt{\frac{2GM_c}{r_p}}$$

La première loi de Kepler

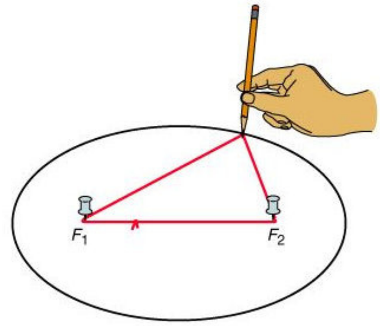
La forme elliptique des orbites a été découverte en 1608 par Johannes Kepler. En 1600, il se lance dans une étude très approfondie de l'orbite de Mars en utilisant les données d'observations de Tycho Brahe, les meilleures faites avant 1600.

Après 8 ans d'études, Kepler arrive à une conclusion révolutionnaire. Alors qu'on pensait depuis près de 20 siècles que les orbites des planètes devaient être des cercles parfaits, sous prétexte que les cieux devaient être parfaits pour refléter la perfection des dieux (ou du Dieu), Kepler montre que les orbites ont une forme elliptique. C'est une véritable révolution en astronomie, mais il faudra près d'un siècle avant que tous soient convaincus de la véracité de cette loi. (Il faut en fait attendre que Newton montre que ces lois sont une des conséquences des lois de Newton et de la loi de la gravitation.)

Première loi de Kepler

Les orbites sont des ellipses. La masse centrale occupe un des foyers.

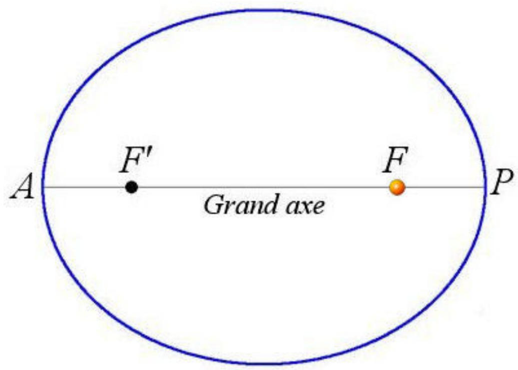
L'ellipse



members.shaw.ca/len92/astronomy.htm

L'ellipse ressemble à un ovale, mais elle est particulière. Pour tracer une ellipse, il suffit de tenir un anneau de corde avec deux punaises plantées dans une planche. On prend alors un crayon et on trace alors la figure délimitée par la corde tendue, comme sur la figure. Les deux foyers de l'ellipse F_1 et F_2 sont les deux endroits où on a planté les punaises.

Cela signifie que l'ellipse est l'ensemble des points dont la somme des distances du point jusqu'à chacun des foyers est constante. L'ellipse est plus ou moins allongée selon la distance entre les punaises et la longueur de la corde. Sur la figure de droite, la masse centrale (l'étoile ou la planète autour de laquelle l'objet est en orbite) est située au foyer F. La ligne qui va d'un côté à l'autre de l'ellipse en passant par les foyers est le grand axe de l'ellipse. Les deux points où l'ellipse et le grand axe se croisent (points A et P) sont les apsides. (Le grand axe est aussi appelé la ligne des apsides ou la ligne apsidiale.) Le point A est le point de l'orbite le plus éloigné de la masse centrale, nommé en général apoapside (on utilise aussi les termes d'apside supérieure ou d'apoapse). Le point P est le point de l'orbite le plus près de la masse centrale et est nommé en général la périapside (on utilise aussi les termes d'apside inférieure ou de périapse).



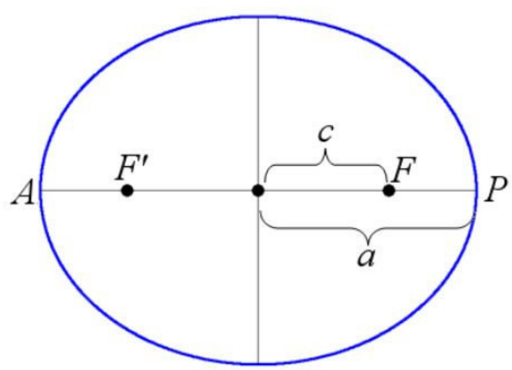
Il existe en fait tout un vocabulaire pour nommer ces points selon l'astre qui joue le rôle de masse centrale. Si l'orbite se fait autour du Soleil, le point le plus près est le périhélie et le point le plus loin est l'aphélie. Si l'orbite se fait autour de la Terre, le point le plus près est le périgée et le point le plus loin est l'apogée.

Masse centrale	Périapside	Apoapside
Soleil	Périhélie	Aphélie
Terre	Périgée	Apogée

L'excentricité

L'excentricité de l'ellipse est définie par le rapport

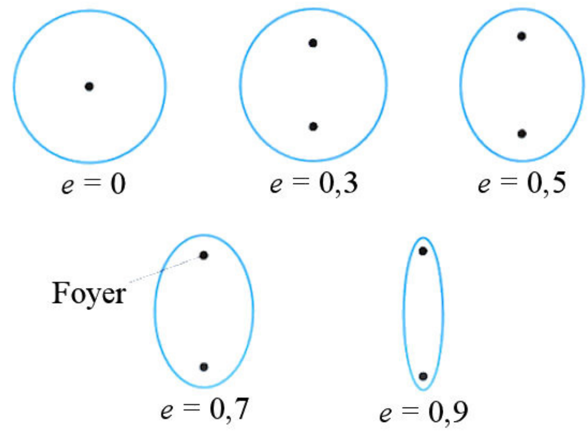
$$e = \frac{FF'}{AP} = \frac{c}{a}$$



où c est la distance entre le centre de l'ellipse et un des foyers et a la distance entre le centre de l'ellipse et une des apsides (il s'agit du demi-grand axe).

Si les deux foyers sont au centre, alors l'excentricité est nulle et on obtient un cercle. Plus l'excentricité est élevée, plus les foyers sont distants l'un de l'autre et plus l'ellipse est allongée.

La valeur de l'excentricité est nécessairement inférieure à 1 puisque les foyers ne seraient pas à l'intérieur de l'ellipse si e était plus grand que 1.



astro.wsu.edu/worthey/astro/html/lec-ellipse.html

Comme on peut le constater avec le tableau suivant, l'excentricité des orbites des planètes du Système solaire est peu élevée.

Planète	Excentricité de l'orbite
Mercure	0,206
Vénus	0,007
Terre	0,017
Mars	0,093
Jupiter	0,048
Saturne	0,056
Uranus	0,047
Neptune	0,009

À l'exception de Mercure, les orbites planétaires ne dévient que très peu d'une forme circulaire. L'excentricité de l'orbite de Mars est relativement élevée et c'est ce qui a permis à Kepler, qui étudiait le mouvement de Mars, de se rendre compte que les orbites sont elliptiques. Ces valeurs d'excentricité sont très petites en comparaison de l'excentricité de l'orbite de certains objets ayant des orbites très allongées telles que des comètes. Par exemple, l'orbite de la comète la plus connue, la comète de Halley, a une excentricité de 0,970.

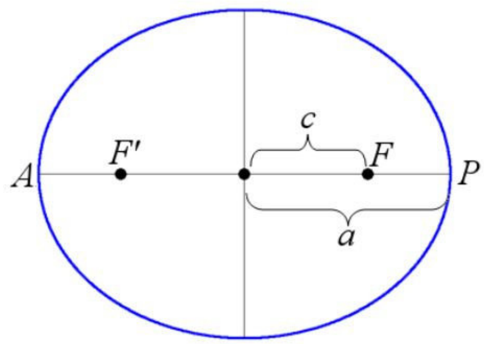
Les distances entre l'objet en orbite et la masse centrale

Les distances à l'apoapside et à la périapside

Nous pouvons maintenant trouver des relations entre les distances à l'apoapside et à la périapside d'une part et l'excentricité et le demi-grand axe de l'ellipse d'autre part. Les distances de l'apoapside et de la périapside en fonction du demi-grand axe a et de l'excentricité e sont

$$\begin{aligned} r_p &= a - c \\ &= a - ea \\ &= a(1-e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_a &= a + c \\ &= a + ea \\ &= a(1+e) \end{aligned}$$



r_p et r_a en fonction de a et e pour une orbite elliptique

$$r_p = a(1-e) \qquad\qquad r_a = a(1+e)$$

Nous pouvons également inverser ces relations précédentes pour obtenir les relations entre le demi-grand axe et l'excentricité en fonction des distances à l'apoapside et à la périapside.

a et e en fonction de r_a et r_p pour une orbite elliptique

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \qquad\qquad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

<u>La distance à n'importe quel endroit sur l'orbite</u>

On a déjà la formule qui donne la position de l'objet en orbite en fonction de l'angle.

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

Puisque $r_p = a(1-e)$, la distance est aussi

$$\begin{aligned} r &= a(1-e)\frac{1+e}{1+e\cos\theta} \\ &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \end{aligned}$$

r en fonction de θ pour une orbite elliptique

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

Exemple 3.4.1

Un petit astre se déplace sur orbite autour du Soleil dont les distances à l'aphélie et au périhélie sont de r_a = 350 millions de km et r_p = 50 millions de km.

a) Quelle est l'excentricité de cette orbite ?

L'excentricité est

$$\begin{aligned} e &= \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \\ &= \frac{3,5\times10^{11}m - 0,5\times10^{11}m}{3,5\times10^{11}m + 0,5\times10^{11}m} \\ &= 0,750 \end{aligned}$$

b) Quel est le demi-grand axe (a) de cette orbite ?

Le demi-grand axe est

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_a + r_p}{2} \\ &= \frac{3,5\times10^{11}m + 0,5\times10^{11}m}{2} \\ &= 2\times10^{11}m \end{aligned}$$

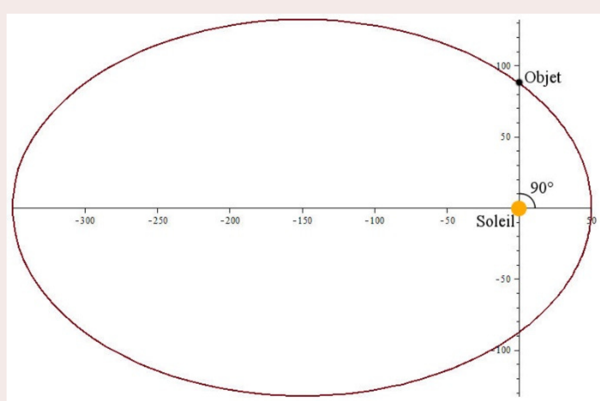
Le demi-grand axe est donc égal à 200 millions de km.

c) Quelle est la distance entre le Soleil et l'objet quand il est à $\theta = 90°$?

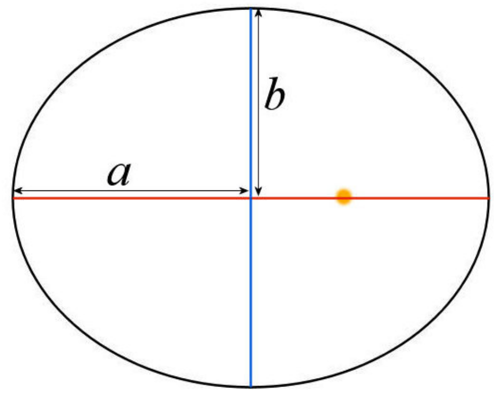
La distance à cette position est

$$\begin{aligned} r &= r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta} \\ &= 5\times10^{10}m \cdot \frac{1+0,75}{1+0,75\cdot\cos(90°)} \\ &= 8,75\times10^{10}m \end{aligned}$$

L'objet est donc à 87,5 millions de km du Soleil.



La formule cartésienne de l'orbite



Vous connaissez probablement mieux l'équation de l'ellipse dans sa forme cartésienne.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

où a est le demi-grand axe et b est le demi-petit axe.

Si vous y tenez, voici la preuve que l'équation obtenue de r en fonction de θ est bel et bien une ellipse et que le e dans cette formule correspond bien à l'excentricité d'une ellipse.
http://physique.merici.ca/astro/ellipsecartesien.pdf

Énergie mécanique de l'objet en orbite

L'énergie mécanique de l'objet qui suit la trajectoire est (on la calcule quand la distance est r_p)

$$E_{mec}=\frac{1}{2}mv_p^2+\frac{-GM_cm}{r_p}$$

Selon la formule de l'excentricité, on a

$$e=\frac{v_p^2r_p}{GM_c}-1$$

On a

$$v_p^2=\frac{GM_c\left(1+e\right)}{r_p}$$

L'énergie devient alors

$$\begin{aligned}E_{mec}&=\frac{1}{2}mv_p^2+\frac{-GM_cm}{r_p}\\&=\frac{1}{2}m\frac{GM_c\left(1+e\right)}{r_p}+\frac{-GM_cm}{r_p}\\&=\left(\frac{1+e}{2}-1\right)\frac{GM_cm}{r_p}\\&=\left(\frac{1+e-2}{2}\right)\frac{GM_cm}{r_p}\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{-1+e}{2}\right)\frac{GM_c m}{r_p}$$
$$=-\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

On peut aussi utiliser $r_p = a(1-e)$ pour obtenir

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2a}$$

On peut donc utiliser ces formules pour calculer l'énergie mécanique.

Énergie mécanique pour une orbite elliptique

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$
$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2a}$$

Exemple 3.4.2

Un petit astre de 100 tonnes se déplace sur orbite autour du Soleil dont le demi-grand axe est a = 200 millions de km et l'excentricité est e = 0,750. Quelle est l'énergie mécanique de cet astre sachant que la masse du Soleil est 1,9885 x 10^{30} kg ?

