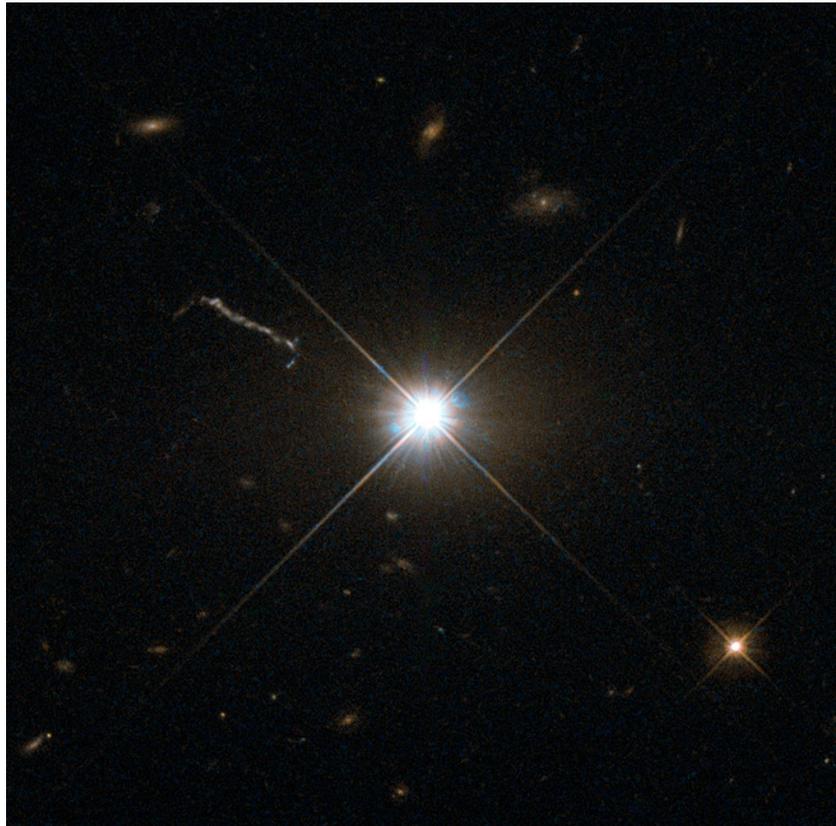


# 14 L'EXPANSION DE L'UNIVERS

*Dans le spectre du quasar 3C 273, la raie spectrale de l'hydrogène, normalement à 656,1 nm, est à 761,1 nm. Quel était le facteur d'échelle de l'univers quand la lumière de ce quasar, arrivant à nous aujourd'hui, a été émise ?*



[en.wikipedia.org/wiki/3C\\_273](https://en.wikipedia.org/wiki/3C_273)

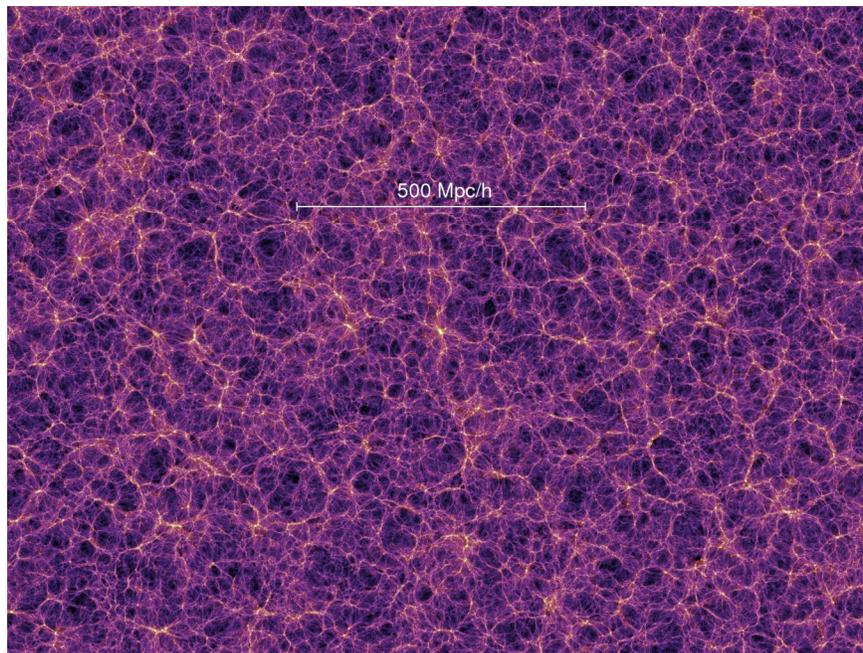
**Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.**

## 14.1 DESCRIPTION DE L'EXPANSION

### L'univers et la relativité générale

À partir de 1917, quelques rares physiciens tentent de déterminer l'évolution de l'univers à partir des équations de la relativité générale découverte par Einstein. Ce sont des cosmologistes.

Ça peut sembler difficile de calculer l'évolution de tout l'univers vu sa complexité, mais on fait quelques simplifications pour y arriver. Par exemple, on suppose que toute la matière est répartie uniformément dans l'univers, ce qui est assez correct quand on se rappelle l'image montrant la superstructure de l'univers.



[www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/millennium/](http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/millennium/)

Il y a bien quelques grumeaux ici et là, mais c'est quand même assez uniforme. (Rassurez-vous, on a fait plusieurs tests statistiques pour vérifier que c'est bien uniforme.)

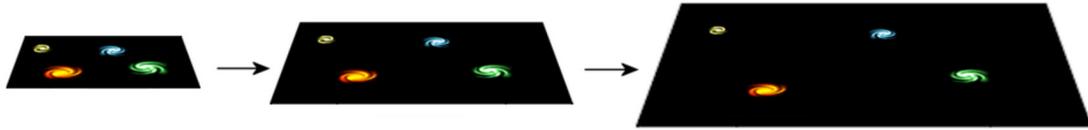
À partir d'un univers supposé uniforme, on peut obtenir plusieurs solutions selon ce qu'on choisit de mettre dans cet univers.

### Un univers en expansion

Les cosmologistes se rendent vite compte que pratiquement tous les modèles obtenus avec la relativité sont des modèles dans lesquels l'univers est en expansion (ou en contraction).

