Solutionnaire du chapitre 1

1. Si l'angle entre l'horizon et Polaris est de 46,8° et que cet angle est de 42,35° à Boston, c'est que la différence de latitude entre Québec et Boston est

$$\theta = 46,80° - 42,35° = 4,45°$$

Puisque la distance est de 435 km, la circonférence de la Terre se trouve avec

$$\frac{495km}{4,45°} = \frac{circonférence}{360°}$$
$$circonférence = 40\,045km$$

2. On trouve la période de rotation avec

$$f = \frac{15\pi}{4GT^2\rho}$$
$$0,1 = \frac{15\pi}{4 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot T^2 \cdot 5514 \frac{kg}{m^3}}$$
$$T = 17\,892s = 4,97h$$

3. Avec une période de 6 h = 21 600 s, l'aplatissement serait

$$\begin{aligned} f &= \frac{15\pi}{4GT^2\rho} \\ &= \frac{15\pi}{4 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot (21600s)^2 \cdot 5514 \frac{kg}{m^3}} \\ &= 0,0686 \end{aligned}$$

On aurait alors

$$\frac{a-b}{a}=0,0686$$
$$a-b=0,0686a$$
$$a-0,0686a=b$$
$$0,9314a=b$$

Ainsi, on aurait

$$R^3=a^2b$$
$$(6371km)^3=a^2\cdot(0,9314a)$$
$$(6371km)^3=0,9314a^3$$
$$6371km=0,9766a$$
$$a=6523,8km$$

De là, on trouve que

$$\begin{aligned}b&=0,9314a\\&=6076,1km\end{aligned}$$

4. Le champ est

$$\begin{aligned}g&=\frac{GM_\oplus}{r^2}\\&=\frac{6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,972\times10^{24}kg}{\left(6,471\times10^6m\right)^2}\\&=9,52\tfrac{N}{kg}\end{aligned}$$

5. a) Le champ est

$$\begin{aligned}g&=\frac{GM_{mars}}{r^2}\\&=\frac{6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot6,4185\times10^{23}kg}{\left(3,386\times10^6m\right)^2}\\&=3,736\tfrac{N}{kg}\end{aligned}$$

b) Le poids est

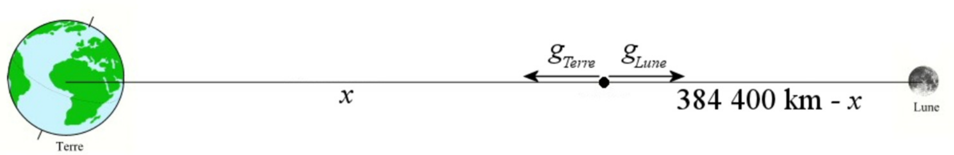
$$\begin{aligned} P &= mg \\ &= 70kg \cdot 3,736\tfrac{N}{kg} \\ &= 261,5N \end{aligned}$$

c) Le rapport des poids est

$$\frac{P_{\text{sur Mars}}}{P_{\text{sur Terre}}} = \frac{261,5N}{686N} = 0,381$$

Le poids sur Mars est donc 38,1 % du poids sur Terre.

6. Entre la Terre et la Lune, le champ est la somme des champs.



Si le champ est nul, c'est que le champ fait par la Terre est de même grandeur que celui de la Lune. On a donc

En posant que la position initiale de Richard était à $x = 0$, on a

$$\begin{aligned} g_{Terre} &= g_{Lune} \\ \frac{GM_{Terre}}{r_{Terre}^2} &= \frac{GM_{Lune}}{r_{Lune}^2} \\ \frac{5,97\times10^{24}kg}{x^2} &= \frac{7,34\times10^{22}kg}{\left(3,844\times10^{8}m - x\right)^2} \\ \frac{81,33}{x^2} &= \frac{1}{\left(3,844\times10^{8}m - x\right)^2} \\ 81,33\cdot\left(3,844\times10^{8}m - x\right)^2 &= x^2 \\ 81,33x^2 - 6,253\times10^{10}m\cdot x + 1,202\times10^{19} &= x^2 \\ 80,33\cdot x^2 - 6,253\times10^{10}m\cdot x + 1,202\times10^{19} &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont

x = 346 031 km et x = 432 339 km.