L'énergie mécanique est

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2a}$$
$$= -\frac{6,6743\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}\,kg\cdot 10^5\,kg}{2\cdot 2\times10^{11}\,m}$$
$$= -3,318\times10^{13}\,J$$

La vitesse orbitale

La vitesse selon la distance r

Il est évident que la vitesse des corps ne peut pas être constante le long d'une orbite elliptique parce que l'énergie mécanique doit être conservée. En effet, pour un objet de masse m en orbite autour d'un autre objet de masse M_c, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_c m}{r}$$

Ainsi, lorsque l'objet en orbite s'approche de la masse centrale, son énergie gravitationnelle diminue et son énergie cinétique doit donc augmenter. La vitesse de la planète doit donc la plus grande à la périapside et la plus petite à l'apoapside.

En utilisant la valeur de l'énergie mécanique obtenue précédemment, on arrive à

$$-\frac{GM_c m}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_c m}{r}$$

Si on isole v dans cette formule, on arrive à la formule suivante qui donne la vitesse n'importe où sur l'orbite.

La vitesse sur une orbite elliptique

$$v^2 = GM_c\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

<u>La vitesse à l'apoapside et à la périapside</u>

À la périapside, $r = a\,(1 - e)$. Ainsi, la vitesse est

$$\begin{aligned} v_p^2 &= GM_c\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2}{1-e} - 1\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2-(1-e)}{1-e}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e} \end{aligned}$$

À l'apoapside, $r = a\,(1 + e)$ et la vitesse est

$$\begin{aligned} v_a^2 &= GM_c\left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2}{1+e} - 1\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2-(1+e)}{1+e}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e} \end{aligned}$$

Vitesse à la périapside et à l'apoapside

$$v_p^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e} \qquad v_a^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}$$

Exemple 3.4.3

Un petit astre se déplace sur orbite autour du Soleil dont le demi-grand axe est $a = 200$ millions de km et l'excentricité est e = 0,750. La masse du Soleil est 1,9885 x 10^{30} kg.

a) Quelle est la vitesse au périhélie ?

La vitesse au périhélie est

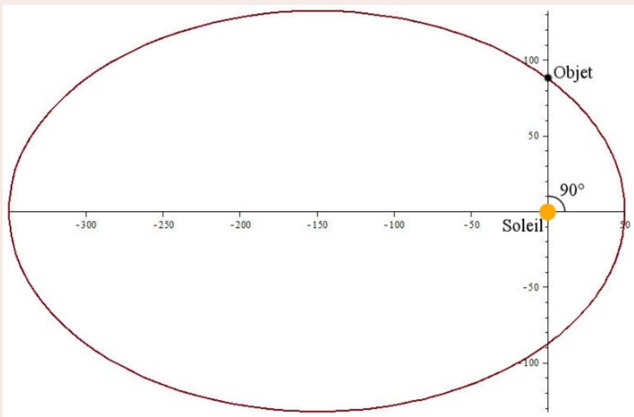
$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,6743\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}\,kg}{2\times10^{11}m}\cdot\frac{1+0,75}{1-0,75}} \\ &= 68,155\,\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

b) Quelle est la vitesse à l'aphélie ?

La vitesse à l'aphélie est

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,6743\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}\,kg}{2\times10^{11}m}\cdot\frac{1-0,75}{1+0,75}} \\ &= 9,736\,\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

c) Quelle est la vitesse de l'objet quand il est à $\theta = 90°$, sachant que la distance entre le Soleil et l'objet à cette position est de 87,5 millions de km ?



La vitesse à cette position est

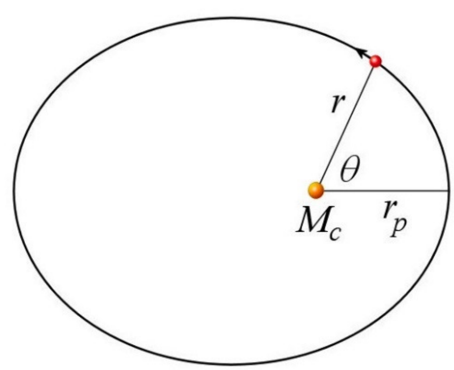
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{GM_c\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)} \\ &= \sqrt{6,6743\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot1,9885\times10^{30}\,kg\cdot\left(\frac{2}{8,75\times10^{10}\,m}-\frac{1}{2\times10^{11}\,m}\right)} \\ &= 48,86\,\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

(Pour voir une autre formule d'excentricité calculée à partir de l'énergie et du moment cinétique, consultez ce document :
http://physique.merici.ca/astro/excentricite.pdf)

La 2e loi de Kepler

Kepler ne pouvait pas se contenter de savoir la forme de l'orbite, il fallait aussi qu'il sache la position en fonction du temps sur cette orbite pour pouvoir calculer la position de la planète à un moment précis.

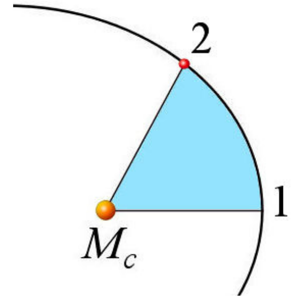
Théoriquement, on peut calculer la position sur l'orbite à partir de la forme de l'orbite et de la vitesse en fonction de la position. Toutefois, Kepler ne connaissait pas les formules de vitesse et, même s'il les avait eues, il n'aurait pas pu calculer le temps, car le calcul demande de faire des intégrales assez difficiles qu'il ne pouvait pas faire puisque le calcul intégral fut inventé près de 40 ans après sa mort. Malgré cela, Kepler est quand même parvenu à donner une loi pour la position sur l'orbite en fonction du temps.



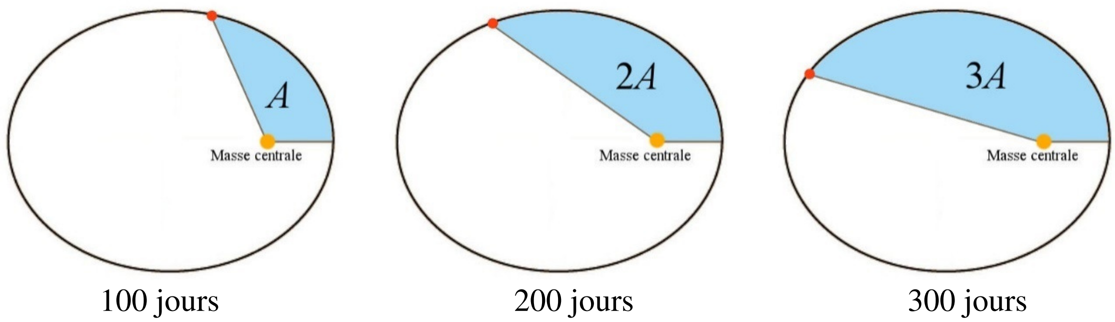
À l'époque de Kepler, toutes les théories du mouvement planétaire prenaient comme point de départ, en postulant que les cieux devaient être parfaits, l'idée que l'angle θ de la planète sur l'orbite devait augmenter à un rythme constant. Même si les positions de planètes calculées ne concordaient pas avec les observations, cette idée ne fut pas rejetée. On inventa plutôt toute sorte d'artifices (en déplaçant le point à partir duquel on mesure l'angle par exemple) pour continuer à utiliser le principe de l'angle qui augmente à rythme constant et obtenir un accord avec les observations. Au départ, Kepler tente de conserver ce principe, mais toutes ses tentatives sont vaines.

Kepler est un homme de son temps. Il est donc convaincu qu'il doit y avoir quelque chose qui augmente à un rythme constant quand la planète se déplace sur l'orbite. Si ce n'est pas un angle, ça doit être autre chose. En 1608, il découvre cette quantité. C'est l'aire balayée qui augmente à rythme constant.

Voyons ce qu'« aire balayée » signifie. Si l'objet passe de la périapside (position 1) à une certaine position sur l'orbite, l'aire balayée est l'aire de la région délimitée par la trajectoire, une ligne qui va de la masse centrale à la position 1 et une autre ligne qui va de la masse centrale à la position 2 (figure de droite).



La 2e loi de Kepler spécifie donc que cette aire augmente à rythme constant à mesure que la planète se déplace sur l'orbite. Cela signifie, par exemple, que si la planète balaie une aire *A* en 100 jours, elle aura balayé 2*A* en 200 jours, 3*A* en 300 jours et ainsi de suite.

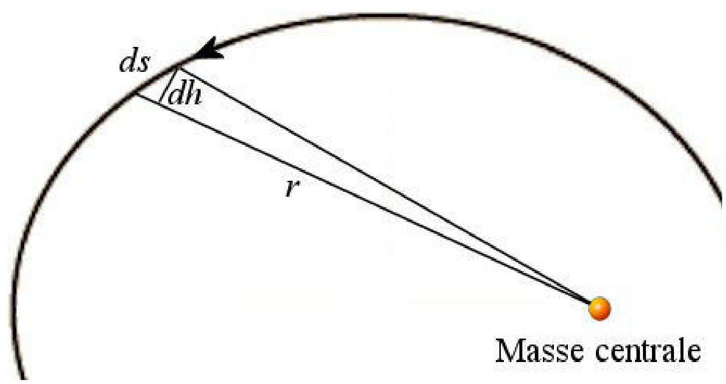


La 2e loi de Kepler dit donc que

$$A = (constante) \cdot t$$

où la constante est le rythme d'augmentation de l'aire (qui est *dA/dt*).

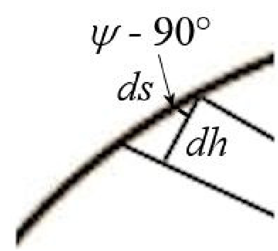
Pour prouver cette loi et obtenir la valeur de la constante, calculons l'aire balayée entre deux positions très près l'une de l'autre. On va donc prendre deux points sur la trajectoire qui sont à une distance *ds* l'un de l'autre.



L'aire balayée est alors un triangle dont la hauteur est *dh*.

Comme ψ est l'angle entre la vitesse (la trajectoire) et la distance *r*, la hauteur de ce triangle est

$$\begin{aligned} dh &= ds \cdot \cos(\psi - 90°) \\ &= ds \cdot \sin(\psi) \end{aligned}$$



L'aire du triangle alors

$$\begin{aligned} dA &= \frac{base \cdot hauteur}{2} \\ &= \frac{rdh}{2} \\ &= \frac{rds\sin\psi}{2} \end{aligned}$$

On a donc, puisque $ds/dt = v$,

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{rds\sin\psi}{2dt} \\ &= \frac{rv\sin\psi}{2} \end{aligned}$$

Or, le moment cinétique est $mrv\sin\psi = L$. On peut donc écrire

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Le terme de droite est une constante (puisque le moment cinétique est constant sur une orbite). Ce résultat confirme que l'aire augmente à un rythme constant, tel que spécifié par la 2e loi de Kepler. (Cela montre aussi que la 2e loi de Kepler est une conséquence directe de la conservation du moment cinétique.)

Puisque $L = mv_p r_p$, on peut écrire la 2e loi de Kepler sous cette forme

2e loi de Kepler

$$A = \frac{r_p v_p}{2} t$$

Il ne reste qu'un problème. Pour trouver la position de la planète sur l'orbite avec la 2e loi de Kepler, on doit connaitre l'aire de la partie de l'ellipse balayée. Les mathématiciens ont fait ce calcul. L'aire de la section d'ellipse montrée sur la figure est

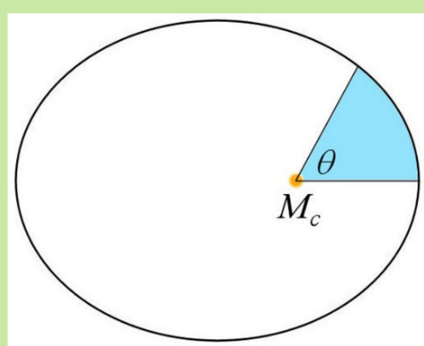
Aire d'une partie d'ellipse

$$A = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1-e^2} \left(E - e\sin E\right)$$

où E est l'anomalie excentrique donnée par

$$E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\frac{\theta}{2}\right)$$

Dans ces formules, l'angle E doit être en radians.



Pour voir la preuve de cette formule, vous pouvez consulter ce document.
http://physique.merici.ca/astro/airesectionellipse.pdf

La période

On peut trouver la période avec la deuxième loi de Kepler. En une période, on balaie l'ellipse au complet. Comme l'aire de l'ellipse est

$$A = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

la 2e loi de Kepler nous donne

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{r_p v_p}{2} T$$

En utilisant les formules de r_p et v_p de trouvées précédemment

$$r_p = a(1-e)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{GM_c(1+e)}{a(1-e)}}$$

on arrive à

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} a(1-e)\sqrt{\frac{GM_c(1+e)}{a(1-e)}} T$$

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{GM_c a(1-e)(1+e)}}{2} T$$

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{GM_c a(1-e^2)}}{2} T$$

$$\pi a^2 = \frac{\sqrt{GM_c a}}{2} T$$

Ce qui donne

Période pour une orbite elliptique (3e loi de Kepler)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$

C'est exactement la même formule que celle du mouvement circulaire dans laquelle *r* est remplacé par *a*.

Cette loi, appelée la troisième loi de Kepler, a été découverte en 1619 par Johannes Kepler. À cette époque, la loi disait simplement que le rapport a^3/T^2 est une constante pour tous les objets tournant autour du Soleil. Il en est ainsi parce que

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_c}{4\pi^2}$$

Pour tous les objets tournant autour du Soleil, le terme de droite est une constante. Newton trouva la forme complète de la loi en 1687.