L'expansion de l'univers signifie que les galaxies s'éloignent toutes les unes des autres avec le temps. L'image suivante nous montre ce qui se passe sur une période de plusieurs

milliards d'années dans un univers en expansion ayant seulement deux dimensions (comme une feuille). L'univers garde exactement la même structure, mais les galaxies sont de plus en plus éloignées les unes des autres.

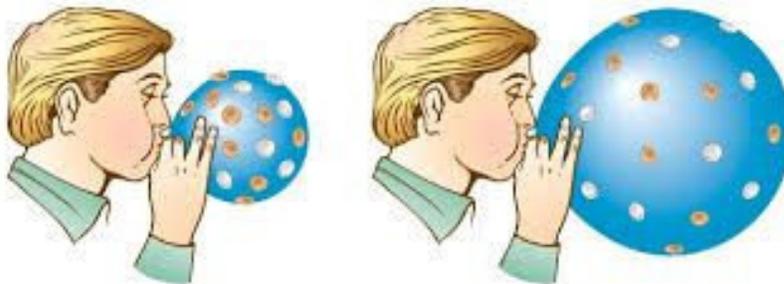


[nothingnerdy.wikispaces.com/E6+GALAXIES+AND+THE+EXPANDING+UNIVERSE](http://nothingnerdy.wikispaces.com/E6+GALAXIES+AND+THE+EXPANDING+UNIVERSE)

Cette expansion change uniquement la distance entre les galaxies. La taille des galaxies reste la même, la taille du Système solaire reste la même et la taille de la Terre reste la même.

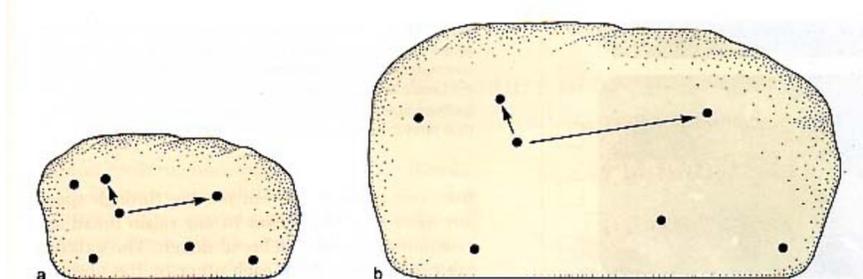
En relativité, l'espace entre les galaxies prend une importance capitale. Il y a une expansion parce que cet espace gonfle lentement. En gonflant ainsi, l'espace entraîne avec lui tout ce qu'il contient. Ainsi, selon la relativité, les galaxies ne se déplacent pas dans l'espace avec l'expansion. Les galaxies s'éloignent les unes des autres simplement parce que l'espace gonfle et les entraîne dans son gonflement.

Prenons une analogie pour un univers en deux dimensions. C'est comme si on collait des dessins de galaxies sur un ballon qu'on gonfle. En gonflant le ballon, les dessins de galaxie s'éloignent les unes des autres en étant entraînés par l'étirement de la surface du ballon. Ainsi, les galaxies s'éloignent les unes des autres, sans se déplacer par rapport à la surface du ballon, qui représente ici l'espace.



[theeternaluniverse.blogspot.ca/2009/08/how-should-we-view-universes-expansion.html](http://theeternaluniverse.blogspot.ca/2009/08/how-should-we-view-universes-expansion.html)

On utilise aussi l'analogie du pain aux raisins pour illustrer l'expansion de l'univers. On imagine un pain aux raisins qui cuit. Pendant la cuisson, le pain gonfle, ce qui éloigne les raisins les uns des autres.



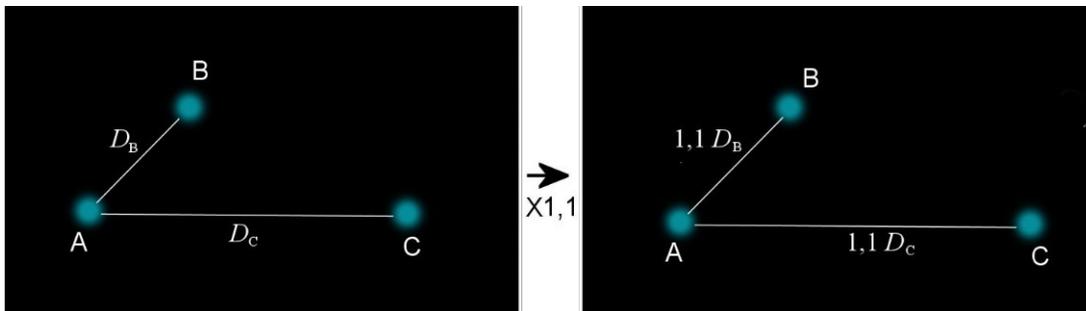
[web.njit.edu/~gary/202/Lecture23.html](http://web.njit.edu/~gary/202/Lecture23.html)

Le gonflement du pain pendant la cuisson est l'équivalent de l'expansion de l'univers. La mie du pain représente l'espace et les raisins représentent les galaxies. Pendant la cuisson du pain, la mie gonfle, ce qui éloigne les raisins les uns des autres. Les raisins ne se déplacent pas dans la mie pour s'éloigner les uns des autres, c'est la mie qui gonfle qui les éloigne sans qu'ils se déplacent dans la mie.

C'est exactement ce qui se passe dans l'univers. **L'espace entre les galaxies gonfle avec l'expansion, ce qui éloigne les galaxies les unes des autres sans que celles-ci se déplacent dans l'espace.**

## La loi de Hubble-Lemaître

Avec l'expansion, les distances entre les galaxies augmentent toutes du même facteur durant le même temps. Par exemple, l'image suivante montre comment changent les distances quand l'expansion fait grandir l'univers de 10 % (1,1 fois plus grand que maintenant). On voit que les distances entre les galaxies sont alors 1,1 fois les distances actuelles.



Une telle expansion signifie que les autres galaxies s'éloignent de la nôtre avec une vitesse proportionnelle à leur distance. Pour montrer cela, considérons les trois galaxies A (la nôtre), B et C de la figure. Ces galaxies sont initialement à une certaine distance les unes des autres. Puis, l'univers prend lentement de l'expansion, de sorte que les distances sont toutes augmentées de 10 % au bout d'un certain temps  $T$ .

Calculons maintenant les vitesses de chacune de ces galaxies selon un observateur dans notre galaxie (galaxie A).

