

# Solutionnaire du chapitre 15

1. Voir les réponses à la fin du chapitre.

2. La luminosité d'une étoile de type B0 est donnée par

$$\begin{aligned}M &= 2,5 \log\left(\frac{78,8L_{\odot}}{L}\right) \\-7 &= 2,5 \log\left(\frac{78,8L_{\odot}}{L}\right) \\L &= 49720L_{\odot}\end{aligned}$$

Comme il y a 0,1 % de  $N$  étoiles qui sont de ce type, la luminosité totale des étoiles  $B$  est

$$\begin{aligned}L_B &= 49720L_{\odot} \cdot 0,001 \cdot N \\&= 49,72L_{\odot} \cdot N\end{aligned}$$

La luminosité d'une étoile de type K0 est donnée par

$$\begin{aligned}M &= 2,5 \log\left(\frac{78,8L_{\odot}}{L}\right) \\5,7 &= 2,5 \log\left(\frac{78,8L_{\odot}}{L}\right) \\L &= 0,414L_{\odot}\end{aligned}$$

Comme il y a 99,9 % de  $N$  étoiles qui sont de ce type, la luminosité totale des étoiles  $K$  est

$$\begin{aligned}L_K &= 0,414L_{\odot} \cdot 0,999 \cdot N \\&= 0,4131L_{\odot} \cdot N\end{aligned}$$

Le rapport des luminosités est

$$\begin{aligned}\frac{L_B}{L_K} &= \frac{49,72L_{\odot} \cdot N}{0,4131L_{\odot} \cdot N} \\&= 120\end{aligned}$$

La luminosité des rares étoiles de type B0 est donc 120 fois plus grande que celles des étoiles de type K0 !

**3.** La magnitude absolue est

$$\begin{aligned}\overline{M}_v &= -2,43 \log\left(\frac{P}{10j}\right) - 4,05 \\ &= -2,43 \log\left(\frac{6,7j}{10j}\right) - 4,05 \\ &= -3,63\end{aligned}$$

Avec la magnitude, on trouve ensuite la distance

$$\begin{aligned}M &= m + 5 \log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ -3,63 &= 27,71 + 5 \log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ D &= 60,39Mal\end{aligned}$$

**4.** Les supernovæ de type I ont une magnitude absolue de -19,6. Avec la magnitude, on trouve ensuite la distance

$$\begin{aligned}M &= m + 5 \log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ -19,6 &= 18,5 + 5 \log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ D &= 1,36Gal\end{aligned}$$

**5.** Selon la relation de Tully-Fisher, la luminosité de la galaxie est

$$\begin{aligned}L &= 3,2 \frac{L_\odot s^4}{km^4} \cdot v^4 \\ &= 3,2 \frac{L_\odot s^4}{km^4} \cdot \left(150 \frac{km}{s}\right)^4 \\ &= 1,62 \times 10^9 L_\odot\end{aligned}$$

Cette luminosité correspond à la magnitude absolue suivante.

$$\begin{aligned}
 M &= 2,5 \log \left( \frac{78,7 L_{\odot}}{L} \right) \\
 &= 2,5 \log \left( \frac{78,7 L_{\odot}}{1,62 \times 10^9 L_{\odot}} \right) \\
 &= -18,28
 \end{aligned}$$

La distance est donc

$$\begin{aligned}
 M &= m + 5 \log \left( \frac{32,62 \text{al}}{D} \right) \\
 -18,3 &= 9,4 + 5 \log \left( \frac{32,62 \text{al}}{D} \right) \\
 D &= 11,2 \text{Mal}
 \end{aligned}$$

**6.** a) La masse est

$$\begin{aligned}
 M_{\text{int}} &= \frac{v^2 r}{G} \\
 &= \frac{(250\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \cdot (130\,000 \cdot 9,46 \times 10^{15} \text{m})}{6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} \\
 &= 1,152 \times 10^{42} \text{kg} \\
 &= 5,79 \times 10^{11} M_{\odot}
 \end{aligned}$$

b) On trouve la luminosité avec la relation de Tully-Fisher

$$\begin{aligned}
 L &= 3,2 \frac{L_{\odot} \text{s}^4}{\text{km}^4} \cdot v^4 \\
 &= 3,2 \frac{L_{\odot} \text{s}^4}{\text{km}^4} \cdot (250 \frac{\text{km}}{\text{s}})^4 \\
 &= 1,25 \times 10^{10} L_{\odot}
 \end{aligned}$$

c) Le rapport M/L est

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{L} &= \frac{5,79 \times 10^{11} M_{\odot}}{1,25 \times 10^{10} L_{\odot}} \\
 &= 46,3 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}
 \end{aligned}$$