Exemple 3.4.4

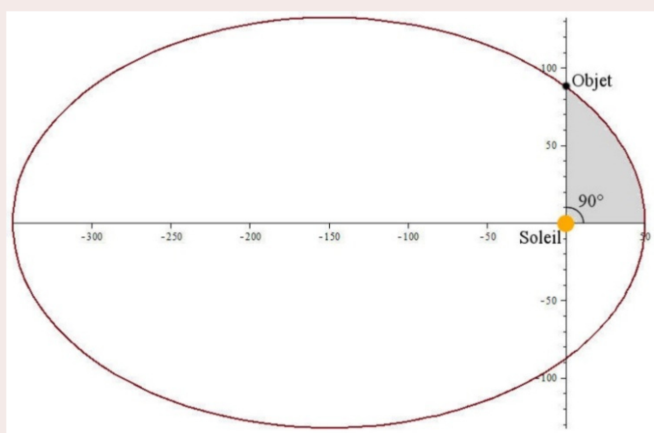
Un petit astre se déplace sur orbite autour du Soleil dont le demi-grand axe est $a = 200$ millions de km et l'excentricité est $e = 0{,}750$. La masse du Soleil est $1{,}9885 \times 10^{30}$ kg.

a) Quelle est la période de cet astre ?

La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}} \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\left(2\times10^{11}m\right)^3}{6{,}6743\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1{,}9885\times10^{30}kg}} \\ &= 4{,}878\times10^7 s \\ &= 564{,}61 j \end{aligned}$$

b) Combien faut-il de temps pour que l'objet passe du périhélie à $\theta = 90°$?



On trouve le temps avec la deuxième loi de Kepler.

$$A = \frac{r_p v_p}{2} t$$

Mais pour trouver ce temps, il nous faut l'aire de la partie en gris sur la figure.

Pour cette région, on a

$$E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{0,25}{1,75}} \cdot \tan\frac{90°}{2}\right)$$
$$= 0,7227 rad$$

L'aire est donc

$$A = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\left(E - e\sin E\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(2\times10^{11}m\right)^2\cdot\sqrt{1-\left(0,75\right)^2}\cdot\left(0,7227 - 0,75\cdot\sin 0,7227\right)$$
$$= 2,9984\times10^{21}m²$$

En utilisant les valeurs trouvées dans les exemples précédents (r_p = 5 x 10^{11} m et v_p = 68 155 m/s), on trouve finalement que le temps est

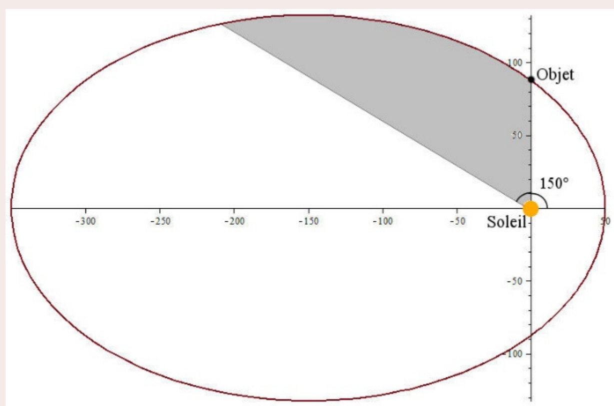
$$A = \frac{r_p v_p}{2}t$$
$$2,9984\times10^{21}m^2 = \frac{5\times10^{10}m\cdot 68\,155\,\frac{m}{s}}{2}\cdot t$$
$$2,9984\times10^{21}m^2 = 1,7039\times10^{15}\,\frac{m²}{s}\cdot t$$
$$t = 1,7597\times10^6 s$$
$$t = 20,37\,j$$

c) Combien faut-il de temps pour que l'objet passe de θ = 90° à θ = 150° ?

On trouve le temps avec la deuxième loi de Kepler.

$$A = \frac{r_p v_p}{2}t$$

Mais pour trouver ce temps, il nous faut l'aire de la partie en gris sur la figure. Pour calculer l'aire de cette région, on va soustraire l'aire entre le périhélie et 90° à l'aire entre le périhélie et 150°.



Pour l'aire entre le périhélie et 150°, on a

$$E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{0,25}{1,75}}\cdot\tan\frac{150°}{2}\right)$$

$$=1,9082 rad$$

L'aire de 0° à 150° est donc

$$\begin{aligned}A_{150} &= \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\left(E - e\sin E\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(2\times 10^{11}m\right)^2\cdot\sqrt{1-\left(0,75\right)^2}\cdot\left(1,9202-0,75\cdot\sin 1,9082\right)\\ &= 1,5881\times 10^{22}m^2\end{aligned}$$

Précédemment (question b), on a trouvé l'aire de 0° et 90°

$$A_{90} = 2,9984\times 10^{21}m^2$$

L'aire de 90° et 150° est donc

$$\begin{aligned}A &= A_{150} - A_{90}\\ &= 1,5881\times 10^{22}m^2 - 2,9984\times 10^{21}m^2\\ &= 1,2883\times 10^{22}m^2\end{aligned}$$

En utilisant les valeurs trouvées dans les exemples précédents (r_p = 5 x 10[11] m et v_p = 68 351 m/s) on trouve finalement que le temps est

$$A = \frac{r_p v_p}{2}t$$

$$1,2883\times 10^{22}m^2 = \frac{5\times 10^{10}m\cdot 68\,155\frac{m}{s}}{2}\cdot t$$

$$t = 7,5608\times 10^6 s$$

$$t = 87,51 j$$

3.5 L'ORBITE DE LA TERRE AUTOUR DU SOLEIL

La Terre tourne autour du Soleil en suivant une orbite elliptique. Le demi-grand axe de l'orbite est 149 597 870,7 km. Cette distance porte le nom d'*unité astronomique.*

L'unité astronomique = demi-grand axe de l'orbite de la Terre

$$1UA = 1,495\,978\,707\times 10^{11}m$$

Après bien des années de controverses concernant la valeur exacte de cette unité, on a donné cette valeur à l'unité astronomique lors de la 28e assemblée générale de l'union astronomique internationale en aout 2012. Pour les calculs, on va prendre 1,496 x 10^{11} m.

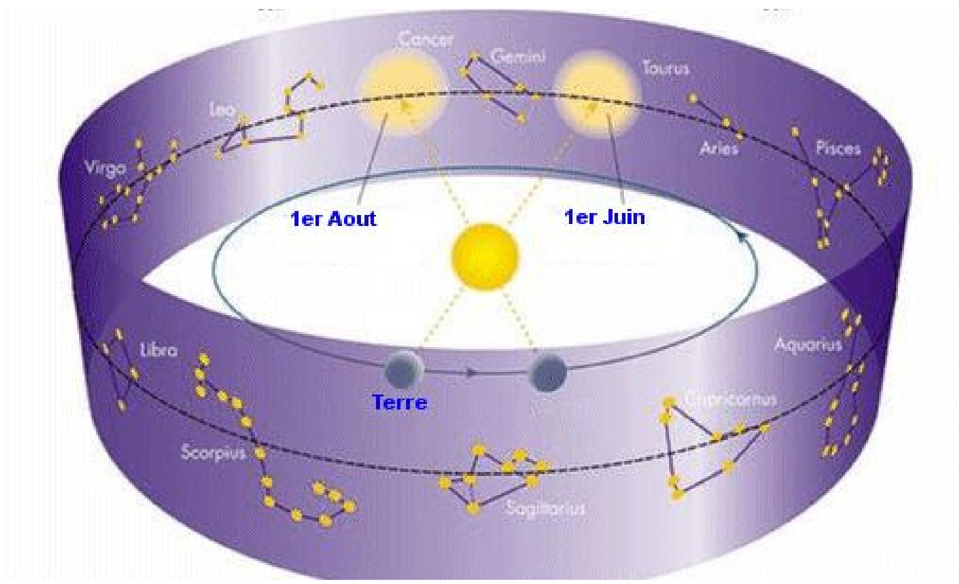
Aujourd'hui, on mesure cette distance à l'aide de radar. En mesurant le temps que prend l'onde pour aller et revenir au Soleil (environ 16 minutes), on peut facilement trouver, avec la vitesse de la lumière, la distance du Soleil.

On verra dans des chapitres ultérieurs comment on a mesuré la distance entre la Terre et le Soleil avant qu'on ne puisse utiliser les ondes radars. On verra alors que ç'a été un véritable défi de déterminer la valeur de l'unité astronomique.

L'excentricité de l'orbite de la Terre est

$$e = 0{,}01671$$

On peut aussi connaitre le temps que prend la Terre pour faire le tour du Soleil puisque le mouvement du Soleil par rapport aux étoiles dans le ciel est dû au mouvement de la Terre autour du Soleil. C'est ce que vous montre la figure suivante.



www.louisg.net/astronomie.htm

On peut voir sur cette figure que le 1er juin, le Soleil est devant la constellation du Taureau. Le déplacement de la Terre sur son orbite change alors l'alignement entre les étoiles et le Soleil. Ainsi, le 1er aout, on voit maintenant le Soleil devant la constellation du Cancer. Ce n'est donc pas le Soleil qui a changé de place, c'est plutôt le mouvement de la Terre autour du Soleil qui a changé l'alignement entre la Terre, le Soleil et les étoiles.

Le temps que prend la Terre pour faire le tour du Soleil est donc identique au temps que prend le Soleil pour faire un tour complet par rapport aux étoiles tel que vu de la Terre. Ce temps est l'année sidérale.

$$1a_{sid} = 31\,558\,149{,}8s$$
$$1a_{sid} = 365{,}2565654\,j$$
$$1a_{sid} = 365\,j\ 6h\ 9m\ 9{,}8s$$

La masse du Soleil

On peut facilement déterminer la valeur de la masse centrale avec la formule de la période.

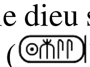
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$

Ainsi, on peut trouver la masse du Soleil (qui est la masse centrale dans ce cas) avec la période et le demi-grand axe de l'orbite de la Terre autour du Soleil. On a alors

$$31\,558\,149 s = 2\pi\sqrt{\frac{\left(1,495978707\times10^{11} m\right)^3}{6,6743\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} M_\odot}}$$

Si on isole la masse, on arrive à

$$1M_\odot = 1,9885\times10^{30} kg$$

Remarquez le symbole utilisé en astronomie pour représenter le Soleil : ⊙. Ce symbole vient du hiéroglyphe égyptien pour Ra, le dieu soleil. Par exemple, on retrouve ce symbole dans le hiéroglyphe de Ramsès le grand ().

Notez que pendant plus d'un siècle après la découverte des lois de Newton, on ne pouvait pas connaitre la masse du Soleil, car la valeur de *G* ne fut trouvée qu'en 1798 par Henry Cavendish. On pouvait quand même faire des calculs avec la loi de la gravitation, car on connaissait la valeur de $GM_\odot$.

L'incertitude sur la masse du Soleil (qui est de 0,000 09 x 10^{30} kg) vient essentiellement de l'incertitude sur *G*. En fait, on connait la valeur de $GM_\odot$ avec beaucoup plus de précision.

L'orbite de la Terre

Exemple 3.5.1

Quelles sont les distances entre la Terre et le Soleil au périhélie et à l'aphélie ?

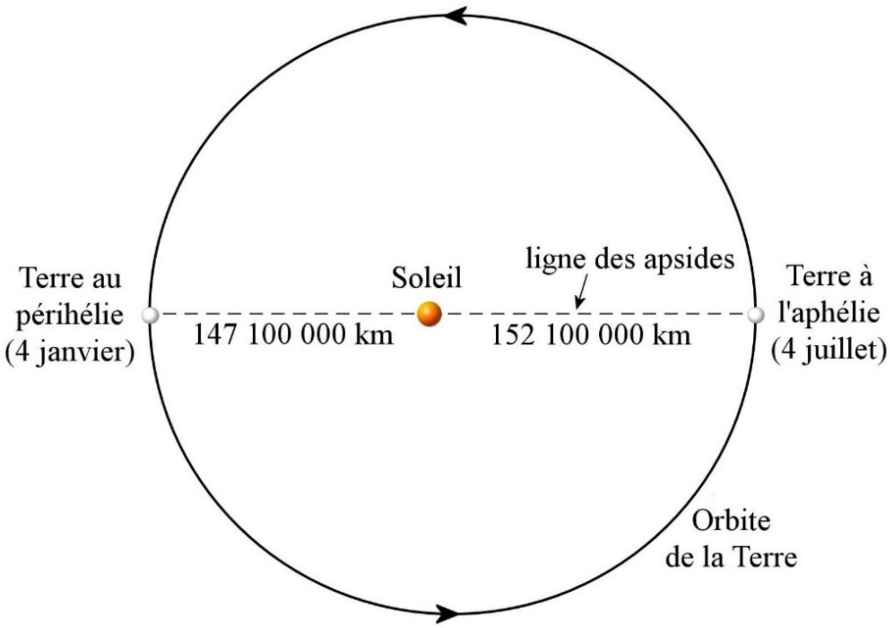
Au périhélie, la distance est

$$\begin{aligned} r_p &= a(1-e) \\ &= 149\,597\,871 km \cdot (1-0,01671) \\ &= 147\,098\,091 km \end{aligned}$$

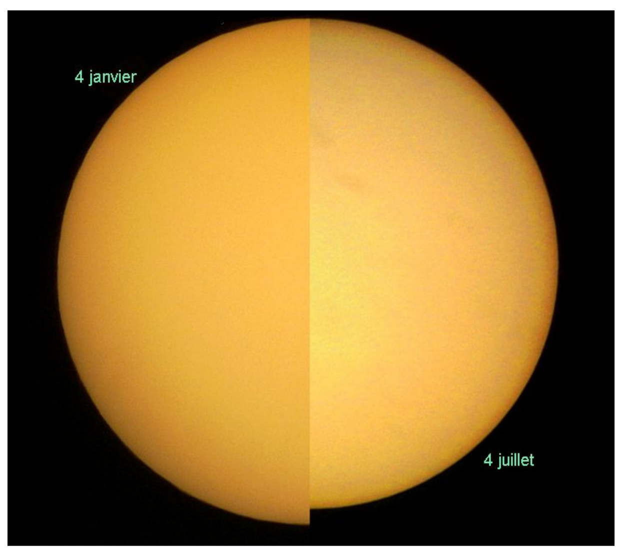
À l'aphélie, la distance est

$$
\begin{aligned}
r_a &= a(1+e) \\
&= 149\,597\,871 km \cdot (1+0,01671) \\
&= 152\,097\,651 km
\end{aligned}
$$

La figure suivante donne les distances et le moment de l'année quand la Terre est au périhélie et à l'aphélie. (L'excentricité est exagérée sur l'image.)