La galaxie B était à une distance de  $D_B$  et est maintenant à une distance de  $1,1D_B$ . Elle s'est donc éloignée de  $0,1D_B$ . La vitesse d'éloignement est donc de

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{\Delta d}{\Delta t} \\ &= \frac{0,1D_B}{T} \\ &= \frac{0,1}{T} D_B \end{aligned}$$

La galaxie C était à une distance de  $D_C$  et est maintenant à une distance de  $1,1D_C$ . Elle s'est donc éloignée de  $0,1D_C$ . La vitesse d'éloignement est donc de

$$\begin{aligned} v_C &= \frac{\Delta d}{\Delta t} \\ &= \frac{0,1D_C}{T} \\ &= \frac{0,1}{T} D_C \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on obtient une vitesse proportionnelle à la distance et la constante de proportionnalité est la même ( $0,1/T$ ). Si on appelle cette constante  $H$ , on arrive donc à

### La loi de Hubble-Lemaître

$$v = HD$$

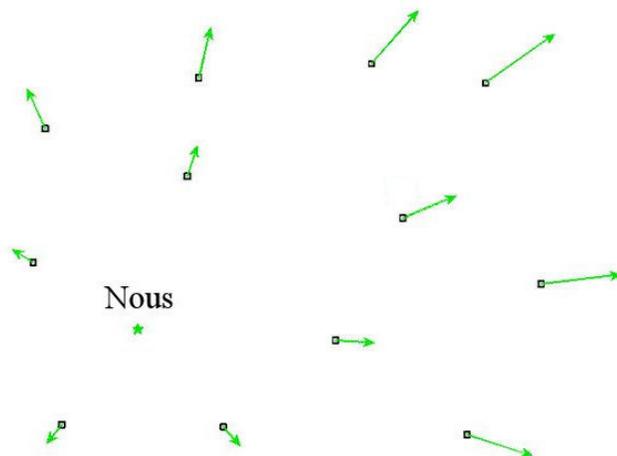
$H$  est souvent appelée *la constante de Hubble*, mais on va voir que sa valeur varie avec le temps et que ce n'est donc pas une constante. Il est donc préférable de l'appeler *le taux d'expansion de Hubble*.

La valeur de  $H$  en ce moment est notée  $H_0$  et vaut

$$H_0 = 67,4 \pm 0,5 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$$

(En fait, il y a un petit problème avec le taux d'expansion de Hubble depuis quelques années. En améliorant les techniques de mesure, on a diminué les incertitudes sur cette valeur. Or, selon la façon de mesurer, on obtient des valeurs qui sont maintenant incompatibles. La valeur donnée ici est celle obtenue en observant le rayonnement de fond cosmologique qu'on verra au chapitre suivant. Cependant, les mesures faites avec des céphéides lointaines donnent une valeur de  $73,0 \pm 1,0 \text{ km/s/Mpc}$ , qui n'est pas en accord avec la mesure donnée précédemment. Il y a en fait toute une série de méthode qui donne des résultats autour de 73 tout en ayant des incertitudes trop faibles pour atteindre la valeur de 67,4 obtenue avec le rayonnement de fond cosmologique. Une histoire à suivre...)

La loi de Hubble-Lemaître signifie donc qu'on devrait voir toutes les galaxies s'éloigner de nous avec une vitesse proportionnelle à la distance. Ainsi, les galaxies loin de nous s'éloignent plus rapidement de nous.



[www.astro.virginia.edu/class/whittle/ast553/Topic16/t16\\_hubble.html](http://www.astro.virginia.edu/class/whittle/ast553/Topic16/t16_hubble.html)

### Exemple 14.1.1

Quelle est la vitesse d'éloignement de la galaxie du Sombrero, située à une distance de 29,3 millions d'années-lumière selon la loi de Hubble-Lemaître ?

La distance de cette galaxie, en Mpc est,

$$D = 29,3 \text{Mal} \cdot \frac{1 \text{pc}}{3,262 \text{al}}$$

$$= 8,98 \text{Mpc}$$

La vitesse d'éloignement selon la loi de Hubble-Lemaître est donc

$$v = 67,4 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \cdot 8,98 \text{Mpc}$$

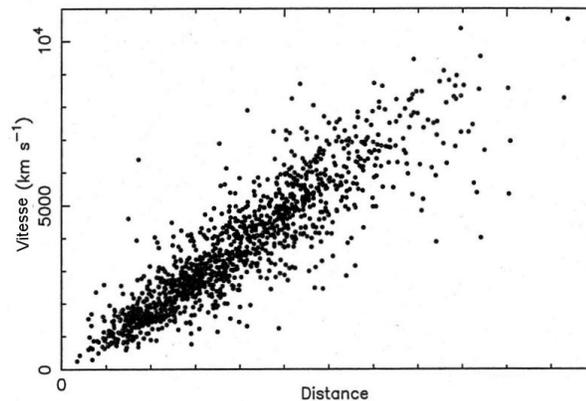
$$= 605 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$



en.wikipedia.org/wiki/File:M104\_ngc4594\_sombrero\_galaxy\_hi-res.jpg

### La véritable vitesse d'une galaxie peut être un peu différente de ce que donne la loi de Hubble-Lemaître

En fait, la véritable vitesse des galaxies peut être un peu différente de celle donnée par la loi de Hubble-Lemaître. Par exemple, la vitesse d'éloignement de la galaxie du Sombrero est en fait de 1024 km/s, et non pas 605 km/s. Ce graphique montre la vitesse en fonction de la distance pour 1355 galaxies. On voit que les points ne forment pas une droite parfaite. Une partie de cette dispersion vient de l'incertitude sur la distance des galaxies, mais cela n'explique pas tout. Pourquoi les galaxies ne suivent-elles pas exactement la loi de Hubble-Lemaître ?



hendrix2.uoregon.edu/~imamura/123/lecture-1/xpand.html

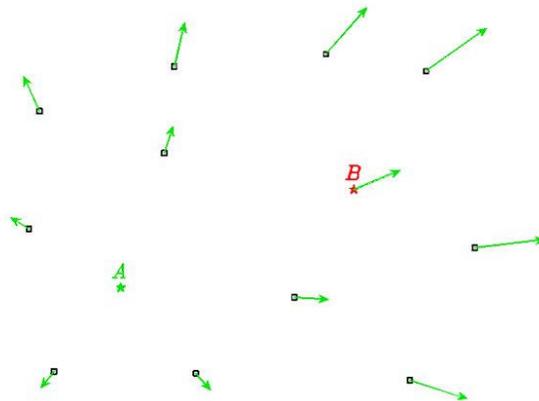
Pour nous aider à trouver la solution, améliorons un peu l'analogie du pain en remplaçant les raisins par des fourmis (qui ne meurent pas même si le pain est dans le four pendant la cuisson). Ces fourmis peuvent se déplacer dans la mie en la mangeant. Toutefois, il y a une certaine limite au rythme auquel une fourmi peut manger, ce qui veut dire qu'il y a une vitesse limite au déplacement des fourmis dans la mie. La vitesse de chaque fourmi selon les autres fourmis est donc une combinaison de deux vitesses : la vitesse due à l'expansion de la mie qui éloigne toutes les fourmis les unes des autres et la vitesse de la fourmi dans le pain, qui peut être dans n'importe quelle direction.

