

Solutionnaire du chapitre 16

1. Comme une distance de 300 Mal correspond à 91,97 Mpc, la vitesse de la galaxie est

$$\begin{aligned}v &= HD \\ &= 67,4 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \cdot 91,97 \text{Mal} \\ &= 6202 \frac{\text{km}}{\text{s}}\end{aligned}$$

2. On trouve le taux avec les facteurs de conversion

$$1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 1,02273 \times 10^{-3} \text{Ga}^{-1}$$

On a donc

$$\begin{aligned}500 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} &= 500 \cdot 1,02273 \times 10^{-3} \text{Ga}^{-1} \\ &= 500 \cdot 1,02273 \times 10^{-3} \text{Ga}^{-1} \\ &= 0,511 \text{Ga}^{-1}\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}z &= \frac{H_0}{c} D \\ 0,00436 &= \frac{67,4 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}}{3 \times 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \cdot D \\ D &= 19,4 \text{Mpc}\end{aligned}$$

4. À cette distance, le décalage est

$$\begin{aligned}z &= \frac{H_0}{c} D \\ &= \frac{67,4 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}}{3 \times 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \cdot \frac{600 \text{Mal}}{3,262 \frac{\text{al}}{\text{pc}}} \\ &= 0,0413\end{aligned}$$

La longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\lambda'}{\lambda} \\ 1,0413 &= \frac{\lambda'}{656,1nm} \\ \lambda' &= 683,2nm\end{aligned}$$

5. Le décalage est

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\lambda'}{\lambda} \\ &= \frac{3136,2nm}{656,1nm} \\ &= 4,78\end{aligned}$$

Le facteur d'échelle était donc de

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\delta} \\ &= \frac{1}{4,78} \\ &= 0,2092\end{aligned}$$

6. La densité était de

$$\begin{aligned}\rho_m &= \frac{1}{a^3} \rho_{m0} \\ &= \frac{1}{(0,6)^3} \cdot 5,10 \frac{m_p}{m^3} \\ &= 23,6 \frac{m_p}{m^3}\end{aligned}$$

7. On a

$$\begin{aligned}
 \rho_{c0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \\
 &= \frac{3 \cdot (100 \cdot 3,2409 \times 10^{-20} \text{ s}^{-1})^2}{8\pi \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} \\
 &= 1,879 \times 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
 &= 11,23 \frac{m_p}{\text{m}^3}
 \end{aligned}$$

8. On a

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\frac{t}{9,67 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 2 &= \left(\frac{t}{9,67 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 t &= 27,35 \text{ Ga}
 \end{aligned}$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 9,67 \text{ Ga}$, cela se produira dans

$$27,35 \text{ Ga} - 9,67 \text{ Ga} = 17,68 \text{ Ga}$$

9. Le facteur d'échelle sera de

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\frac{t}{9,67 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= \left(\frac{10,67 \text{ Ga}}{9,67 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 1,068
 \end{aligned}$$

10. À ce moment, le facteur d'échelle était de

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\frac{t}{9,67 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= \left(\frac{2 \text{ Ga}}{9,67 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 0,350
 \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que la densité était de

$$\begin{aligned}
 \rho_m &= \frac{1}{a^3} \rho_{m0} \\
 &= \frac{1}{(0,350)^3} \cdot 5,10 \frac{m_p}{m^3} \\
 &= 119,2 \frac{m_p}{m^3}
 \end{aligned}$$

11. On a

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{2}{3t} \\
 30 \cdot 1,02273 \times 10^{-3} \text{ Ga}^{-1} &= \frac{2}{3t} \\
 t &= 21,73 \text{ Ga}
 \end{aligned}$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 9,67 \text{ Ga}$, cela se produira dans

$$21,73 \text{ Ga} - 9,67 \text{ Ga} = 12,06 \text{ Ga}$$

12. On a

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{2}{3t} \\
 &= \frac{2}{3 \cdot 10,67 \text{ Ga}} \\
 &= 0,06248 \text{ Ga}^{-1}
 \end{aligned}$$

En km/s/Mpc, cela donne

$$H = 0,06248 \text{Ga}^{-1} \cdot \frac{1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}}{1,02273 \times 10^{-3} \text{Ga}^{-1}} = 61,1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$$

13. a) Cette lumière est partie quand le facteur d'échelle était de

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\delta} \\ &= \frac{1}{4,78} \\ &= 0,2092 \end{aligned}$$

Trouvons maintenant l'âge de l'univers quand on avait ce facteur d'échelle

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{t}{9,67 \text{Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\ 0,2092 &= \left(\frac{t}{9,67 \text{Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\ t &= 0,93 \text{Ga} \end{aligned}$$

La lumière est donc partie quand l'univers avait un âge de 0,93 Ga et elle arrive maintenant, quand l'univers a un âge de 9,67 Ga. Elle voyage donc depuis 8,74 Ga.