La deuxième solution correspond à un point qui n'est pas entre la Terre et la Lune et ce n'est donc pas une bonne solution. Il est vrai que les champs sont égaux à cet endroit, mais ils sont dans la même direction, ce qui fait que les champs s'additionnent et ne peuvent pas donner un champ nul. La bonne réponse est donc 346 031 km.

7. Le champ est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_{\oplus} r}{R_{\oplus}^3} \\ &= \frac{6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,972\times 10^{24} kg \cdot 5,371\times 10^6 m}{\left(6,371\times 10^6 m\right)^3} \\ &= 8,28 \tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

8. a) Le noyau est une sphère ayant un rayon de 2000 km. Sa masse est donc

$$\begin{aligned} M &= densité \cdot volume \\ &= \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \\ &= 12\,000 \tfrac{kg}{m^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(2\times 10^6 m\right)^3 \\ &= 1,28\times 10^{23} kg \cdot \pi \\ &= 4,02\times 10^{23} kg \end{aligned}$$

Le manteau est une sphère ayant un rayon de 5000 km dans laquelle il y a une cavité sphérique ayant un rayon de 2000 km. Sa masse est donc

$$\begin{aligned} M &= densité \cdot volume \\ &= \rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi R_{ext}^3 - \frac{4}{3}\pi R_{\text{int}}^3\right) \\ &= 3000 \tfrac{kg}{m^3} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot \left(5\times 10^6 m\right)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot \left(2\times 10^6 m\right)^3\right) \\ &= 4,68\times 10^{23} kg \cdot \pi \\ &= 1,470\times 10^{24} kg \end{aligned}$$

La masse totale est donc

$$\begin{aligned} M &= 4,02\times 10^{23}\,kg + 1,470\times 10^{24}\,kg \\ &= 1,872\times 10^{24}\,kg \end{aligned}$$

b) À l'extérieur de la planète, on peut calculer le champ avec

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_{\oplus}}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,872\times 10^{24}\,kg}{\left(6\times 10^6\,m\right)^2} \\ &= 3,471\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

c) À la surface de la planète, le champ est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,872\times 10^{24}\,kg}{\left(5\times 10^6\,m\right)^2} \\ &= 4,998\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

d) À l'intérieur de la planète, il faut utiliser le théorème de Gauss. Pour obtenir le champ à 4000 km du centre, il faut tracer une surface de Gauss à 4000 km du centre de la planète.

À l'intérieur de cette surface, il y a le noyau au complet, dont la masse est 4,02 x 10^{23} kg. Il y a ensuite une partie du manteau, dont la masse est

$$\begin{aligned} M &= densit\acute{e}\cdot volume \\ &= \rho\cdot\left(\frac{4}{3}\pi R_{ext}^3 - \frac{4}{3}\pi R_{\text{int}}^3\right) \\ &= 3000\,\tfrac{kg}{m^3}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi\cdot\left(4\times 10^6\,m\right)^3 - \frac{4}{3}\pi\cdot\left(2\times 10^6\,m\right)^3\right) \\ &= 2,24\times 10^{23}\,kg\cdot\pi \\ &= 7,04\times 10^{23}\,kg \end{aligned}$$

La masse totale à l'intérieur de la surface de Gauss est donc

$$\begin{aligned} M_{\text{int}} &= 4,02\times 10^{23}\,kg + 7,04\times 10^{23}\,kg \\ &= 1,106\times 10^{24}\,kg \end{aligned}$$

Le champ est donc de

$$r^2 g = GM_{\text{int}}$$
$$\left(4\times10^6 m\right)^2 g = 6,674\times10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,106\times10^{24} kg$$
$$g = 4,61\tfrac{N}{kg}$$

9. À la surface de la planète, le champ est

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

La masse de la planète se trouve avec les densités

$$\begin{aligned} M &= \rho_1 Vol_1 + \rho_2 Vol_2 \\ &= \rho_1 \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \rho_2\left(\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\right) \\ &= \rho_1\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\left(2\times10^6 m\right)^3 + 3000\tfrac{kg}{m^3}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi\cdot\left(5\times10^6 m\right)^3 - \frac{4}{3}\pi\cdot\left(2\times10^6 m\right)^3\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi\cdot\left(\rho_1\cdot 8\times10^{18} m^3 + 3,51\times10^{23} kg\right) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{G}{R^2}\left(\rho_1 \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \rho_2\left(\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\right)\right) \\ &= \frac{4\pi G}{3\left(5\times10^6 m\right)^2}\left(\rho_1\cdot 8\times10^{18} m^3 + 3,51\times10^{23} kg\right) \end{aligned}$$

Pour trouver le champ 1000 km sous la surface, il faut utiliser le théorème de Gauss. Pour obtenir le champ à 4000 km du centre, il faut tracer une surface de Gauss à 4000 km du centre de la planète.