Cette analogie du pain aux fourmis (miam) illustre bien ce qui se passe dans l'univers. La vitesse d'éloignement des galaxies vient de deux phénomènes bien différents. Chaque galaxie s'éloigne de nous à cause de l'expansion de l'univers (comme le pain qui gonfle). Cette vitesse d'éloignement est alors donnée exactement par la loi de Hubble-Lemaître. Dans ce mouvement, les galaxies sont immobiles dans l'espace, mais le gonflement de l'espace les entraîne et les éloigne les unes des autres. Il n'y a pas de limite à cette vitesse. Deux galaxies très éloignées peuvent s'éloigner l'une de l'autre avec une vitesse plus grande que la vitesse de la lumière grâce à l'expansion. On ajoute ensuite à ce mouvement la vitesse de la galaxie dans l'espace (comme la vitesse des fourmis dans le pain). Cette vitesse ajoutée fait que les galaxies ne suivent pas tout à fait la loi de Hubble-Lemaître et c'est pour ça qu'on n'a pas une belle droite sur le graphique de la vitesse d'éloignement en fonction de la distance. La vitesse de la galaxie dans l'espace ne peut toutefois pas dépasser la vitesse de la lumière, tout comme la fourmi ne pouvait pas dépasser une certaine vitesse dans la mie. Ce déplacement se fait à vitesse constante dans une direction et se fait sans aucune résistance (c'est là que l'analogie avec le pain aux fourmis ne fonctionne pas tout à fait parce que les fourmis rencontrent une certaine résistance en se déplaçant dans le pain et pourraient facilement changer de direction, contrairement à ce qui se passe pour les galaxies).

C'est pour cela que la galaxie d'Andromède s'approche de nous. Avec l'expansion de l'univers, elle devrait s'éloigner à 51 km/s, mais comme elle se déplace vers nous dans l'espace à 352 km/s, elle a une vitesse résultante de 301 km/s vers nous. C'est une des seules galaxies pour laquelle la vitesse dans l'espace vers nous est plus grande que la vitesse d'éloignement due à l'expansion de l'univers.

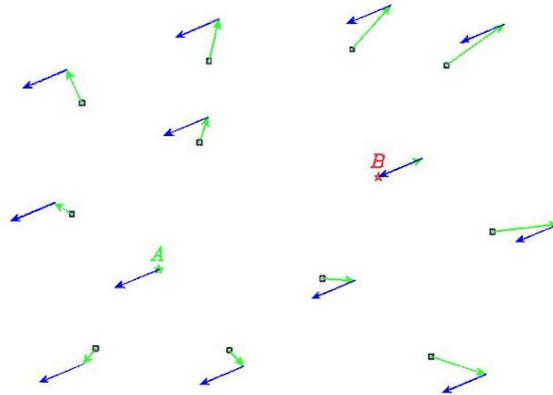
## Puisque les galaxies s'éloignent de nous, est-on au centre de l'univers ?

Les galaxies qui s'éloignent toutes de nous n'indiquent pas qu'on est immobile au centre de l'univers et que les galaxies s'éloignent de ce centre. Pour le montrer, examinons cette image de l'univers dans laquelle la Voie lactée est la galaxie A.

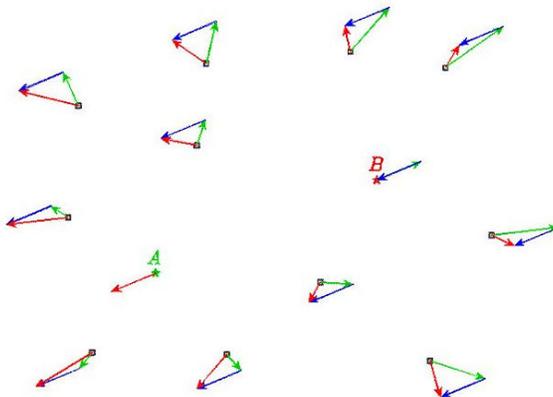


On va maintenant prendre le point de vue d'un observateur dans la galaxie B. Cet observateur peut considérer que sa galaxie est au repos, un point de vue tout aussi bon selon

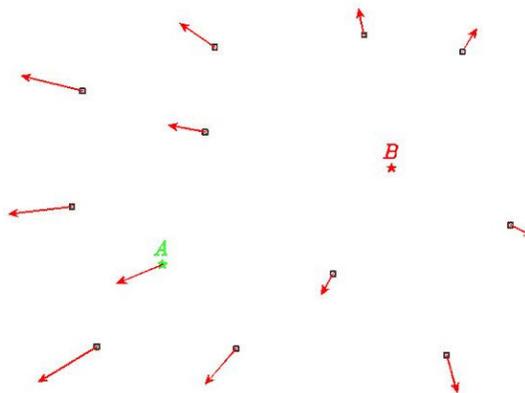
la relativité. Pour prendre ce point de vue, on doit donc se placer dans le référentiel de cette galaxie et lui donner une vitesse nulle. Pour y arriver, il faut faire une transformation de vitesse en ajoutant, à toutes les galaxies, l'inverse de la vitesse de la galaxie B. Cet inverse de la vitesse est représenté par un vecteur en bleu ici.



On va maintenant faire l'addition des vecteurs en bleu et en vert pour trouver la vitesse résultante de chaque galaxie selon l'observateur de la galaxie B. On va montrer cette somme par un vecteur en rouge.



