Solutionnaire du chapitre 14

1. Comme une distance de 300 Mal correspond à 91,97 Mpc, la vitesse de la galaxie est

$$\begin{aligned} v &= HD \\ &= 67,4 \tfrac{km/s}{Mpc} \cdot 91,97 Mal \\ &= 6202 \tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

2. On trouve le taux avec les facteurs de conversion

$$1 \tfrac{km/s}{Mpc} = 1,02273 \times 10^{-3} Ga^{-1}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 500 \tfrac{km/s}{Mpc} &= 500 \cdot 1,02273 \times 10^{-3} Ga^{-1} \\ &= 500 \cdot 1,02273 \times 10^{-3} Ga^{-1} \\ &= 0,511 Ga^{-1} \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} z &= \frac{H_0}{c} D \\ 0,00436 &= \frac{67,4 \frac{km/s}{Mpc}}{3 \times 10^5 \frac{km}{s}} \cdot D \\ D &= 19,4 Mpc \end{aligned}$$

4. À cette distance, le décalage est

$$\begin{aligned} z &= \frac{D}{14,51 Gal} \\ &= \frac{0,6 Gal}{14,51 Gal} \\ &= 0,0413 \end{aligned}$$

La longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\lambda'}{\lambda} \\ 1,0413 &= \frac{\lambda'}{656,11nm} \\ \lambda' &= 683,2nm \end{aligned}$$

5. Le décalage est

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\lambda'}{\lambda} \\ &= \frac{3136,2nm}{656,1nm} \\ &= 4,78 \end{aligned}$$

Le facteur d'échelle était donc de

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\delta} \\ &= \frac{1}{4,78} \\ &= 0,2092 \end{aligned}$$

6. La densité était de

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{1}{a^3}\rho_{m0} \\ &= \frac{1}{(0,6)^3}\cdot 5,10\tfrac{m_p}{m^3} \\ &= 23,6\tfrac{m_p}{m^3} \end{aligned}$$

7. On a

$$\begin{aligned}\rho_{c0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \\ &= \frac{3\cdot\left(100\cdot 3,2409\times10^{-20}\,s^{-1}\right)^2}{8\pi\cdot 6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}} \\ &= 1,879\times10^{-26}\,\tfrac{kg}{m^3} \\ &= 11,23\,\tfrac{m_p}{m^3}\end{aligned}$$

8. On a

$$a = \left(\frac{t}{9,67Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$2 = \left(\frac{t}{9,67Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t = 27,35Ga$$

Comme nous sommes actuellement à t = 9,67 Ga, cela se produira dans

27,35 Ga – 9,67 Ga = 17,68 Ga

9. Le facteur d'échelle sera de

$$\begin{aligned}a &= \left(\frac{t}{9,67Ga}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{10,67Ga}{9,67Ga}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 1,068\end{aligned}$$

10. À ce moment, le facteur d'échelle était de

$$a = \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{2Ga}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 0,350$$

Ce qui veut dire que la densité était de

$$\rho_m = \frac{1}{a^3} \rho_{m0}$$

$$= \frac{1}{(0,350)^3} \cdot 5,10 \tfrac{m_p}{m^3}$$

$$= 119,2 \tfrac{m_p}{m^3}$$

11. On a

$$H = \frac{2}{3t}$$

$$30 \cdot 1,02273 \times 10^{-3} Ga^{-1} = \frac{2}{3t}$$

$$t = 21,73Ga$$

Comme nous sommes actuellement à t = 9,67 Ga, cela se produira dans

21,73 Ga – 9,67 Ga = 12,06 Ga

12. On a

$$H = \frac{2}{3t}$$

$$= \frac{2}{3 \cdot 10,67Ga}$$

$$= 0,06248Ga^{-1}$$

En km/s/Mpc, cela donne

$$H = 0{,}06248Ga^{-1} \cdot \frac{1\,\frac{km/s}{Mpc}}{1{,}02273 \times 10^{-3}Ga^{-1}} = 61{,}1\,\frac{km/s}{Mpc}$$

13. a) Cette lumière est partie quand le facteur d'échelle était de

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\delta} \\ &= \frac{1}{4{,}78} \\ &= 0{,}2092 \end{aligned}$$

Trouvons maintenant l'âge de l'univers quand on avait ce facteur d'échelle

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{t}{9{,}67Ga}\right)^{\frac{2}{3}} \\ 0{,}2092 &= \left(\frac{t}{9{,}67Ga}\right)^{\frac{2}{3}} \\ t &= 0{,}93Ga \end{aligned}$$