À l’intérieur de cette surface, la masse est

$$\begin{aligned}M &= \rho_1 Vol_1 + \rho_2 Vol_2\\
&= \rho_1 \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \rho_2\left(\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\right)\\
&= \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(2\times 10^6 m\right)^3 + 3000\tfrac{kg}{m^3}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi\cdot\left(4\times 10^6 m\right)^3 - \frac{4}{3}\pi\cdot\left(2\times 10^6 m\right)^3\right)\\
&= \frac{4}{3}\pi\cdot\left(\rho_1\cdot 8\times 10^{18} m^3 + 1{,}68\times 10^{23} kg\right)\end{aligned}$$

Ainsi, le théorème de Gauss nous donne

$$r^2 g_2 = GM_{\text{int}}$$

$$\left(4\times 10^6 m\right)^2 g_2 = \frac{4}{3}\pi G\left(\rho_1\cdot 8\times 10^{18} m^3 + 1{,}68\times 10^{23} kg\right)$$

$$g_2 = \frac{4\pi G}{3\left(4\times 10^6 m\right)^2}\left(\rho_1\cdot 8\times 10^{18} m^3 + 1{,}68\times 10^{23} kg\right)$$

Si les deux champs sont égaux, on a

$$g_1 = g_2$$

$$\frac{4\pi G}{3\left(5\times 10^6 m\right)^2}\left(\rho_1\cdot 8\times 10^{18} m^3 + 3{,}51\times 10^{23} kg\right) = \frac{4\pi G}{3\left(4\times 10^6 m\right)^2}\left(\rho_1\cdot 8\times 10^{18} m^3 + 1{,}68\times 10^{23} kg\right)$$

$$\frac{1}{\left(5\times 10^6 m\right)^2}\left(\rho_1\cdot 8\times 10^{18} m^3 + 3{,}51\times 10^{23} kg\right) = \frac{1}{\left(4\times 10^6 m\right)^2}\left(\rho_1\cdot 8\times 10^{18} m^3 + 1{,}68\times 10^{23} kg\right)$$

$$\frac{1}{(5)^2}\left(\rho_1\cdot 8\times 10^{18} m^3 + 3{,}51\times 10^{23} kg\right) = \frac{1}{(4)^2}\left(\rho_1\cdot 8\times 10^{18} m^3 + 1{,}68\times 10^{23} kg\right)$$

$$16\left(\rho_1\cdot 8\times 10^{18} m^3 + 3{,}51\times 10^{23} kg\right) = 25\left(\rho_1\cdot 8\times 10^{18} m^3 + 1{,}68\times 10^{23} kg\right)$$

$$\rho_1\cdot 1{,}28\times 10^{20} m^3 + 5{,}616\times 10^{24} kg = \rho_1\cdot 2\times 10^{20} m^3 + 4{,}2\times 10^{24} kg$$

$$1{,}416\times 10^{24} kg = \rho_1\cdot 7{,}2\times 10^{19} m^3$$

$$\rho_1 = 19\,667\tfrac{kg}{m^3}$$

10. Le champ est

$$\begin{aligned} g &= \left(9,780327 + 0,0516323 \cdot \sin^2 \varphi + 0,0002269 \cdot \sin^4 \varphi\right) \tfrac{N}{kg} \\ &= \left(9,780327 + 0,0516323 \cdot \sin^2 (28,62°) + 0,0002269 \cdot \sin^4 (28,62°)\right) \tfrac{N}{kg} \\ &= 9,7922 \tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

11. La vitesse de libération est

$$\begin{aligned} v_{lib} &= \sqrt{\frac{2GM}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2} \cdot 6,4185 \times 10^{23} kg}{3,386 \times 10^6 m}} \\ &= 5030 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