Enlevons maintenant les vecteurs bleus et verts pour ne garder que la vitesse résultante en rouge. Cela nous permettra de bien voir ce qu'observe un habitant de la galaxie B.



Le résultat est assez frappant. L'observateur dans la galaxie B se considère au repos et voit aussi toutes les galaxies s'éloigner de lui avec une vitesse qui augmente avec la distance, ce qui est exactement la même chose que ce que voyait l'observateur dans la galaxie A. En fait, tous les observateurs de l'univers (s'il y en a d'autres) voient tous la même chose, peu importe dans quelle galaxie ils se trouvent. Ils se considèrent tous au repos et voient les autres galaxies s'éloigner d'eux avec une vitesse qui augmente avec la distance. Notre position n'a donc rien de particulier dans l'univers.

Dans l'analogie du pain, les observateurs sur chaque raisin voient la même chose, peu importe sur quel raisin ils sont placés. Ils peuvent se considérer au repos et voient tous les autres raisins s'éloigner avec une vitesse qui augmente avec la distance.

## Autres unités pour le taux d'expansion de Hubble

On remarque que dans le taux d'expansion de Hubble, il y a une distance au numérateur et au dénominateur dans les unités.

$$H_0 = 67,4 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$$

Si on changeait une de ces unités pour qu'elle soit la même que l'autre, elles s'annuleraient. Voyons ce que ça donne. On va changer les mégaparsecs en parsecs, puis les parsecs en années-lumière et finalement les années-lumière en kilomètres.

$$\begin{aligned} 1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} &= 1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \cdot \frac{1 \text{Mpc}}{10^6 \text{ pc}} \cdot \frac{1 \text{pc}}{3,26163 \text{al}} \cdot \frac{1 \text{al}}{9,46053 \times 10^{12} \text{ km}} \\ &= 3,2409 \times 10^{-20} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

On peut aussi changer les secondes en années pour obtenir

$$\begin{aligned} 1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} &= 3,2409 \times 10^{-20} \text{ s}^{-1} \cdot \frac{365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}}{1 \text{a}} \\ &= 1,02273 \times 10^{-12} \text{ a}^{-1} \end{aligned}$$

Les facteurs de conversion sont donc les suivants.

$$1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 3,2409 \times 10^{-20} \text{ s}^{-1}$$

$$1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 1,02273 \times 10^{-12} \text{ a}^{-1}$$

$$1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 1,02273 \times 10^{-3} \text{ Ga}^{-1}$$

Le taux d'expansion de Hubble vaut donc, avec ces unités

$$H_0 = 67,4 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 67,4 \cdot 3,2409 \times 10^{-20} \text{ s}^{-1} = 2,18 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

$$H_0 = 67,4 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 67,4 \cdot 1,02273 \times 10^{-12} a^{-1} = 6,89 \times 10^{-11} a^{-1}$$

$$H_0 = 67,4 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 67,4 \cdot 1,02273 \times 10^{-3} \text{Ga}^{-1} = 6,89 \times 10^{-2} \text{Ga}^{-1}$$

Ces valeurs donnent le pourcentage d'augmentation des longueurs durant le temps spécifié par l'unité. On a donc que les distances entre les galaxies augmentent actuellement au rythme de

$$2,18 \times 10^{-16} \% \text{ par seconde}$$

$$6,89 \times 10^{-9} \% \text{ par année}$$

$$6,89 \% \text{ par milliard d'années.}$$

## Le facteur d'échelle de l'univers ( $a$ )

On utilise le facteur d'échelle  $a$  pour décrire l'expansion de l'univers. Ce facteur permet de donner les distances entre les galaxies en fonction du temps.

**Par définition, le facteur d'échelle est égal à 1 aujourd'hui.**

Si  $a$  est plus grand que 1, les galaxies sont plus loin les unes des autres qu'en ce moment. Si  $a$  est plus petit que 1, les galaxies sont plus près les unes des autres qu'en ce moment.

Cela signifie qu'on donnera la distance entre les galaxies par la formule suivante.

### Distance dans l'univers

$$D = a \cdot d$$

où  $D$  est la distance à un certain moment,  
 $a$  est le facteur d'échelle à un certain moment  
 et  $d$  est la distance actuelle

Comme les galaxies étaient plus près les unes des autres dans le passé, le facteur d'échelle était inférieur à 1 dans le passé. Un facteur d'échelle de 0,5 signifie que les galaxies étaient toutes deux fois plus près les unes des autres que maintenant. En effet, une galaxie maintenant située à 140 millions d'années était à la distance

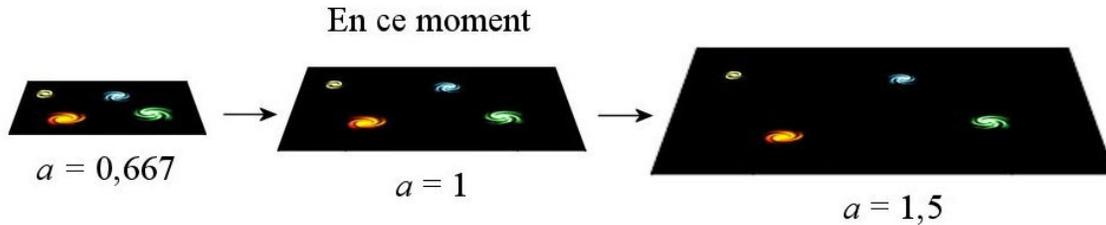
$$D = a \cdot d$$

$$= 0,5 \cdot 140 \text{Mal}$$

$$= 70 \text{Mal}$$

quand le facteur d'échelle était de 0,5. On voit facilement qu'elle était alors deux fois plus près.

Comme les galaxies seront plus éloignées les unes des autres dans le futur, le facteur d'échelle sera supérieur à 1 dans le futur. Un facteur d'échelle de 1,5 signifie que les galaxies seront toutes 1,5 fois plus loin les unes des autres que maintenant.