Ce changement de distance entre le Soleil et la Terre s'accompagne aussi d'un changement de grosseur apparente du Soleil. Le Soleil semble le plus gros le 4 janvier puisqu'il est plus près et il semble être le plus petit le 4 juillet parce qu'il est plus loin.



www.physics.smu.edu/jcotton/ph1311/prolog2.htm

Exemple 3.5.2

Quelles sont les vitesses angulaires (en degrés par jour) de la Terre au périhélie et à l'aphélie ? (Prenez 1,496 x 10^{11} m pour *a*.)

Périhélie

La vitesse est

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,6743\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}kg}{1,496\times10^{11}m}\cdot\frac{1+0,01671}{1-0,01671}} \\ &= 30\,287\,\tfrac{m}{s} = 30,287\,\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse angulaire est

$$\begin{aligned} \omega_p &= \frac{v_p}{r_p} \\ &= \frac{30\,287\,\frac{m}{s}}{1,471\times10^{11}m} \\ &= 2,0589\times10^{-7}\,\tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

En degrés par jour, on obtient

$$\begin{aligned} \omega_p &= 2,0589\times10^{-7}\,\tfrac{rad}{s}\cdot\frac{360°}{2\pi rad}\cdot\frac{24\cdot60\cdot60s}{1j} \\ &= 1,019°/j \end{aligned}$$

Aphélie

La vitesse est

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,6743\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}kg}{1,496\times10^{11}m}\cdot\frac{1-0,01671}{1+0,01671}} \\ &= 29\,292\,\tfrac{m}{s} = 29,292\,\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse angulaire est

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{v_a}{r_a} \\ &= \frac{29292\,\frac{m}{s}}{1,521\times10^{11}m} \\ &= 1,9258\times10^{-7}\,\tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

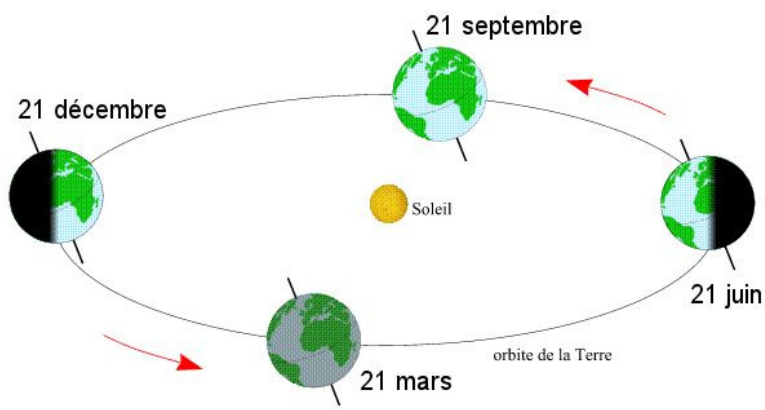
En degrés par jour, on obtient

$$\omega_a = 1{,}9258\times 10^{-7}\,\tfrac{rad}{s}\cdot\frac{360°}{2\pi rad}\cdot\frac{24\cdot 60\cdot 60s}{1j}$$
$$= 0{,}9533°/j$$

3.6 LES SAISONS

On peut parfois lire que les saisons sont dues à la variation de la distance entre la Terre et le Soleil. L'été serait chaud parce que le Soleil serait plus près durant l'été alors que l'hiver serait froid parce que le Soleil serait alors plus loin de la Terre. Non seulement c'est faux, mais c'est le contraire qui se produit puisque la distance entre le Soleil et la Terre atteint sa valeur minimale le 4 janvier, pratiquement au début de l'hiver, et sa valeur maximale le 4 juillet, pratiquement au début de l'été.

Les saisons sont plutôt dues à l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre par rapport à l'axe de rotation de la Terre autour du Soleil.



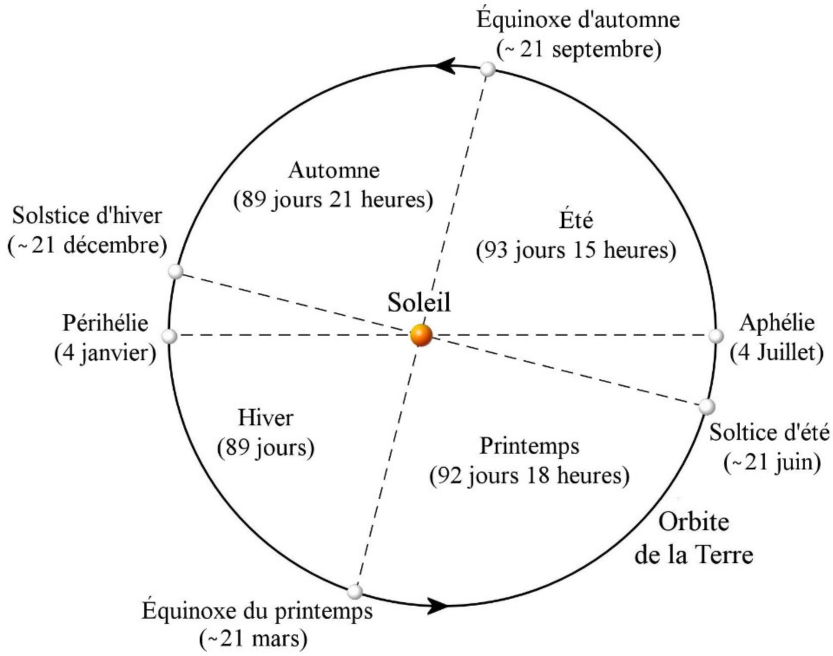
media4.obspm.fr/public/AMC/pages_saisons/definition-saisons_impression.html

Avec l'inclinaison de la Terre, on voit que l'hémisphère nord reçoit beaucoup de lumière et de chaleur du Soleil le 21 juin, alors que l'hémisphère sud en reçoit peu. À cette date, c'est donc l'été dans l'hémisphère nord et l'hiver dans l'hémisphère sud.

On voit aussi que l'hémisphère nord reçoit peu de lumière et de chaleur du Soleil alors que l'hémisphère sud en reçoit beaucoup le 21 décembre. À cette date, c'est donc l'hiver dans l'hémisphère nord et l'été dans l'hémisphère sud.

Variations de la durée des saisons

La vitesse de la Terre sur son orbite n'étant pas constante, le temps qui s'écoule pendant une saison n'est pas toujours le même. L'image suivante vous donne la durée des saisons dans l'hémisphère nord, de même que la position de la Terre sur l'orbite lors des équinoxes et des solstices. On remarque que l'hiver est la saison la plus courte et l'été la plus longue. Dans l'hémisphère sud, c'est le contraire.

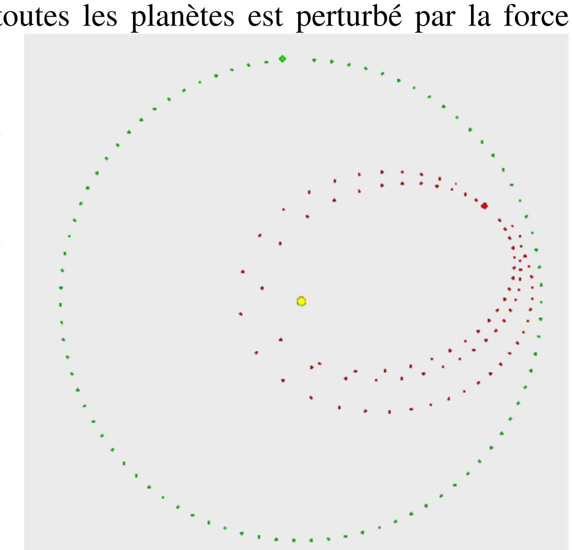


3.7 LES PERTURBATIONS

Que sont les perturbations ?

La forme des orbites est plus complexe que ce qui a été vu précédemment. En réalité, les orbites ne sont presque jamais des ellipses parfaites. S'il n'y avait que deux astres dans l'univers, alors les orbites seraient des ellipses parfaites. Dès qu'il y a plusieurs objets, les perturbations faites par les autres objets modifient lentement les trajectoires des astres qui passent à proximité.

Dans le système solaire, le mouvement de toutes les planètes est perturbé par la force gravitationnelle exercée par les autres planètes. Notons que plus une planète est légère, plus il est facile de la dévier de sa trajectoire. Les comètes et les astéroïdes étant des objets relativement légers, il arrive très souvent que leurs orbites elliptiques soient modifiées, spécialement si elles passent près d'une planète massive comme Jupiter.



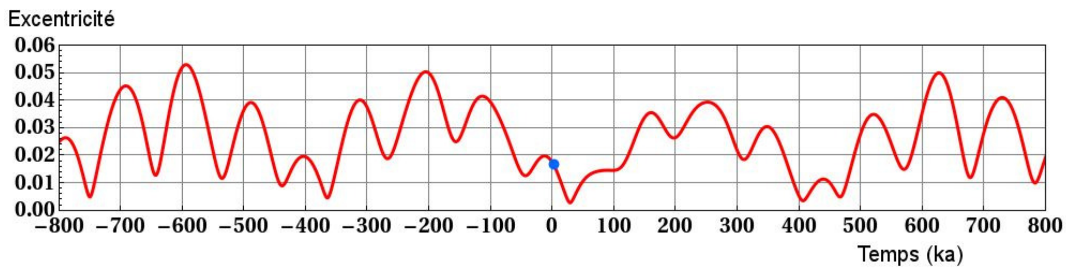
On peut voir sur cette figure les modifications faites (sur une période de 50 ans) à l'orbite d'un astéroïde (en rouge) qui vient passer trop près de Jupiter (en vert).

Effets sur l'orbite de la Terre

L'orbite de la Terre autour du Soleil est également affectée par les perturbations des autres planètes. Voyons comment ces perturbations modifient l'orbite de la Terre.

Variation de l'excentricité

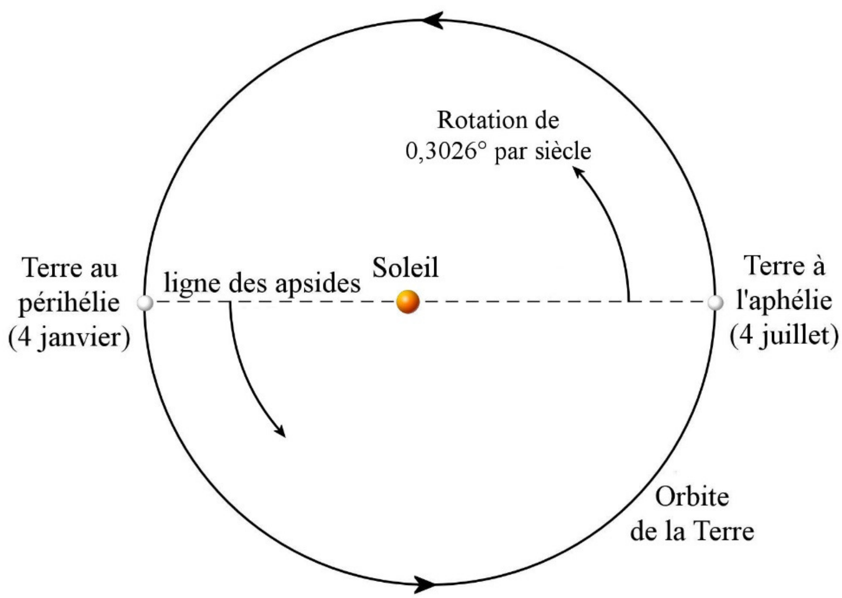
L'excentricité actuelle de l'orbite de la Terre est de 0,017. Toutefois, les perturbations font varier cette valeur entre 0,005 et 0,058. Le graphique suivant montre les variations de l'excentricité au cours du temps.



en.wikipedia.org/wiki/User:Incredio/Drafts

Déplacement du périhélie

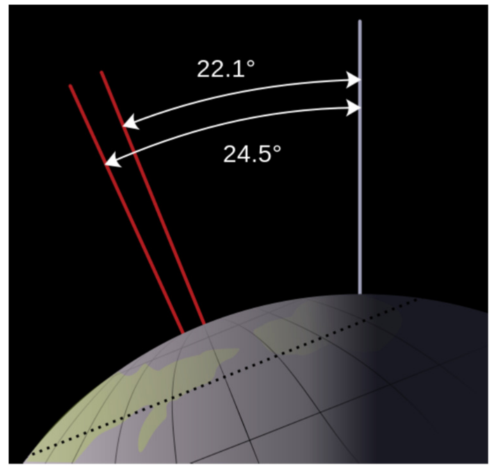
Les perturbations font également tourner le grand axe de l'orbite terrestre (ligne des apsides sur la figure) dans l'espace, mais d'à peine 0,30264° par siècle dans la même direction que la rotation de la Terre autour du Soleil.