b) La distance est

$$\begin{aligned} d &= 29,01 \text{Gal} \cdot (1 - \sqrt{a_e}) \\ &= 29,01 \text{Gal} \cdot (1 - \sqrt{0,2092}) \\ &= 15,74 \text{Gal} \end{aligned}$$

c) Au moment de l'émission, le quasar était 4,78 fois plus près. Il était donc à 3,29 Gal.

d) Trouvons le facteur d'échelle lors de la réception de la lumière

$$\begin{aligned} 15,74 \text{Gal} &= 29,01 \text{Gal} \cdot (\sqrt{a_r} - 1) \\ a_r &= 2,38 \end{aligned}$$

L'âge de l'univers à ce moment sera de

$$a = \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$2,38 = \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t = 35,50Ga$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 9,67 Ga$, cela se produira dans

$$35,50 Ga - 9,67 Ga = 25,83 Ga$$

e) Comme le facteur d'échelle sera de 2,38, le quasar sera 2,38 fois plus loin qu'aujourd'hui. Il sera donc à 37,5 Gal de nous.

f) Le facteur d'échelle à l'émission est

$$a_e = \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{5Ga}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 0,6442$$

On trouve ensuite le facteur d'échelle à la réception,

$$d = 28,83Gal \cdot (\sqrt{a_r} - \sqrt{a_e})$$

$$15,74Gal = 29,01Gal \cdot (\sqrt{a_r} - \sqrt{0,6442})$$

$$a_r = 1,81$$

De là, on trouve l'âge de l'univers à la réception

$$a = \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$1,81 = \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t = 23,54Ga$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 9,67$ Ga, cela se produira dans

$$23,54 \text{ Ga} - 9,67 \text{ Ga} = 13,87 \text{ Ga}$$

14. a) On a

$$d = 3ct_A^{2/3} t_r^{1/3}$$

$$45Gal = 3c \cdot (9,67Ga)^{2/3} \cdot t_r^{1/3}$$

$$15Ga = (9,67Ga)^{2/3} \cdot t_r^{1/3}$$

$$t_r = 36,09Ga$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 9,67$ Ga, cela se produira dans

$$36,09 \text{ Ga} - 9,67 \text{ Ga} = 26,42 \text{ Ga}$$

b) À ce moment, le facteur d'échelle sera de

$$a = \left(\frac{t}{9,61Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{36,09Ga}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2,406$$

La galaxie sera donc 2,406 fois plus loin qu'en ce moment. Elle sera donc à $2,406 \cdot 45 \text{ Gal} = 108,3 \text{ Gal}$.

15. a) Avec un univers plat, on arrive à

$$0 = \frac{8\pi G}{3} \rho_r - H^2$$

On remarque premièrement que cet univers doit avoir une densité très précise qui dépend du taux d'expansion de Hubble. Cette densité est égale à la densité critique puisqu'on doit avoir

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{3} \rho_{r0} &= H_0^2 \\ \rho_{r0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \end{aligned}$$

Ensuite, puisque

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad \text{et} \quad \rho_r = \frac{\rho_{r0}}{a^4} \quad \text{et} \quad \rho_{r0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

l'équation devient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{8\pi G}{3} \rho_r - H^2 \\ 0 &= \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_{r0}}{a^4} - \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 \\ 0 &= \frac{8\pi G}{3} \frac{3H_0^2}{8\pi G} \frac{1}{a^4} - \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 \\ 0 &= \frac{H_0^2}{a^4} - \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

On peut ensuite trouver le facteur d'échelle en fonction du temps en faisant la solution de cette équation

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 &= \frac{H_0^2}{a^4} \\ \frac{1}{a} \frac{da}{dt} &= \frac{H_0}{a^2} \\ a \frac{da}{dt} &= H_0 \end{aligned}$$

Cette équation est assez facile à résoudre.

$$\begin{aligned}
 ada &= H_0 dt \\
 \int ada &= \int H_0 dt \\
 \frac{1}{2}a^2 &= H_0 t + Cst
 \end{aligned}$$

Si on prend que $t = 0$ à la naissance de l'univers ($a = 0$), cela veut dire que la constante d'intégration est nulle.