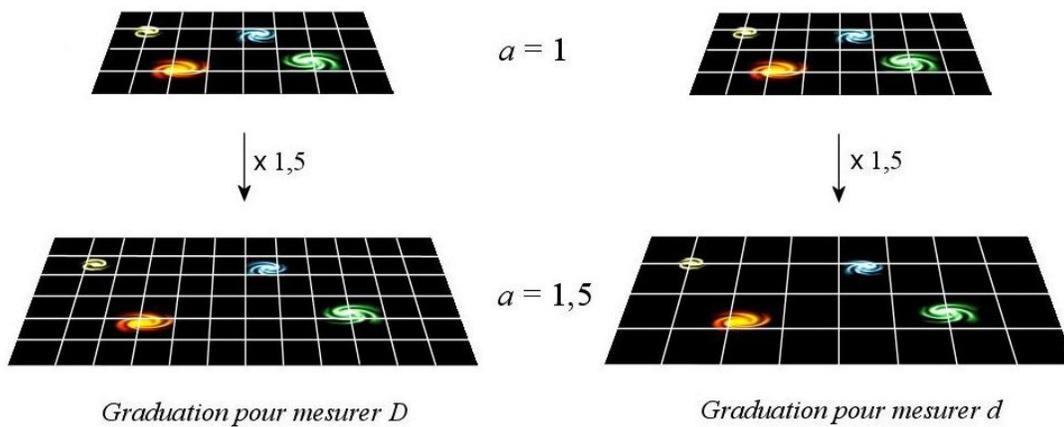


## Deux graduations pour mesurer la distance des galaxies

Voici deux façons de mesurer la distance entre les galaxies dans l'univers.

On peut mesurer la distance avec un système d'axes qui garde toujours les mêmes dimensions malgré l'expansion de l'univers. Avec ces axes, on obtient la distance  $D$  qui est la véritable distance entre les galaxies.

On peut aussi utiliser un système d'axes qui grandit avec l'expansion de l'univers. Avec ces axes, on obtient la distance  $d$ .



En ce moment ( $a = 1$ ), les deux graduations sont identiques. Dans le futur, les graduations servant à mesurer  $D$  resteront à la même distance les unes des autres, alors que la graduation servant à mesurer  $d$  prendra de l'expansion. Quand le facteur d'échelle sera de 1,5, les graduations sur les axes  $d$  seront 1,5 plus loin les unes des autres qu'en ce moment. La loi reliant les deux valeurs  $d$  et  $D$  est

$$D = a \cdot d$$

C'est la même formule qu'auparavant puisque  $d$  est aussi la distance actuelle des galaxies.

Avec l'expansion, la valeur de  $d$  reste toujours la même. Si une galaxie est à  $d = 2$ , alors elle reste toujours à  $d = 2$  puisque la graduation grandit au même rythme que la distance. On peut voir sur la figure que les galaxies gardent les mêmes coordonnées avec les axes mesurant  $d$  malgré l'expansion de l'univers. Quant à la valeur de  $D$  elle change avec

l'expansion. Par exemple, si une galaxie est aujourd'hui à  $D = 2$ , elle sera à  $D = 3$  quand le facteur d'échelle sera de 1,5.

## Le taux d'expansion de Hubble en fonction du facteur d'échelle

En utilisant ces mesures, on peut trouver le lien entre le taux d'expansion de Hubble et le facteur d'échelle de l'univers. On a

$$v = HD$$

Puisque la vitesse correspond au rythme de changement de la distance, on a

$$\frac{dD}{dt} = HD$$

Puisque la distance est  $D = ad$ , on arrive à

$$\frac{d(ad)}{dt} = H(ad)$$

Comme la distance  $d$  d'une galaxie est constante, on a

$$d \frac{da}{dt} = Had$$

$$\frac{da}{dt} = Ha$$

On arrive finalement à l'équation suivante.

### Lien entre le taux d'expansion de Hubble et le facteur d'échelle

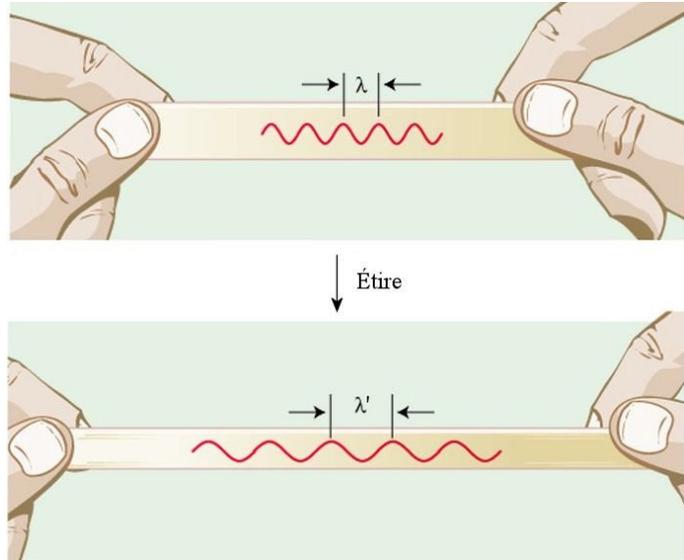
$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

## 14.2 LE DÉCALAGE DES RAIES SPECTRALES

### Étirement des ondes avec l'expansion

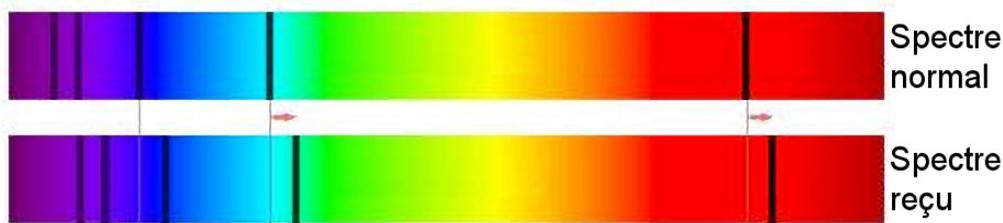
Le gonflement de l'univers n'augmente pas seulement les distances entre les galaxies, il étire également les ondes électromagnétiques qui voyagent dans l'espace, ce qui fait augmenter la longueur d'onde. C'est exactement la même chose que ce qui se passe si on dessine une onde sur une bande élastique et qu'on étire la bande. Ainsi, si le facteur

d'échelle double pendant que la lumière va de la source à la Terre, la longueur d'onde sera deux fois plus grande quand la lumière arrivera sur Terre.



[www.ualberta.ca/~pogosyan/teaching/ASTRO\\_122/lect30/lecture30.html](http://www.ualberta.ca/~pogosyan/teaching/ASTRO_122/lect30/lecture30.html)

Comme toutes les longueurs d'onde reçues seront plus grandes que celle originalement émises, tout le spectre de la lumière sera décalé vers le rouge (qui a une longueur d'onde plus grande dans le spectre visible).