12. La vitesse de libération est

$$\begin{aligned} v_{lib} &= \sqrt{\frac{2GM}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2} \cdot 6,4185 \times 10^{23} kg}{5,386 \times 10^6 m}} \\ &= 3988 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

13. a) La vitesse des molécules de CO_2 est

$$\begin{aligned} v_{molécules} &= \sqrt{\frac{2kT}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 1,38 \times 10^{-23} \tfrac{J}{K} \cdot 210K}{44 \cdot 1,66 \times 10^{-27} kg}} \\ &= 281,7 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Puisque la vitesse de libération sur Mars est de 5030 m/s (exercice précédent), on a

$$\lambda = \frac{v_{lib}}{v_{molécules}} = \frac{5030\frac{m}{s}}{280,7\frac{m}{s}} = 17,9$$

Puisque cette valeur est supérieure à 8, le CO_2 peut donc rester dans l'atmosphère de Mars.

b) La vitesse des molécules d'hélium est

$$v_{molécules} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1,38\times 10^{-23}\frac{J}{K}\cdot 210K}{4\cdot 1,66\times 10^{-27}kg}} = 934,4\frac{m}{s}$$

Puisque la vitesse de libération sur Mars est de 5030 m/s, on a

$$\lambda = \frac{v_{lib}}{v_{molécules}} = \frac{5030\frac{m}{s}}{934,4\frac{m}{s}} = 5,4$$

Puisque cette valeur est inférieure à 8, l'hélium ne peut donc pas rester dans l'atmosphère de Mars.

14. L'épaisseur caractéristique est

$$H = \frac{RT}{\mu g}$$

La masse molaire moyenne du gaz est

$$\mu = 0,96\cdot 44\frac{g}{mol} + 0,02\cdot 40\frac{g}{mol} + 0,02\cdot 28\frac{g}{mol} = 43,6\frac{g}{mol}$$

Le champ gravitationnel est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_{mars}}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 6,4185\times10^{23}\,kg}{\left(3,386\times10^{6}\,m\right)^2} \\ &= 3,736\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

Ainsi, l'épaisseur caractéristique est

$$\begin{aligned} H &= \frac{RT}{\mu g} \\ &= \frac{8,31\,\frac{J}{molK}\cdot 210K}{0,0436\,\frac{kg}{mol}\cdot 3,736\,\frac{N}{kg}} \\ &= 10713m \end{aligned}$$

15. La pression est donnée par

$$P = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

Si la pression est 90% de la pression au sol, on a

$$\begin{aligned} 0,9P_0 &= P_0 e^{-\frac{z}{H}} \\ 0,9 &= e^{-\frac{z}{H}} \\ \ln 0,9 &= -\frac{z}{H} \\ z &= -H\cdot \ln 0,9 \end{aligned}$$

Puisque la hauteur caractéristique de l'atmosphère terrestre est de 8428 m, on arrive à

$$\begin{aligned} z &= -8428m\cdot \ln 0,9 \\ &= 888m \end{aligned}$$

16. L'énergie est

$$\begin{aligned} U_g &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \\ &= -\frac{3}{5}\cdot\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(7,35\times10^{22}\,kg\right)^2}{1,738\times10^{6}\,m} \\ &= -1,24\times10^{29}\,J \end{aligned}$$

17. La chaleur est

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(6,4185\times10^{23}\,kg\right)^2}{3,386\times10^{6}\,m} \\ &= 4,872\times10^{30}\,J \end{aligned}$$

18. La chaleur par unité de masse est

$$\begin{aligned} q &= \frac{3}{5}\frac{GM}{R} \\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 6,4185\times10^{23}\,kg}{3,386\times10^{6}\,m} \\ &= 7,59\times10^{6}\,\frac{J}{kg} \end{aligned}$$

19. Nous avons 7,59 millions de J pour chaque kg. Examinons si cette énergie est suffisante pour faire fondre la roche.

Premièrement, il faut chauffer la roche de -63 °C à 1000 °C, soit une augmentation de 1063 °C. À 1000 J par °C, il faut donc 1 063 000 J pour chauffer le kilo de roche à 1000 °C. Après ce chauffage, il nous reste encore 6,527 millions de J. Cette quantité est amplement suffisante pour fournir les 250 000 J nécessaires pour faire fondre la roche.