- d) Le rapport M/L des étoiles est aux alentours de  $4 M_{\odot}/L_{\odot}$ . Cela signifie que la masse des étoiles est

$$4 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} = \frac{M_{\text{étoiles}}}{L}$$

$$4 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} = \frac{M_{\text{étoiles}}}{1,25 \times 10^{10} L_{\odot}}$$

$$M_{\text{étoiles}} = 5 \times 10^{10} M_{\odot}$$

La masse de la matière sombre est donc

$$M_{\text{sombre}} = M - M_{\text{étoile}}$$

$$= 5,79 \times 10^{11} M_{\odot} - 5 \times 10^{10} M_{\odot}$$

$$= 5,29 \times 10^{11} M_{\odot}$$

Le rapport des masses est donc

$$\frac{M_{\text{sombre}}}{M_{\text{étoiles}}} = \frac{5,29 \times 10^{11} M_{\odot}}{5 \times 10^{10} M_{\odot}}$$

$$= 10,6$$

**7.** On a

$$D < c \Delta t_{\text{observé}}$$

$$D < 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \cdot 3600 s$$

$$D < 1,08 \times 10^{12} m$$

$$D < 7,22 UA$$

La taille maximale est donc de 7,22 UA.

**8.** L'étoile survit si le rayon de Schwarzschild est plus grand que la limite de Roche. On a donc

$$\begin{aligned}
 R_s &> r \\
 2,953 \text{ km} \cdot \left( \frac{M_{TN}}{1M_\odot} \right) &> 2,4 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{TN}}{1M_\odot}} \cdot 1R_\odot \\
 2,953 \text{ km} \cdot \left( \frac{M_{TN}}{1M_\odot} \right) &> 2,4 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{TN}}{1M_\odot}} \cdot 6,957 \times 10^5 \text{ km} \\
 \left( \frac{M_{TN}}{1M_\odot} \right) &> \sqrt[3]{\frac{M_{TN}}{1M_\odot}} \cdot 5,65 \times 10^5 \\
 \left( \frac{M_{TN}}{1M_\odot} \right)^{\frac{2}{3}} &> 5,65 \times 10^5 \\
 M_{TN} &> 4,25 \times 10^8 M_\odot
 \end{aligned}$$

L'étoile survit jusqu'à l'horizon si la masse du trou noir est supérieure à 425 millions de masses solaires.

**9.** a) Le rythme est

$$\begin{aligned}
 \dot{m} &= \frac{M}{t} \\
 &= \frac{4,2 \times 10^6 M_\odot}{10^8 \text{ an}} \\
 &= 0,042 \frac{M_\odot}{\text{an}}
 \end{aligned}$$

b) On trouve la luminosité avec

$$\dot{m} = \frac{10L_{TN}}{c^2}$$

Toutefois, il nous le rythme d'accumulation en kg par seconde. Ce rythme est

$$\begin{aligned}
 \dot{m} &= 0,042 \frac{M_\odot}{\text{an}} \cdot \left( \frac{1 \text{ an}}{365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \right) \cdot \left( \frac{1,9885 \times 10^{30} \text{ kg}}{1M_\odot} \right) \\
 &= 2,646 \times 10^{21} \frac{\text{kg}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

La luminosité est donc

$$\dot{m} = \frac{10L_{TN}}{c^2}$$

$$2,626 \times 10^{21} \frac{kg}{s} = \frac{10L_{TN}}{\left(3 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)^2}$$

$$L_{TN} = 2,38 \times 10^{37} W$$

C'est près de la luminosité des galaxies de Seyfert, mais pas tout à fait. Probablement que la Voie lactée ne fut jamais une galaxie très active.

**10.** La masse est

$$M_{\text{int}} = \frac{v^2 r}{G}$$

$$= \frac{\left(650\,000 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot (10\,000\,000 \cdot 9,46 \times 10^{15} m)}{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}}$$

$$= 5,989 \times 10^{44} kg$$

$$= 3,01 \times 10^{14} M_{\odot}$$