Plus la source est loin, plus l'univers prend de l'expansion durant le voyage de la lumière et plus la longueur d'onde augmente. Ce décalage vers le rouge est donc plus important pour des sources très éloignées pour lesquelles la lumière voyage très longtemps avant d'arriver jusqu'à nous. L'expansion de l'univers selon la relativité prévoit donc qu'il y a un décalage des raies spectrales vers le rouge et que ce décalage augmente avec la distance de la source.



**Erreur fréquente : Penser que le décalage du spectre dû à l'expansion de l'univers est le résultat de l'effet Doppler**

Le décalage des raies des galaxies qui s'éloignent de nous à cause de l'expansion de l'univers provient de l'étirement de l'onde par l'expansion pendant qu'elle se déplace vers la Terre. Elle ne provient pas de l'effet Doppler.

Puisque l'onde s'étire avec l'expansion, la longueur d'onde doit être proportionnelle au facteur d'échelle ( $\lambda$  devient 2 fois plus grand si le facteur d'échelle est 2, 3 fois plus grand si le facteur d'échelle est 3, et ainsi de suite).

$$\lambda \propto a$$

Cela signifie qu'on doit avoir

$$\lambda = (cst) a$$

Si on prend les longueurs d'onde et les facteurs d'échelle à deux moments différents (1 et 2), on a donc

$$\lambda_1 = (cst) a_1$$

$$\lambda_2 = (cst) a_2$$

Selon la première de ces équations, on a

$$(cst) = \frac{\lambda_1}{a_1}$$

En remplaçant dans la deuxième équation, on arrive à

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{a_1} a_2$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

Regardons quel changement de longueur d'onde on obtient pour de la lumière émise dans le passé et arrivant aujourd'hui sur la Terre. On va donner l'indice  $e$ , pour les valeurs de longueur d'onde et de facteur d'échelle de l'univers quand la lumière a été émise ( $e$  pour émission) et l'indice  $r$  pour quand cette lumière arrive sur Terre ( $r$  pour réception). On a donc

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a_r}{a_e}$$

La longueur d'onde à l'émission est la longueur d'onde normalement émise par la source. On a donc  $\lambda_e = \lambda$ . La longueur d'onde à la réception est la longueur d'onde modifiée par l'expansion de l'univers, qu'on appelle, comme toutes les longueurs d'onde modifiées,  $\lambda'$ . On a donc  $\lambda_r = \lambda'$ . Finalement, on reçoit la lumière maintenant, ce qui signifie que le facteur d'échelle à la réception est 1. On a donc  $a_r = 1$ . Cela nous donne

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{a_e}$$

Comme le décalage des raies spectrales est  $\lambda'/\lambda$ , on a

### Décalage des raies spectrales dû à l'expansion de l'univers

$$\delta = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{a_e}$$

## Distance d'une galaxie à partir du décalage (si $z \ll 1$ )

Puisque le décalage augmente si la lumière voyage pendant plus de temps, il doit y avoir un lien entre la distance d'une galaxie et le décalage de la lumière arrivant de cette galaxie. On va supposer que le taux d'expansion de Hubble est constant (en réalité,  $H$  peut changer, mais il n'aura pas le temps de changer beaucoup si la galaxie est près de nous et que la lumière ne prend pas trop de temps pour arriver jusqu'à nous.).

Auparavant, on avait trouvé que

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

En supposant que le taux d'expansion est constant, on peut intégrer pour arriver à

$$\begin{aligned} \frac{da}{a} &= H_0 dt \\ \ln(a) &= H_0 t + cst \end{aligned}$$

La constante d'intégration se trouve en utilisant  $a = 1$  à  $t = 0$  (on définit donc le  $t = 0$  comme étant aujourd'hui). On trouve alors que la constante est nulle. On a donc

$$\begin{aligned} \ln(a) &= H_0 t \\ a &= e^{H_0 t} \end{aligned}$$

Si la valeur de  $H_0 t$  est petite (c'est le cas pour les galaxies près de nous), on peut utiliser  $e^x \approx 1 + x$  pour arriver à

$$a = H_0 t + 1$$

On peut maintenant utiliser ce résultat dans la formule du décalage spectral. Comme on est maintenant à  $t = 0$ , la lumière a été émise dans le passé au temps  $-t$ . On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'}{\lambda} &= \frac{1}{a_e} \\ \frac{\lambda'}{\lambda} &= \frac{1}{1 + H_0(-t)} \\ \delta &= \frac{1}{1 - H_0 t} \\ \delta &\approx 1 + H_0 t \end{aligned}$$

(Pour la dernière ligne, on a utilisé le fait que  $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$  pour de petites valeurs de  $x$ .)

Puisque  $z = \delta - 1$ , on a

$$z = H_0 t$$

Pour une galaxie à une distance  $D$ , le temps nécessaire pour que la lumière arrive est

$$t = D / c$$

et l'équation du décalage devient

$$z \approx \frac{H_0}{c} D$$

Puisque  $H_0 = 0,0689 \text{ Ga}^{-1}$ , on a

$$\begin{aligned} z &\approx \frac{0,0689 \text{ Ga}^{-1}}{c} D \\ &\approx \frac{1}{14,51 \text{ Ga} \cdot c} D \end{aligned}$$

Notez que quand on multiplie un temps en années par la vitesse de la lumière, on obtient une distance en année-lumière. On a donc

### Distance à partir du décalage (si $z \ll 1$ )

$$z \approx \frac{D}{14,51 \text{ Gal}}$$

(Toutes les approximations faites ici font que cette formule n'est valide que pour de petits  $z$ , disons inférieur à 0,1. La véritable relation entre  $z$  et  $D$  est plus complexe que cela. En gros, cela veut dire que la relation obtenue ici est assez bonne pour des galaxies à moins de 1,5 milliard d'années-lumière environ.)

Le lien entre le décalage et la distance peut être utilisé pour trouver la distance de galaxies très éloignées.

### Exemple 14.2.1

Une raie spectrale ayant normalement une longueur d'onde de 500 nm a une longueur d'onde de 528 nm dans le spectre de la galaxie Cygnus A.

a) Quel est le décalage  $\delta$  de la lumière reçue ?