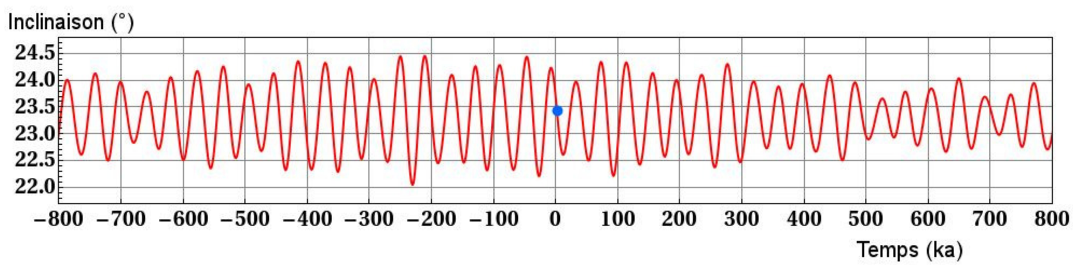
Le temps entre les passages de la Terre au périhélie s'appelle l'année anomalistique. Cette année a une durée de 365,259 636 jours (en 2000). Elle est donc un peu plus longue que l'année sidérale (qui est le temps que prend la Terre pour faire le tour du Soleil) qui vaut 365,256 565 4 jours. C'est normal qu'elle soit plus longue, car le périhélie se déplace dans le même sens que la Terre sur l'orbite. La Terre doit donc rattraper le périhélie, ce qui augmente le temps. À ce rythme, il faudra près de 118 950 ans avant que le grand axe de l'ellipse de la Terre fasse une révolution complète.

Variation de l'orientation de l'axe de la Terre

Les perturbations modifient aussi un peu l'inclinaison de l'axe de la Terre par rapport au plan de l'orbite terrestre de sorte que l'angle d'inclinaison peut varier entre 22,1° et 24,5°. En ce moment, cet angle est de 23,45°. Sur le graphique, on peut voir les variations d'inclinaison au cours du temps.



wikipedia.qwika.com/en2fr/Milankovitch_cycles



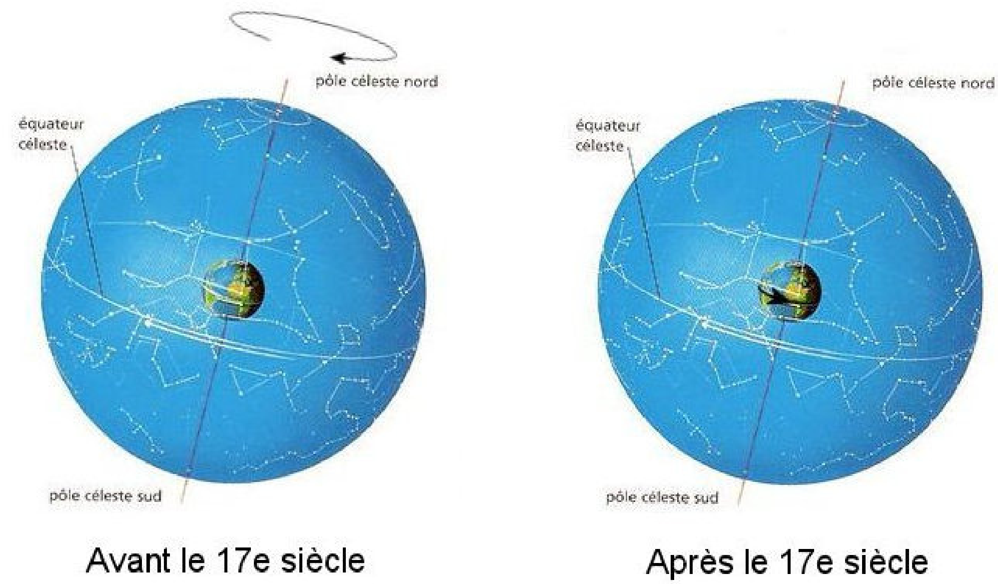
en.wikipedia.org/wiki/User:Incredio/Drafts

Notez que la présence de la Lune stabilise grandement l'orientation de l'axe terrestre. Sans la Lune, les variations pourraient être beaucoup plus importantes et elle pourrait même atteindre 180° !

3.8 LA ROTATION DE LA TERRE SUR ELLE-MÊME

Le jour sidéral

On se rappelle qu'on voit les étoiles tourner autour de la Terre avec une période de 23 heures 56 minutes et 4 secondes. Avant Newton, on pensait généralement que c'était la sphère céleste qui tournait autour de la Terre. Maintenant, on sait que ce n'est pas le ciel qui tourne autour de la Terre, c'est plutôt la Terre qui tourne sur elle-même en 23 h 56 min 4 s alors que les étoiles restent fixes.



en.quetes.free.fr/archives/la_mer/articles/florent_lamerlenord.htm

L'effet est exactement le même. Il y a eu quelques penseurs qui ont proposé que la Terre tourne sur elle-même bien avant que cette idée ne soit acceptée. Pensons principalement à Héraclite du Pont (4e siècle av. J.-C.), Aristarque de Samos (3e siècle av. J.-C.), Âryabhata (5e siècle), quelques savants Arabes autour de l'an 1000, Jean Buridan et Nicolas Oresme (14e siècle) et Galilée (début de 17e siècle). On dit même qu'après sa condamnation par l'inquisition en 1632, Galilée aurait dit « Et pourtant, elle tourne » en faisant référence à la rotation de la Terre sur elle-même. Il est cependant peu probable que Galilée ait dit une telle chose devant les inquisiteurs parce qu'elle aurait entrainé de fâcheuses conséquences.

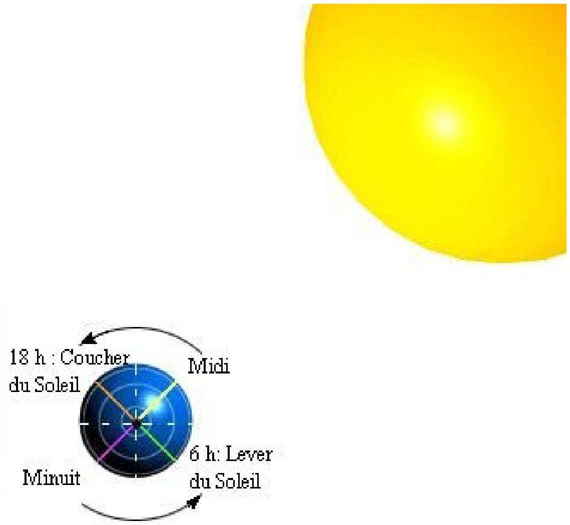
Avec la publication des lois de Newton en 1687, il n'y avait plus de place pour le doute. Non seulement la rotation de la Terre devenait possible, mais la rotation des étoiles autour de la Terre devenait impossible. Une étoile qui fait un mouvement circulaire autour de la Terre avec une période de près de 24 heures devrait subir une force centripète considérable dirigée vers la Terre. La force de gravitation de la Terre était beaucoup trop petite par rapport à cette force, on ne pouvait expliquer l'origine de la force centripète qui aurait permis cette rotation des étoiles.

Tout cela signifie que la Terre tourne sur elle-même avec une période égale au jour sidéral. La période de rotation de la Terre sur elle-même est donc de

$$23\text{ h }56\text{ min }4\text{ s} = 86\,164\text{ s}$$

Le jour solaire

C'est la rotation de la Terre sur elle-même qui est responsable de l'alternance entre le jour et la nuit parce qu'on passe alternativement du côté de la Terre éclairé par le Soleil au côté qui n'est pas éclairé par le Soleil.



academic.brooklyn.cuny.edu/geology/leveson/core/linksa/findlong.html

L'orientation de la Terre par rapport au Soleil détermine quelle heure il est à l'endroit où vous êtes sur Terre. Premièrement, on définit *midi* comme étant l'heure de tous les endroits se situant sur le méridien qui est dirigé vers le Soleil (méridien en jaune).

Il est 18 heures pour tous les endroits qui se trouvent sur le méridien en orange. À partir de ce moment, on ne peut plus voir le Soleil et c'est la nuit qui commence.

Il est minuit pour tous les endroits qui se trouvent sur le méridien opposé au Soleil (méridien en mauve).

Il est 6 h pour tous les endroits qui se trouvent sur le méridien en vert. À partir de ce moment, on commence à voir le Soleil et le jour commence.

On remarque alors facilement que l'heure est différente selon l'endroit où vous êtes sur Terre. Quand il est midi à Québec, il est minuit à Jakarta (Indonésie), qui est presque exactement sur le méridien opposé au nôtre, alors qu'il est 18 h à Budapest (Hongrie) et 6 h sur l'ile de Kaua'i (Hawai'i). C'est le fameux décalage horaire.

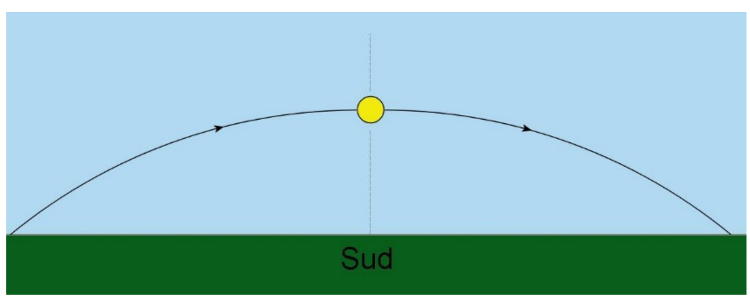
Avec la rotation de la Terre, on passe successivement par les endroits où il est midi, 18 h et minuit et 6 h pour ensuite revenir directement en ligne avec le Soleil 24 heures plus tard.

Ce cycle se répète toutes les 24 heures. Cette période est le jour solaire. La durée du jour solaire est donc de

$$24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$$

(Note : En fait, 24 heures est une moyenne, car il y a de petites variations durant l'année.)

Vu de la Terre, la rotation de la Terre donne l'impression que le Soleil se déplace dans le ciel. Dans l'hémisphère nord, on a l'impression que le Soleil se déplace de l'est vers l'ouest durant la journée.



À midi, le Soleil est alors vers le sud (du moins, pour un observateur dans l'hémisphère nord). (Le Soleil est rarement exactement vers le sud à midi, il y a de minimes variations durant l'année parce que l'orbite de la Terre est elliptique, en plus d'un décalage selon notre position dans notre fuseau horaire et d'un décalage supplémentaire d'une heure en été avec l'heure avancée.)

Pendant longtemps, on a cru que tout ceci était dû à la rotation du Soleil autour de la Terre avec une période de 24 heures. On sait maintenant que ce changement est plutôt dû à la rotation de la Terre sur elle-même alors que le Soleil reste en place.

Différence entre jour solaire et jour sidéral

Pourquoi y a-t-il une différence entre le jour solaire et le jour sidéral ? Allons-y premièrement avec les définitions exactes de chacun de ces éléments.

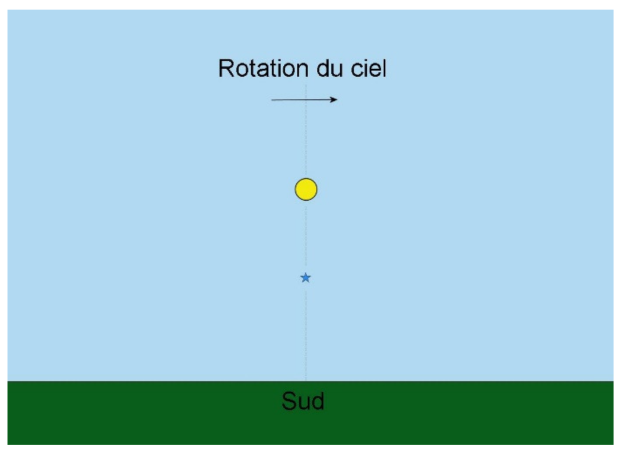
Jour solaire (24 heures).

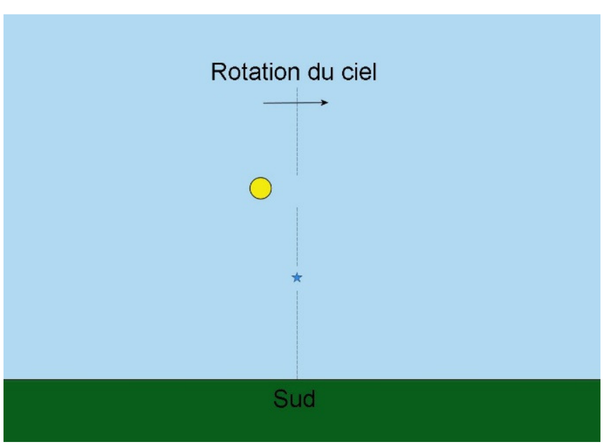
> Temps pour que le Soleil revienne dans la même direction vue de la surface de la Terre.

Jour sidéral (23 heures 56 minutes et 4 secondes)

> Temps pour qu'une étoile revienne dans la même direction vue de la surface de la Terre. (D'ailleurs, sidéral vient de *sidus* qui signifie étoile en latin.)

Prenons une direction précise pour illustrer. Supposons qu'à un certain moment le Soleil et une étoile (qu'on ne pourrait pas voir puisque c'est le jour, mais supposons qu'on peut la voir) sont directement vers le sud pour un observateur sur Terre. Quand le Soleil est ainsi directement vers le sud, il est midi. (Supposons qu'il n'y a pas tous ces petits décalages qui font que le Soleil est rarement directement vers le sud à midi.)

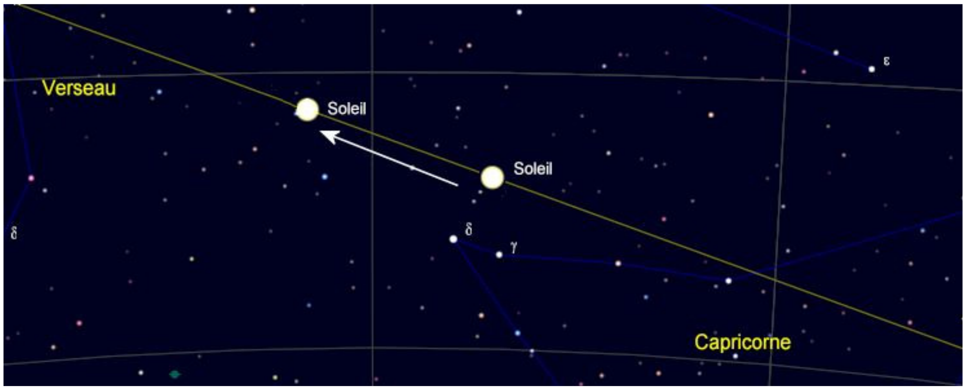




Avec la rotation de la Terre, l'étoile et le Soleil se déplaceront dans le ciel pour revenir directement au sud une journée plus tard. Regardons la situation 23 heures 56 minutes et 4 secondes plus tard (figure de gauche).