La lumière est donc partie quand l'univers avait un âge de 0,93 Ga et elle arrive maintenant, quand l'univers a un âge de 9,67 Ga. Elle voyage donc depuis 8,74 Ga.

b) La distance est

$$\begin{aligned} d &= 29{,}01Gal \cdot \left(1 - \sqrt{a_e}\right) \\ &= 29{,}01Gal \cdot \left(1 - \sqrt{0{,}2092}\right) \\ &= 15{,}74Gal \end{aligned}$$

c) Au moment de l'émission, le quasar était 4,78 fois plus près. Il était donc à 3,29 Gal.

d) Trouvons le facteur d'échelle lors de la réception de la lumière

$$\begin{aligned} 15{,}74Gal &= 29{,}01Gal \cdot \left(\sqrt{a_r} - 1\right) \\ a_r &= 2{,}38 \end{aligned}$$

L'âge de l'univers à ce moment sera de

$$a = \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$
$$2,38 = \left(\frac{t}{9,61Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$
$$t = 35,50Ga$$

Comme nous sommes actuellement à t = 9,67 Ga, cela se produira dans

35,50 Ga – 9,67 Ga = 25,83 Ga

e) Comme le facteur d'échelle sera de 2,38, le quasar sera 2,38 fois plus loin qu'aujourd'hui. Il sera donc à 37,5 Gal de nous.

f) Le facteur d'échelle à l'émission est

$$a_e = \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= \left(\frac{5Ga}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 0,6442$$

On trouve ensuite le facteur d'échelle à la réception,

$$d = 28,83Gal \cdot \left(\sqrt{a_r} - \sqrt{a_e} \right)$$
$$15,74Gal = 29,01Gal \cdot \left(\sqrt{a_r} - \sqrt{0,6442} \right)$$
$$a_r = 1,81$$

De là, on trouve l'âge de l'univers à la réception

$$a = \left(\frac{t}{9,67Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$1,81 = \left(\frac{t}{9,67Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$t = 23,54Ga$$

Comme nous sommes actuellement à t = 9,67 Ga, cela se produira dans

23,54 Ga – 9,67 Ga = 13,87 Ga

14. a) On a

$$d = 3ct_A^{2/3}t_r^{1/3}$$
$$45Gal = 3c \cdot (9,67Ga)^{2/3} \cdot t_r^{1/3}$$
$$15Ga = (9,67Ga)^{2/3} \cdot t_r^{1/3}$$
$$t_r = 36,09Ga$$

Comme nous sommes actuellement à t = 9,67 Ga, cela se produira dans

36,09 Ga – 9,67 Ga = 26,42 Ga

b) À ce moment, le facteur d'échelle sera de

$$a = \left(\frac{t}{9,61Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= \left(\frac{36,09Ga}{9,67Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 2,406$$

La galaxie sera donc 2,406 fois plus loin qu'en ce moment. Elle sera donc à 2,406 · 45 Gal = 108,3 Gal.

15. a) Avec un univers plat, on arrive à

$$0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r - H^2$$

On remarque premièrement que cet univers doit avoir une densité très précise qui dépend du taux d'expansion de Hubble. Cette densité est égale à la densité critique puisqu'on doit avoir

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_{r0} = H_0^2$$
$$\rho_{r0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

Ensuite, puisque

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \qquad \text{et} \qquad \rho_r = \frac{\rho_{r0}}{a^4} \qquad \text{et} \qquad \rho_{r0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

l'équation devient

$$0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r - H^2$$
$$0 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_{r0}}{a^4} - \left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2$$
$$0 = \frac{8\pi G}{3}\frac{3H_0^2}{8\pi G}\frac{1}{a^4} - \left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2$$
$$0 = \frac{H_0^2}{a^4} - \left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2$$

On peut ensuite trouver le facteur d'échelle en fonction du temps en faisant la solution de cette équation

$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{H_0^2}{a^4}$$
$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{H_0}{a^2}$$
$$a\frac{da}{dt} = H_0$$

Cette équation est assez facile à résoudre.

$$ada = H_0 dt$$
$$\int ada = \int H_0 dt$$
$$\frac{1}{2}a^2 = H_0 t + Cst$$

Si on prend que $t = 0$ à la naissance de l'univers ($a = 0$), cela veut dire que la constante d'intégration est nulle.