En isolant a on arrive à

$$a = \sqrt{2H_0 t}$$

b) Avec la valeur de H_0 , on arrive à

$$a = \sqrt{2 \cdot 6,89 \times 10^{-2} \text{Ga}^{-1} \cdot t}$$

Si le facteur d'échelle est 1, alors l'âge est

$$\begin{aligned}
 1 &= \sqrt{2 \cdot 6,89 \times 10^{-2} \text{Ga}^{-1} \cdot t_A} \\
 1 &= 2 \cdot 6,89 \times 10^{-2} \text{Ga}^{-1} \cdot t_A \\
 t_A &= \frac{1}{2 \cdot 6,89 \times 10^{-2} \text{Ga}^{-1}} \\
 t_A &= 7,26 \text{Ga}
 \end{aligned}$$

16. La valeur est

$$\begin{aligned}
 a_{\max} &= \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1} \\
 &= \frac{1,2}{1,2 - 1} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

17. Le facteur d'échelle sera

$$\begin{aligned}
 a &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{14,80Ga}{11,69Ga}\right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 1,070
 \end{aligned}$$

18. On a

$$\begin{aligned}
 a &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 2 &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &\quad t = 24,96Ga
 \end{aligned}$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 13,80$ Ga, cela se produira dans

$$24,96 \text{ Ga} - 13,80 \text{ Ga} = 11,16 \text{ Ga}$$

19. Le facteur d'échelle à ce moment était de

$$\begin{aligned}
 a &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{2Ga}{11,69Ga}\right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 0,2386
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \rho_m &= \frac{1}{a^3} \rho_{m0} \\
 &= \frac{1}{(0,2386)^3} \cdot \left(0,315 \cdot 5,10 \frac{m_p}{m^3} \right) \\
 &= 118 \frac{m_p}{m^3}
 \end{aligned}$$

20. La densité du vide est de

$$\begin{aligned}\rho_v &= 0,685 \cdot 5,10 \frac{m_p}{m^3} \\ &= 3,49 \frac{m_p}{m^3}\end{aligned}$$

On doit donc avoir la même densité de matière. On doit donc avoir

$$\begin{aligned}\rho_m &= \frac{1}{a^3} \rho_{m0} \\ 3,49 \frac{m_p}{m^3} &= \frac{1}{a^3} \cdot \left(0,315 \cdot 5,10 \frac{m_p}{m^3}\right) \\ a &= 0,772\end{aligned}$$

L'âge de l'univers à ce facteur d'échelle est donné par

$$\begin{aligned}a &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ 0,772 &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ t &= 10,30Ga\end{aligned}$$

(Voici une meilleure version :

La densité du vide est

$$\rho_v = \Omega_{v0} \rho_{c0}$$

On doit donc avoir la même densité de matière. On doit donc avoir

$$\begin{aligned}\rho_m &= \frac{1}{a^3} \rho_{m0} \\ \Omega_{v0} \rho_{c0} &= \frac{1}{a^3} \Omega_{m0} \rho_{c0} \\ a &= \sqrt[3]{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\end{aligned}$$

L'âge de l'univers à ce facteur d'échelle est donné par

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}} H_0 t}{2} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 \sqrt[3]{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}} &= \left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}} H_0 t}{2} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}} &= \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}} H_0 t}{2} \right) \\
 1 &= \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}} H_0 t}{2} \right) \\
 t &= \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{v0}} H_0} \sinh^{-1} 1 \\
 t &= 11,69 Ga \cdot \sinh^{-1} 1 \\
 t &= 10,30 Ga
 \end{aligned}$$

C'est un peu plus long, mais ça évite les approximations.)

21. Le taux sera de

$$\begin{aligned}
 H &= 55,8 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \cdot \frac{1}{\tanh \left(\frac{t}{11,69 Ga} \right)} \\
 &= 55,8 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \cdot \frac{1}{\tanh \left(\frac{14,80 Ga}{11,69 Ga} \right)} \\
 &= 65,4 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}
 \end{aligned}$$

22. L'âge de l'univers est donné par la formule

$$\begin{aligned}
 1 &= \left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}} H_0 t_A}{2} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 1 &= \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}} H_0 t_A}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Puisque $\Omega_{m0} + \Omega_{v0} = 1$, on a

$$1 = \sqrt{\frac{1 - \Omega_{v0}}{\Omega_{v0}}} \sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}} H_0 t_A}{2}\right)$$

Avec $H_0 = 0,0689 \text{ Ga}^{-1}$ et $t_A = 20 \text{ Ga}$, on a

$$1 = \sqrt{\frac{1 - \Omega_{v0}}{\Omega_{v0}}} \sinh\left(2,067\sqrt{\Omega_{v0}}\right)$$

Selon Maple ou Wolfram, la solution de cette équation est $\Omega_{v0} = 0,928$.

N.B. Sur Maple, la commande est

$$\text{solve}\left(1 = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot \sinh(2.067 \cdot \sqrt{x}), x\right)$$

Sur le site Wolfram, la commande est

$$\text{solve } 1 = \sqrt{(1-x)/x} * \sinh(2.067 * \sqrt{x})$$

23. La lumière a été émise quand le facteur d'échelle était de

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1+z} \\ &= \frac{1}{8,085} \\ &= 0,1237 \end{aligned}$$

L'âge de l'univers à l'émission est donc de

$$0,1237 = \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69 \text{ Ga}}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t = 0,749 \text{ Ga}$$

Alors, Wolfram nous donne 28,85 Gal.