À ce moment, l'étoile est revenue exactement dans la même direction. Puisque l'étoile est revenue dans la même direction, un jour sidéral s'est écoulé.

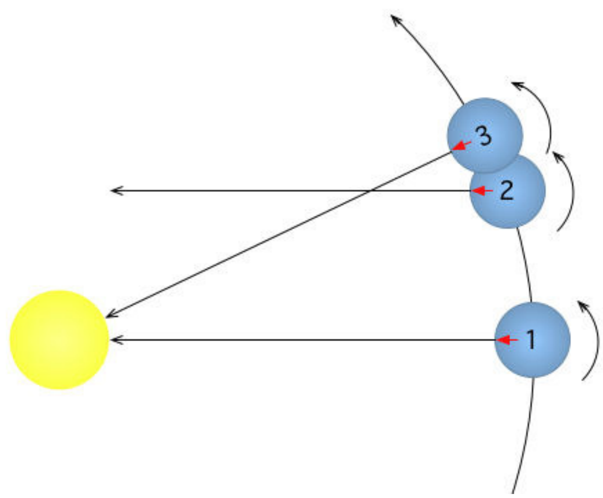
Par contre, le Soleil n'est pas exactement revenu vers le sud parce qu'on a vu au chapitre 2 que le Soleil se déplace un peu chaque jour par rapport aux étoiles.



Fait avec le programme *Cartes du ciel*

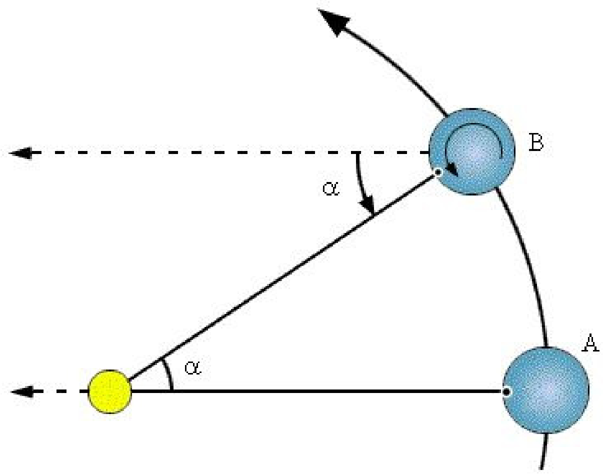
Le Soleil s'est déplacé vers la gauche (pour un observateur de l'hémisphère nord) de près de 1° en un jour par rapport aux étoiles. (Il peut aussi y avoir un léger déplacement vers le haut ou vers le bas par rapport à la position du jour précédent. Ainsi, le Soleil monte un peu chaque jour pendant l'hiver et le printemps et baisse un peu chaque jour pendant l'été et l'automne). Il faudra donc un peu plus de temps pour que le Soleil revienne directement vers le sud. Le temps supplémentaire est de 3 minutes et 56 secondes, ce qui nous amène à 24 heures pour le jour solaire. (En fait, ce 3 minutes 56 secondes est une moyenne, il y a de légères variations au cours de l'année.)

Cette différence entre le jour solaire est due à la rotation de la Terre autour du Soleil. Réexaminons notre situation en prenant en considération la position de la Terre autour du Soleil.



en.wikipedia.org/wiki/Solar_time

La position 1 de la Terre est notre situation initiale : le Soleil et l'étoile (qui serait très loin à gauche sur cette figure) sont dans la même direction. 23 heures 56 minutes et 4 secondes plus tard, la Terre est la position 2. À ce moment, la Terre a fait un tour complet sur elle-même et l'étoile est revenue dans la même direction. Par contre, le Soleil n'est plus dans cette direction puisque la Terre s'est déplacée sur son orbite. On doit donc attendre quelques instants pour que la Terre tourne un peu plus (position 3) pour que le Soleil revienne dans la même direction. Le temps nécessaire pour que la Terre fasse cette rotation supplémentaire est de 3 minutes et 56 secondes, ce qui nous amène à 24 heures pour que le Soleil revienne dans la même direction.



burro.cwru.edu/Academics/Astr306/Coords/coords.html

Ainsi, si on vous demande en combien de temps la Terre fait un tour sur elle-même, vous devez répondre 23 heures 56 minutes et 4 secondes, et non pas 24 heures qui est plutôt la durée du jour solaire.

On peut même faire un petit calcul pour nous permettre de faire le lien entre ces deux temps. Sur la figure suivante, il s'est écoulé exactement 24 heures entre le moment où la Terre est à la position A et le moment où la Terre est à la position B.

À la position A, il était midi pour une personne située à l'endroit marqué par un point sur Terre. À la position B, il est à nouveau midi pour cette personne, car le Soleil est de nouveau exactement vers le sud.

On voit que la Terre a dû faire un peu plus qu'un tour pour qu'il soit de nouveau midi. En fait, elle a dû tourner de 360° + α pour y arriver.

Or, selon la figure, cet angle α correspond aussi à l'angle de déplacement de la Terre sur son orbite autour du Soleil. Comme la Terre fait un tour du Soleil en 365,256 565 4 jours, cela veut dire que cet angle est de

$$\alpha = \frac{360°}{365,2565654}$$

En deux jours, la Terre doit tourner sur elle-même de 2 · (360 + α) et en trois jours, elle doit tourner sur elle-même de 3 · (360 + α) et ainsi de suite. On devine alors qu'en un an (365,256 565 4 jours), elle a tourné sur elle-même de

$$Angle = 365,2565654 \cdot (360° + \alpha)$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} Angle &= 365,2565654 \cdot \left(360° + \frac{360°}{365,2565654}\right) \\ &= 365,2565654 \cdot 360° + 365,2565654 \cdot \frac{360°}{365,2565654} \\ &= 365,2565654 \cdot 360° + 360° \end{aligned}$$

On trouve alors le nombre de tours que la Terre a faits sur elle-même en divisant cet angle par 360°.

$$\begin{aligned}\text{Nombre de tours} &= \frac{angle}{360°}\\ &= \frac{365,2565654 \cdot 360° + 360°}{360°}\\ &= 365,2565654 + 1\end{aligned}$$

On voit que la Terre a fait un tour de plus sur elle-même que le nombre de jours dans un an. Elle a donc fait 366,256 565 4 tours sur elle-même en 1 an.

En 1 an, il y a 365,256 565 4 jours · 24 heures/jour = 8766,157 57 heures. Comme on a fait 366,256 565 4 tours durant ce temps, la durée d'un tour est

$$temps = \frac{8766,15757h}{366,2565654} = 23,93447h = 23\text{h } 56\text{ min } 4\text{ sec}$$

C'est la période sidérale. On pourrait appliquer cette méthode pour n'importe quelle planète tournant autour d'une étoile. On notera la durée du jour sidéral J_{sid}, la durée du jour solaire J_{sol}, le nombre de jours solaires en un an N_{sol} et la période de révolution de la planète autour de l'étoile par $T_{planète}$. Comme la planète fait un tour sur elle-même de plus que le nombre de jour pour un tour complet autour de l'étoile, la durée du jour sidéral est

$$\begin{aligned}J_{sid} &= \frac{T_{planète}}{N_{sol}+1}\\ &= \frac{T_{planète}}{\frac{T_{planète}}{J_{sol}}+1}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{J_{sol}}+\frac{1}{T_{planète}}}\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

Lien entre le jour solaire et le jour sidéral. (La rotation de la planète sur elle-même et la rotation de la planète autour de l'étoile sont dans le même sens.)

$$\frac{1}{J_{sid}} = \frac{1}{J_{sol}} + \frac{1}{T_{planète}}$$

Si la planète tournait sur elle-même dans l'autre sens, elle ferait moins qu'un tour entre les positions A et B. Elle devrait tourner de 360° – α. En refaisant le même raisonnement, on se rendrait compte alors que la planète fait un tour de moins que le nombre de jours en un an. On aurait alors

Lien entre le jour solaire et le jour sidéral. (La rotation de la planète sur elle-même et la rotation de la planète autour de l'étoile sont dans le sens contraire.)

$$\frac{1}{J_{sid}} = \frac{1}{J_{sol}} - \frac{1}{T_{planète}}$$

Exemple 3.8.1

Sur une planète, le jour solaire dure 6 h 27 min 12 s (23 232 sec = 6,453 3 h) et il y a 224,3 jours en un an. Quelle est la période sidérale si la rotation de la planète sur elle-même est dans le même sens que la rotation de la planète autour de l'étoile ?

La durée du jour sidéral est

$$\frac{1}{J_{sid}} = \frac{1}{J_{sol}} + \frac{1}{T_{planète}}$$

$$\frac{1}{J_{sid}} = \frac{1}{6,4533h} + \frac{1}{224,3 \cdot 6,4533h}$$

$$\frac{1}{J_{sid}} = 0,15565h^{-1}$$

$$J_{sid} = 6,42466h = 6h\ 25\min 28,8s$$

Exemple 3.8.2

Sur une planète, le jour solaire dure 6 h 27 min 12 s (23 232 sec = 6,453 3 h) et il y a 224,3 jours en un an. Quelle est la période sidérale si la rotation de la planète sur elle-même est dans le sens contraire de la rotation de la planète autour de l'étoile ?

La durée du jour sidéral est

$$\frac{1}{J_{sid}} = \frac{1}{J_{sol}} - \frac{1}{T_{planète}}$$

$$\frac{1}{J_{sid}} = \frac{1}{6,4533h} - \frac{1}{224,3 \cdot 6,4533h}$$

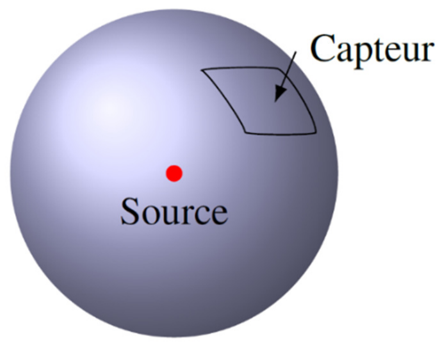
$$\frac{1}{J_{sid}} = 0,15427h^{-1}$$

$$J_{sid} = 6,4822h = 6h\ 28\min 56s$$

3.9 LA LUMINOSITÉ DU SOLEIL

Intensité à une distance D d'une étoile

Imaginons qu'on est à une certaine distance D d'une source qui émet une énergie E pendant un temps t. On va supposer que l'énergie est émise également dans toutes les directions, ce qui signifie qu'on a affaire à une ***source isotrope***. Ainsi, à une certaine distance D, l'énergie émise est distribuée également sur une sphère entourant la source.



À cette distance D, il y a un capteur ayant une aire $A_{capteur}$. Le capteur ne capte qu'une partie de l'énergie émise par la source. La proportion captée est donnée simplement par le rapport entre l'aire du capteur ($A_{capteur}$) et l'aire totale sur laquelle est répartie la puissance.

$$\frac{E_{captée}}{E} = \frac{A_{capteur}}{A_{sphère}}$$

$$E_{captée} = \frac{E}{A_{sphère}} A_{capteur}$$

$$E_{captée} = \frac{E}{4\pi D^2} A_{capteur}$$

En divisant les deux côtés de cette équation par le temps, on transforme l'énergie en puissance puisque $P = E/t$, on a

$$P_{captée} = \frac{P}{4\pi D^2} A_{capteur}$$

Mais puisque $P_{captée} = IA_{capteur}$, on obtient

$$I = \frac{P}{4\pi D^2}$$

Cette formule peut être utilisée pour trouver l'intensité de la lumière d'une étoile pour un observateur à une distance D puisque les étoiles sont des sources isotropes. Toutefois, avec une étoile, la puissance s'appelle plutôt la luminosité de l'étoile (L).

Intensité bolométrique de la lumière d'une étoile

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}$$

Avec la luminosité totale qui inclut l'énergie de toutes les parties du spectre, on obtient l'intensité bolométrique.

La luminosité du Soleil

Avec cette équation, on peut maintenant trouver la luminosité du Soleil. Puisque l'intensité bolométrique de la lumière reçue à la distance de la Terre est de 1361 W/m², on a

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}$$
$$1361\tfrac{W}{m^2} = \frac{L_\odot}{4\pi\left(1,496\times10^{11}m\right)^2}$$

La luminosité du Soleil est donc

$$L_\odot = 3,828\times10^{26}W$$

C'est une puissance prodigieuse. Le Soleil rayonne 3,828 x 10^{26} joules chaque seconde. Si on pouvait capter et emmagasiner toute cette énergie émise en 1 seconde, on aurait de l'énergie pour fournir de l'énergie à tous les habitants de la Terre pendant le prochain million d'années en maintenant notre consommation au niveau actuel.