En isolant a on arrive à

$$a = \sqrt{2H_0 t}$$

b) Avec la valeur de H_0, on arrive à

$$a = \sqrt{2 \cdot 6,89 \times 10^{-2} Ga^{-1} \cdot t}$$

Si le facteur d'échelle est 1, alors l'âge est

$$1 = \sqrt{2 \cdot 6,89 \times 10^{-2} Ga^{-1} \cdot t_A}$$
$$1 = 2 \cdot 6,89 \times 10^{-2} Ga^{-1} \cdot t_A$$
$$t_A = \frac{1}{2 \cdot 6,89 \times 10^{-2} Ga^{-1}}$$
$$t_A = 7,26 Ga$$

16. La valeur est

$$a_{\max} = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1} = \frac{1,2}{1,2 - 1} = 6$$

17. Le facteur d'échelle sera

$$\begin{aligned} a &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{14,80Ga}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 1,070 \end{aligned}$$

18. On a

$$a = \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$2 = \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t = 24,96Ga$$

Comme nous sommes actuellement à t = 13,80 Ga, cela se produira dans

24,96 Ga – 13,80 Ga = 11,16 Ga

19. Le facteur d'échelle à ce moment était de

$$\begin{aligned} a &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{2Ga}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 0,2386 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{1}{a^3}\rho_{m0} \\ &= \frac{1}{(0,2386)^3} \cdot \left(0,315 \cdot 5,10 \tfrac{m_p}{m^3}\right) \\ &= 118 \tfrac{m_p}{m^3} \end{aligned}$$

20. La densité du vide est de

$$\begin{aligned}\rho_v &= 0,685 \cdot 5,10 \tfrac{m_p}{m^3} \\ &= 3,49 \tfrac{m_p}{m^3}\end{aligned}$$

On doit donc avoir la même densité de matière. On doit donc avoir

$$\begin{aligned}\rho_m &= \frac{1}{a^3}\rho_{m0} \\ 3,49 \tfrac{m_p}{m^3} &= \frac{1}{a^3}\cdot\left(0,315 \cdot 5,10 \tfrac{m_p}{m^3}\right) \\ a &= 0,772\end{aligned}$$

L'âge de l'univers à ce facteur d'échelle est donné par

$$\begin{aligned}a &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ 0,772 &= \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ t &= 10,30Ga\end{aligned}$$

(Voici une meilleure version :

La densité du vide est

$$\rho_v = \Omega_{v0}\rho_{c0}$$

On doit donc avoir la même densité de matière. On doit donc avoir

$$\begin{aligned}\rho_m &= \frac{1}{a^3}\rho_{m0} \\ \Omega_{v0}\rho_{c0} &= \frac{1}{a^3}\Omega_{m0}\rho_{c0} \\ a &= \sqrt[3]{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\end{aligned}$$

L'âge de l'univers à ce facteur d'échelle est donné par

$$a=\left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}=\left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}=\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)$$

$$1=\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)$$

$$t=\frac{2}{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}\sinh^{-1}1$$

$$t=11,69Ga\cdot\sinh^{-1}1$$

$$t=10,30Ga$$

C'est un peu plus long, mais ça évite les approximations.)

21. Le taux sera de

$$\begin{aligned}H&=55,8\tfrac{km/s}{Mpc}\cdot\frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)}\\&=55,8\tfrac{km/s}{Mpc}\cdot\frac{1}{\tanh\left(\frac{14,80Ga}{11,69Ga}\right)}\\&=65,4\tfrac{km/s}{Mpc}\end{aligned}$$

22. L'âge de l'univers est donné par la formule

$$1=\left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t_A\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$1=\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t_A\right)$$

Puisque $\Omega_{m0}+\Omega_{v0}=1$, on a

$$1=\sqrt{\frac{1-\Omega_{v0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t_A\right)$$

Avec H_0 = 0,0689 Ga^{-1} et t_A = 20 Ga, on a

$$1=\sqrt{\frac{1-\Omega_{v0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(2,067\sqrt{\Omega_{v0}}\right)$$

Selon Maple ou Wolfram, la solution de cette équation est Ω_{v0} = 0,928.

N.B. Sur Maple, la commande est

$$solve\left(1=\sqrt{\frac{1-x}{x}}\cdot\sinh\left(2.067\cdot\sqrt{x}\right),x\right)$$

Sur le site Wolfram, la commande est

solve 1=sqrt((1-x)/x)*sinh(2.067*sqrt(x))

23. La lumière a été émise quand le facteur d'échelle était de

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1+z} \\ &= \frac{1}{8,085} \\ &= 0,1237 \end{aligned}$$

L'âge de l'univers à l'émission est donc de

$$0,1237=\left(0,678\cdot\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$t=0,749Ga$$

Alors, Wolfram nous donne 28,85 Gal.