Avec l'intensité bolométrique, on peut alors trouver que la magnitude bolométrique du Soleil est

$$I = 2,518\times10^{-8}\tfrac{W}{m^2}\cdot10^{-0,4m_{bol}}$$
$$1361\tfrac{W}{m^2} = 2,518\times10^{-8}\tfrac{W}{m^2}\cdot10^{-0,4m_{bol}}$$
$$m_{bol} = -26,832$$

La magnitude du Soleil est de -26,74. La partie de l'énergie émise dans le visible est donc

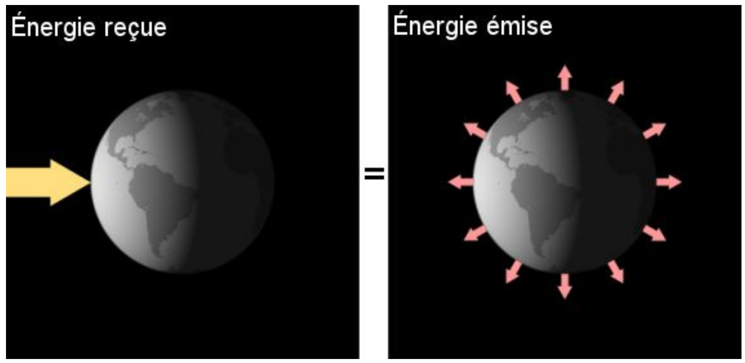
$$\begin{aligned} I_V &= 0,306\times10^{-8}\tfrac{W}{m^2}\cdot10^{-0,4m} \\ &= 0,306\times10^{-8}\tfrac{W}{m^2}\cdot10^{-0,4\cdot-26,74} \\ &= 152\tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

Ainsi, environ 11,1 % de l'énergie du Soleil est dans la partie visible du spectre. Plus précisément, 11,1 % de l'énergie solaire est dans la région de spectre que laisse passer le filtre V, ce qui signifie aussi que notre œil capte aussi environ 11 % de l'énergie du Soleil. Avec l'œil et le filtre V, la lumière ayant des longueurs d'onde près des limites du visible compte très peu, car l'œil est peu sensible à ces longueurs d'onde et le filtre V ne laisse pas passer ces longueurs d'onde. Si on compte toute l'énergie se situant entre 400 nm et 700 nm sans s'occuper de cette perte de sensibilité de l'œil, on a environ 40 % de l'énergie du Soleil, dans la partie visible.

3.10 LA TEMPÉRATURE DE SURFACE DE LA TERRE

La température de la Terre est déterminée par l'énergie reçue du Soleil. À l'équilibre, l'énergie reçue par seconde de l'étoile est égale à l'énergie émise par seconde par la planète due au rayonnement de corps chaud.

Si la planète reçoit plus d'énergie par seconde qu'elle en émet, elle accumule de l'énergie et sa température augmente. Si la planète reçoit moins d'énergie par seconde qu'elle en émet, elle perd de l'énergie et sa température diminue.



feww.wordpress.com/2009/01/21/earth-s-climate-a-solar-powered-system/

La puissance reçue

On calcule l'énergie reçue par la planète en considérant la planète comme un capteur circulaire ayant le même rayon que la planète. En effet, l'énergie captée est la même sur cette figure, car on capte la même quantité de rayons lumineux.

feww.wordpress.com/2009/01/21/earth-s-climate-a-solar-powered-system/

La puissance captée est donc

$$\begin{aligned} P_{recue} &= IA \\ &= I\pi R_{planète}^2 \end{aligned}$$

Ceci serait l'énergie reçue si toute la lumière était absorbée par la planète. C'est ce qu'on aurait avec une planète parfaitement noire. Toutefois, les planètes reflètent toujours une partie de la lumière. Le pourcentage de lumière réfléchie est l'*albédo* de la planète. Dans le cas de la Terre, l'albédo est de 30 % (A = 0,30). La puissance captée représente donc uniquement le pourcentage qui reste après la réflexion. Il faut donc multiplier la puissance captée par 1 – A pour garder uniquement ce qui est absorbé.

$$P_{recue} = I\pi R_{planète}^{2}(1-A)$$

On trouve l'intensité de la lumière reçue avec la formule

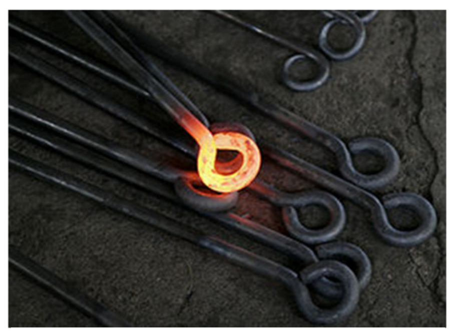
$$I = \frac{L}{4\pi D^{2}}$$

Où L est la luminosité de l'étoile et D est la distance entre la planète et l'étoile. La puissance reçue est donc

$$P_{recue} = I\pi R_{planète}^{2}(1-A)$$
$$P_{recue} = \frac{L}{4\pi D^{2}}\pi R_{planète}^{2}(1-A)$$
$$P_{recue} = \frac{LR_{planète}^{2}(1-A)}{4D^{2}}$$

La puissance émise

Quand on chauffe un objet, les atomes formant l'objet oscillent de plus en plus. Or, un atome en oscillation accélère continuellement et les particules chargées en accélération émettent du rayonnement électromagnétique. Cela signifie que tous les objets qui n'ont pas une température de 0 K émettent du rayonnement.



en.wikipedia.org/wiki/Thermal_radiation

Par exemple, cet anneau métallique chauffé à plusieurs centaines de °C émet un rayonnement plutôt rouge-orange.

Selon la thermodynamique, la puissance émise par un objet chaud augmente rapidement avec sa température. La puissance émise est

$$P_{émise} = \sigma A T^{4}$$

où A est l'aire de l'objet et σ est une constante valant 5,67 x 10^{-8} W/m² K^{4}.

Cela signifie qu'une planète chaude émet du rayonnement et que la puissance rayonnée par la planète est simplement la puissance rayonnée par un corps chaud de forme sphérique.

$$P_{émise} = \sigma 4\pi R_{planète}^{2} T^{4}$$

La température de surface

On trouve la température d'équilibre en égalant la puissance reçue et la puissance émise.

$$P_{recue} = P_{émise}$$
$$\frac{LR_{planète}^2 (1-A)}{4D^2} = \sigma 4\pi R_{planète}^2 T^4$$

En isolant la température, on trouve

$$T = \sqrt[4]{\frac{L(1-A)}{16\pi\sigma D^2}}$$

On va arranger un peu cette formule, en changeant les unités, pour qu'elle soit un peu plus facile à utiliser. Comme on va souvent donner la luminosité des étoiles en luminosité solaire, on voudrait pouvoir utiliser une luminosité en luminosité solaire dans la formule. De plus, on voudrait pouvoir utiliser une distance en unités astronomiques dans la formule puisque c'est souvent l'unité de mesure des distances entre les planètes et les étoiles.

On a donc

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt[4]{\frac{L(1-A)}{16\pi\sigma D^2}} \\
&= \sqrt[4]{\frac{L(1-A)}{16\pi\sigma D^2} \cdot \left(\frac{3,828\times 10^{26} W}{1L_\odot}\right) \cdot \left(\frac{1UA}{1,496\times 10^{11} m}\right)^2} \\
&= \sqrt[4]{\frac{3,828\times 10^{28} W (1-A)}{16\pi\sigma\left(1,496\times 10^{11} m\right)^2} \cdot \left(\frac{L}{1L_\odot}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2} \\
&= \sqrt[4]{\frac{3,828\times 10^{28} W}{16\pi\sigma\left(1,496\times 10^{11} m\right)^2}} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L}{1L_\odot}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2 (1-A)}
\end{aligned}$$

On peut alors calculer la première racine.

$$\sqrt[4]{\frac{3,828\times 10^{28} W}{16\pi \cdot 5,67\times 10^{-8} \frac{W}{m^2K^4}\left(1,496\times 10^{11} m\right)^2}} = 278,3K$$

On a alors

Température moyenne à la surface d'une planète

$$T = 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L}{1L_\odot}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2 (1-A)}$$

Erreur fréquente : faire la racine carrée plutôt que la racine quatrième

Attention, la racine est une racine quatrième.

Voyons ce que cela donne pour la Terre.

Exemple 3.10.1

Quelle est la température moyenne à la surface de la Terre sachant que l'albédo est de 0,30 ?

Puisque la luminosité de l'étoile est de 1 $L_\odot$ et que la distance est de 1 UA, la température est

$$\begin{aligned} T &= 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L}{1L_\odot}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2 (1-A)} \\ &= 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1L_\odot}{1L_\odot}\right)\cdot\left(\frac{1UA}{1UA}\right)^2 \cdot (1-0,30)} \\ &= 278,3K \cdot \sqrt[4]{0,70} \\ &= 254,6K \\ &= -18,6°C \end{aligned}$$

Ça semble un peu bas. Ce serait effectivement la température moyenne de la Terre s'il n'y avait pas d'atmosphère. (Quoique l'albédo de la Terre serait plus petit s'il n'y avait pas d'atmosphère, ce qui donnerait une Terre plus chaude…)

L'effet de serre

La température à la surface de la Terre est plus élevée que ce que prévoit la formule de température parce qu'il y a de l'effet de serre. Cet effet est causé principalement par l'eau, le dioxyde de carbone (CO_2), l'ozone (O_3) et le méthane (CH_4) dans l'atmosphère. Ces molécules absorbent le rayonnement infrarouge de la Terre, ce qui l'empêche d'aller dans l'espace. La puissance rayonnée par la Terre

$$P_{émise} = \sigma 4\pi R_{planète}^2 T^4$$

serait donc plus petite que la puissance reçue si on restait à la même température parce qu'une partie du rayonnement est bloquée. Toutefois, il faut quand même que la puissance rayonnée soit égale à la puissance reçue à l'équilibre. Il faudra donc compenser la baisse de la puissance rayonnée par une augmentation de température de surface. C'est ainsi que la température moyenne à la surface de la Terre monte jusqu'à 15 °C, ce qui signifie que l'effet de serre augmente la température de 38 °C (puisque la formule de la température avait donné -23 °C). Voici la contribution de chacun des gaz à effets de serre à cette augmentation de température.

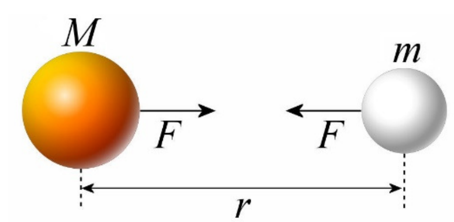
1)	Vapeur d'eau	60 %
2)	Dioxyde de carbone	26 %
3)	Ozone	8 %
4)	Méthane et oxyde nitreux	6 %

Il y a plusieurs milliards d'années, il y avait beaucoup plus de gaz à effets de serre dans l'atmosphère de la Terre. Principalement, c'est la quantité de CO_2 et de méthane qui a baissé. Des organismes ont commencé à transformer le CO_2 en oxygène il y a entre 2,7 et 3,5 milliards d'années. Le pourcentage d'oxygène a alors monté jusqu'à une valeur se situant entre 2 % et 4 %, il y a 2,3 milliards d'années. Le pourcentage s'est alors stabilisé pendant 1 milliard d'années. Pendant ce milliard d'années, les organismes continuaient à transformer le CO_2 en oxygène, mais il y avait de nombreuses réactions d'oxydation partout à la surface de la Terre qui éliminaient cet oxygène. De plus, les océans absorbaient beaucoup d'oxygène. Une fois que toutes les réactions d'oxydation possibles ont été faites, le pourcentage d'oxygène a pu recommencer à monter pendant que le pourcentage de CO_2 diminuait. En même temps, la proportion de méthane passait d'une valeur se situant entre 200 et 3000 ppm il y a 2,5 milliards d'années à 1,7 ppm aujourd'hui.

Il y a donc eu une baisse de l'effet de serre durant les deux derniers milliards d'années. Cette baisse de l'effet de serre fut presque exactement compensée par l'augmentation graduelle de la puissance du Soleil, dont la luminosité augmente de 1 % par 100 millions d'années (comme on le verra plus loin). Ainsi, la température à la surface de la Terre n'a pas beaucoup varié au cours de cette période. Il y a eu quelques variations, comme l'indique l'absence de calottes polaires sur Terre à l'époque des dinosaures, mais ça reste des variations de seulement quelques degrés.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Force entre deux astres



$$F_g = \frac{GMm}{r^2}$$

La vitesse d'un objet en orbite circulaire

$$v = \sqrt{\frac{GM_c}{r}}$$

La période d'un objet en orbite circulaire

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_c}}$$

Énergie mécanique d'un objet en orbite circulaire

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2r}$$

Moment cinétique d'un objet près d'une masse centrale

$$L = mvr\sin\psi = mv_p r_p$$

L est une constante

Forme de la trajectoire pour un objet près d'une masse centrale

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

Excentricité

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

Première loi de Kepler

Les orbites sont des ellipses. La masse centrale occupe un des foyers.

***r_p* et *r_a* en fonction de *a* et *e* pour une orbite elliptique**

$$r_p = a(1-e) \qquad r_a = a(1+e)$$

***a* et *e* en fonction de *r_a* et *r_p* pour une orbite elliptique**

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \qquad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

***r* en fonction de *θ* pour une orbite elliptique**

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta} \qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

Énergie mécanique

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

Énergie mécanique pour une orbite elliptique

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2a}$$

La vitesse sur une orbite elliptique

$$v^2 = GM_c\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

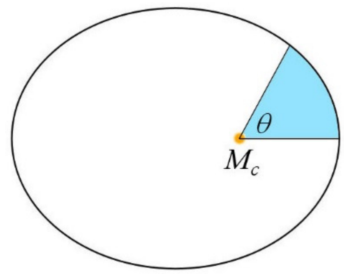
Vitesse à la périapside et à l'apoapside

$$v_p^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e} \qquad v_a^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}$$

2e loi de Kepler

$$A = \frac{r_p v_p}{2}t$$

Aire d'une partie d'ellipse



$$A = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\left(E - e\sin E\right)$$

où E est l'anomalie excentrique donnée par

$$E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

Dans ces formules, l'angle E doit être en radians.

Période pour une orbite elliptique (3e loi de Kepler)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$

L'unité astronomique = demi-grand axe de l'orbite de la Terre

$$1UA = 1{,}495\,978\,707\times 10^{11}m$$

Lien entre le jour solaire et le jour sidéral. (La rotation de la planète sur elle-même et la rotation de la planète autour de l'étoile sont dans le même sens.)

$$\frac{1}{J_{sid}} = \frac{1}{J_{sol}} + \frac{1}{T_{planète}}$$

Lien entre le jour solaire et le jour sidéral. (La rotation de la planète sur elle-même et la rotation de la planète autour de l'étoile sont dans le sens contraire.)

$$\frac{1}{J_{sid}} = \frac{1}{J_{sol}} - \frac{1}{T_{planète}}$$

Intensité de la lumière d'une étoile à une distance *D*

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}$$

Température moyenne à la surface d'une planète

$$T = 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L}{1L_{\odot}}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2 (1-A)}$$

EXERCICES

Utilisez les valeurs suivantes pour ces exercices.

Masse du Soleil = $1,9885 \times 10^{30}$ kg
Masse de la Terre = $5,9722 \times 10^{24}$ kg
Masse de la Lune = $7,346 \times 10^{22}$ kg
Masse de Mars = $6,4185 \times 10^{23}$ kg
1 unité astronomique = 149 600 000 km
Excentricité de l'orbite de la Terre = 0,01671
Distance entre la Terre et la Lune = 384 400 km
Demi-grand axe de l'orbite de Mars = 1,523 679 UA
Excentricité de l'orbite de Mars = 0,093 315
Albédo de la Terre = 0,30
Luminosité du Soleil = $3,828 \times 10^{26}$ W

3.1 La force entre deux astres

1. Quelle est la grandeur de la force exercée par la Terre sur la Lune ?

3.2 Les orbites circulaires

2. En supposant que l'orbite de la Lune est circulaire et que son rayon est de 384 400 km, calculez…

    a) la période de la Lune dans sa révolution autour de la Terre.
    b) la vitesse de la Lune sur son orbite.

3. Une planète tourne autour d'une étoile avec une période de 159,5 jours. Quelle est la masse de l'étoile (en masse solaire) si la planète tourne autour de l'étoile en suivant une orbite circulaire dont le rayon est de 220 000 000 km ?

4. Quelle est l'énergie mécanique du système Terre-Soleil si on suppose que l'orbite de la Terre est circulaire avec un rayon de 149 600 000 km ?

5. Combien d'énergie faudrait-il fournir pour éloigner la Terre de 10 000 000 km du Soleil si on suppose qu'au départ la Terre était sur une orbite circulaire ayant un rayon de 149 600 000 km ?

3.3 Formule générale de la trajectoire près d'un objet massif

6. À son point le plus près du Soleil, un objet a une vitesse de 70 km/s. La distance entre l'objet et le Soleil est alors de 50 millions de km.

   a) Quelle est l'excentricité de son orbite ?
   b) À quelle distance du Soleil sera l'objet quand l'angle sera de 90° par rapport à sa position la plus près ?
   c) À quelle distance du Soleil sera l'objet quand il sera à sa position la plus loin du Soleil ?

3.4 Les orbites elliptiques

7. Quelle est la distance entre Mars et le Soleil au périhélie (en UA) ?

8. Quelle est la distance entre Mars et le Soleil à l'aphélie (en UA) ?

9. Quelle est la vitesse de Mars au périhélie ?

10. Quelle est la vitesse angulaire de Mars au périhélie (en °/jour) ?

11. Quelle est la vitesse de Mars à l'aphélie ?

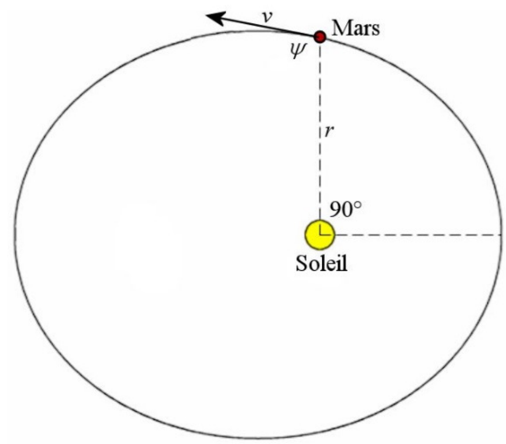
12. Quelle est la vitesse angulaire de Mars à l'aphélie (en °/jour) ?

13. Quelle est la période de rotation de Mars autour du Soleil ?

14. Quelle est l'énergie mécanique de Mars sur son orbite ?

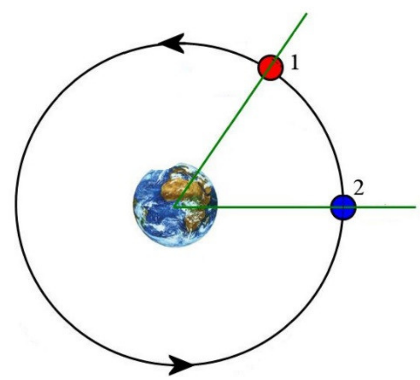
15. Quel est le moment cinétique de Mars sur son orbite ?

16. À un certain moment sur son orbite, Mars est à la position θ = 90° montrée sur cette figure.



   a) Quelle est la distance entre Mars et le Soleil ?
   b) Quelle est la vitesse de Mars ?
   c) Quel est l'angle entre la vitesse de Mars et la ligne allant de Mars au Soleil (ψ sur la figure) ?
   d) Combien a-t-il fallu de temps pour que Mars passe du périhélie à cette position ?
   e) Combien faudra-t-il de temps pour que Mars atteigne la position θ = 120° à partir de cette position ?

17. On va maintenant utiliser les lois des orbites pour faire comme si on travaillait pour la NASA. Imaginons qu'on ait deux objets sur la même orbite, mais que le satellite 1 est en avance sur le satellite 2. Le rayon de l'orbite est de 20 000 km et l'avance du satellite 1 est de 10 minutes (sur la figure, l'avance du satellite 1 est exagérée). On veut que le satellite 2 fasse un rendez-vous avec le satellite 1 quand le satellite 2 reviendra à la même position. On doit donc trouver une façon pour que le satellite 2 rattrape le satellite 1 en 1 tour de la Terre.

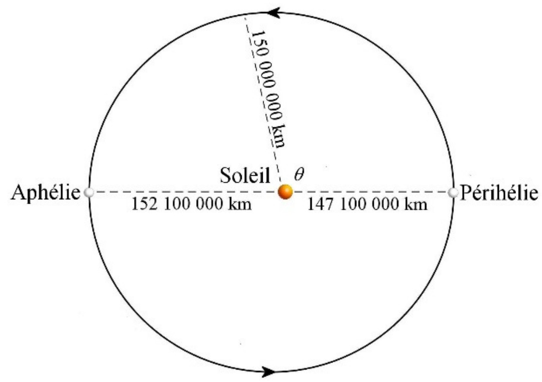


slideplayer.com/slide/8535140/

   a) Quelle est la période des satellites sur l'orbite circulaire (en minutes) ?
   b) On veut maintenant diminuer la période de satellite 2 pour qu'elle soit 10 minutes plus petite. Quelle doit être la valeur de a de cette orbite ?
   c) Trouver les valeurs de r_a et de r_p de cette nouvelle orbite.
   d) Quelle est l'excentricité de la nouvelle orbite ?
   e) On va faire fonctionner les moteurs du satellite 2 pour le faire passer sur sa nouvelle orbite. Doit-on augmenter ou diminuer la vitesse du satellite pour le faire passer sur sa nouvelle orbite ?
   f) De combien la vitesse doit-elle changer ?
   g) Sachant que la formule de la vitesse d'une fusée est $v = v_0 + v_{\exp} \ln\left(M / M'\right)$, déterminez combien de gaz on doit expulser pour faire ce changement de vitesse si la vitesse d'expulsion est de 500 m/s et la masse initiale du satellite est de 4 000 kg.

3.5 L'orbite de la Terre autour du Soleil

18. À un certain moment, la Terre est exactement à 150 000 000 km du Soleil.



a) Quel est l'angle θ sur la figure ?
b) Combien a-t-il fallu de temps pour que la Terre passe du périhélie à cette position ?

Rappel : $v_p = 30\,287 \frac{m}{s}$

19. Alors qu'elle est au périhélie (à 147 100 000 km du Soleil), la Terre est frappée par un astéroïde gigantesque. Cette collision fait passer la vitesse de la Terre de 30,287 km/s à 32 km/s, toujours dirigée dans même direction.

a) Quels sont maintenant l'excentricité et le demi-grand axe de l'orbite de la Terre ?
b) De combien change la distance à l'aphélie (qui est en ce moment à 152 100 000 km) ?
c) Quelle est la nouvelle période de révolution de la Terre ?
d) De combien a changé l'énergie du système Terre-Soleil ?

3.7 Les perturbations

20. Combien faut-il de temps pour que le périhélie décale de 1/12 de la circonférence ?

21. Montrez que le décalage est de 0,302 64° par siècle en partant du fait que l'année anomalistique est de 365,259 636 jours et que l'année sidérale vaut 365,256 565 4 jours.

22. Dans 250 000 ans, l'excentricité de l'orbite de la Terre sera de 0,04. Déterminez les distances entre la Terre et le Soleil au périhélie et à l'aphélie à ce moment en supposant que l'énergie mécanique du système Terre-Soleil reste la même.

3.8 La rotation de la Terre sur elle-même

23. Quelle est la durée du jour solaire sur Mars si Mars fait le tour du Soleil en 686,971 jours et qu'elle fait un tour sur elle-même en 24 h 37 m 22 s ? (Mars tourne sur elle-même dans le même sens qu'elle tourne autour du Soleil.)

24. Quelle serait la durée du jour solaire sur Mars si Mars tournait dans le sens contraire de sa rotation autour du Soleil tout en ayant la même période de rotation autour du Soleil de 686,971 jours et qu'elle fait un tour sur elle-même en 24 h 37 m 22 s ?

3.9 La luminosité du Soleil

25. La lumière du Soleil arrive sur la planète Mars

    a) Quelle est l'intensité bolométrique (I) de la lumière à la surface de Mars ?
    b) Quelle est la magnitude bolométrique du Soleil tel que vu de Mars ?

3.10 La température de surface de la Terre

26. Comme la distance entre la Terre et le Soleil change pendant l'année, la température moyenne de la Terre doit aussi changer. Calculer la différence de température qu'il y a entre le moment où la Terre est au périhélie et le moment où la Terre est à l'aphélie (si on néglige l'effet de serre).

27. Quelle est la température moyenne à la surface de Mars (si on néglige l'effet de serre qui n'est pas très important sur Mars de toute façon) si l'albédo est de 0,25 ? (Prenez la valeur du demi-grand axe pour la distance de Mars.)

28. Examinons maintenant l'effet de serre sur Vénus.

    a) Quelle serait la température de Vénus s'il n'y avait pas d'effet de serre ? Utilisez les données suivantes : distance entre le Soleil et Vénus = 0,723 UA et albédo de Vénus = 0,77).
    b) Puisque la véritable température à la surface de Vénus est de 462 °C, de combien de °C l'effet de serre fait-il augmenter la température à la surface de Vénus ?

29. À quelle distance du Soleil (en UA) la Terre devrait-elle être pour que sa température moyenne soit de 80 °C (si on tient compte que l'effet de serre sur Terre ajoute 38 °C) ? Rappelez-vous que l'albédo de la Terre est 0,30.

30. L'effet de serre fait passer la température moyenne de la Terre de -23 °C à 15 °C.

    a) En reprenant l'idée que la puissance émise est égale à la puissance reçue, déterminer le pourcentage de la lumière émise par la Terre qui est bloquée par l'atmosphère.

b) De combien la température augmenterait-elle si le pourcentage de l'énergie émise absorbée par l'atmosphère augmentait de 1 % ?

RÉPONSES

3.1 La force gravitationnelle entre 2 astres

1. 1,981 x 10^{20} N

3.2 Les orbites circulaires

2. a) 27,45 jours b) 1018 m/s
3. 16,68 masses solaires
4. -2,649 x 10^{33} J
5. 1,660 x 10^{32} J

3.3 Formule générale de la trajectoire près d'un objet massif

6. a) 0,846 0 b) 92,30 millions de km c) 599 millions de km

3.4 Les orbites elliptiques

7. 1,381 497 UA
8. 1,665 861 UA
9. 26,497 km/s
10. 0,634 7 °/j
11. 21,974 km/s
12. 0,436 5 °/j
13. 686,97 jours
14. -1,869 x 10^{32} J
15. 3,515 x 10^{39} kg m²/s
16. a) 1,510 4 UA b) 24,34 km/s c) 95,3° d) 151,4 j e) 59,3 j
17. a) 469,1 minutes b) 19 715 km c) r_a = 20 000 km r_p = 19 430 km
    d) 0,014 46 e) Diminuer la vitesse f) 32,4 m/s g) 251 kg

3.5 L'orbite de la Terre autour du Soleil

18. a) 100,1° b) 99,6 jours
19. a) e = 0,13496 0 a = 1,7005 x 10^{11} m b) la distance augmente de 40,9 millions de km
    c) 442,7 jours d) 3,185 x 10^{32} J

3.7 Les perturbations

20. 9913 ans
21. Voir le solutionnaire
22. Périhélie : 143,6 millions de km   aphélie : 155,6 millions de km

3.8 La rotation de la Terre sur elle-même

23. 24,659 7 h
24. 24,586 2 h

3.9 La luminosité du Soleil

25. a) 586,3 W/m²   b) -25,92

3.10 La température de surface de la Terre

26. 4,2 °C
27. 210 K = - 63 °C
28. a) -46,5 °C   b) 508,5 °C
29. 0,652 UA
30. a) 39,1 %   b) 1,2 °C