Le décalage pour cette galaxie est

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\lambda'}{\lambda} \\ &= \frac{528 \text{ nm}}{500 \text{ nm}} \\ &= 1,054 \end{aligned}$$

- b) Quel était le facteur d'échelle de l'univers quand la lumière de cette galaxie a été émise ?

Le facteur d'échelle à l'émission était

$$\delta = \frac{1}{a_e}$$

$$1,054 = \frac{1}{a_e}$$

$$a_e = 0,9488$$

- c) Quelle est la distance de cette galaxie ?

Puisque  $z = 0,054$ , la distance est

$$z \approx \frac{D}{14,51Gal}$$

$$0,054 = \frac{D}{14,51Gal}$$

$$D = 784Mal$$

Évidemment, la distance trouvée de cette façon ou avec la loi de Hubble-Lemaître reste assez approximative. Par contre, c'est la seule façon qu'on a de connaître la distance des galaxies qui sont tellement éloignées qu'il est impossible d'y voir des céphéides ou même des supernovas.

C'est exactement ce genre de calcul qui laissait croire que les quasars étaient très éloignés de la Terre. Quand on a fait le spectre des premiers quasars au début des années 1960, on a obtenu des résultats surprenants. Personne ne reconnaissait les raies d'émission ou d'absorption du spectre ! En 1963, Maarten Schmidt se rend compte que ces spectres sont tout simplement très décalés vers le rouge. Par exemple, le spectre du quasar 3C 273 est décalé de 16 % (les longueurs d'onde sont 16 % plus grandes que les valeurs de longueurs d'onde normales). Avec un tel décalage de  $z = 0,16$ , on trouve que la lumière a été émise quand le facteur d'échelle de l'univers était de 0,8621 et que la distance de la galaxie est de 2,36 Gal. (Ce n'est pas exactement la véritable distance parce qu'on sort un peu du domaine de validité de la formule de distance avec un  $z$  aussi grand, mais ça donne quand même une idée de l'énorme distance du quasar.)

## La découverte de l'expansion par Hubble

Durant les années 20, l'étude de la relativité générale avait permis de déterminer qu'il devait y avoir un tel décalage proportionnel à la distance pour les galaxies à moins de 1 Gal de nous. Restait à voir si ce décalage existait vraiment.

On avait déjà un indice puisqu'on avait déjà commencé à mesurer le décalage spectral des nébuleuses spirales. En 1914, Vesto Slipher annonçait que les 12 nébuleuses spirales qu'il a examinées montrent presque toutes des spectres décalés vers le rouge. En 1925, il observait toujours la même tendance avec un échantillon comprenant maintenant 40 nébuleuses. Toutefois, il aurait été difficile de confirmer les prévisions de la relativité puisqu'on ne connaissait pas la distance de ces nébuleuses spirales et qu'on ne savait même pas que ces nébuleuses étaient en fait des galaxies. (En plus, pratiquement tous les astronomes ignoraient les prévisions de la relativité.)

C'est seulement en 1925 qu'on se rend compte que ces nébuleuses spirales sont en fait d'autres galaxies quand Edwin Hubble parvient à calculer la distance de certaines d'entre elles grâce aux céphéides. Désormais, on pouvait comparer la distance des galaxies et leur décalage spectral. C'est Hubble lui-même qui se lance dans l'étude de cette comparaison en 1928. Étant un des rares astronomes à connaître la cosmologie relativiste (du moins une partie), il veut vérifier si le décalage est effectivement proportionnel à la distance des galaxies.

En 1929, Hubble présente ce qu'il obtient avec 46 galaxies (dont 24 pour lesquelles il considère que la distance est assez certaine). Les données montrent que le décalage est bel et bien proportionnel à la distance. Hubble reste plutôt prudent et il n'interprète pas vraiment le résultat obtenu. En tout cas, il ne le présente pas comme une confirmation de la relativité, mais simplement comme une observation pouvant avoir plusieurs interprétations. La relativité n'est présentée que comme une possibilité parmi d'autres.

Durant la première moitié des années 1930, la grande majorité des astronomes arrivent à la conclusion qu'un univers en expansion est la seule hypothèse qui peut expliquer les résultats de Hubble. On venait de mettre en évidence que l'univers est en expansion.

## 14.3 LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

### Ce que permet d'obtenir la relativité

En relativité, la densité d'énergie (ou de matière, il n'y a pas de différence en relativité générale entre les deux selon la formule  $E = mc^2$ ) et la pression déterminent comment va évoluer l'univers. (Dans ce chapitre, on utilise le terme *densité* pour la masse volumique puisque la masse volumique est une densité d'énergie en relativité.) En partant des équations de densité et de pression de ce qu'il y a dans l'univers (on peut mettre n'importe quoi), on obtient la valeur des éléments suivants en fonction du temps :

1. Le facteur d'échelle.
2. Le taux d'expansion de Hubble.
3. La courbure de l'univers.

On a déjà expliqué, ce que sont le taux d'expansion de Hubble et le facteur d'échelle, mais pas la courbure de l'univers.

## La courbure de l'univers

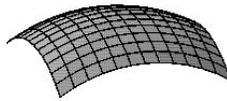
Il est assez difficile d'expliquer le concept de courbure directement pour un espace en trois dimensions. Pour nous simplifier la tâche, on va donc imaginer qu'on a affaire à un univers ayant uniquement deux dimensions. Dans cet univers, il y a des habitants bidimensionnels. Ces habitants perçoivent les deux dimensions de leur univers, mais ne peuvent percevoir la troisième dimension.

Cet espace en deux dimensions peut alors être représenté par une simple feuille. Nous montrerons ici des feuilles qui ont une certaine taille, donc un bord, ce qui pourrait laisser penser qu'il y a une fin à cet univers. Pour l'instant, voyez cette feuille comme simplement une partie d'un univers plus vaste. Nous reviendrons plus tard à la question de la taille de l'univers.

Il est possible que cette feuille soit courbée. Mathématiquement, il y a trois possibilités de courbure. On peut avoir une courbure négative, nulle ou positive.



Courbure nulle



Courbure positive



Courbure négative

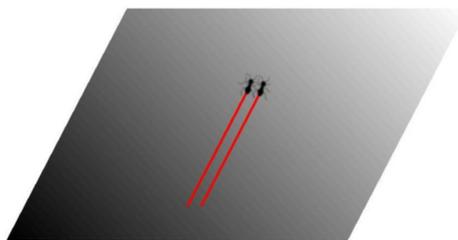
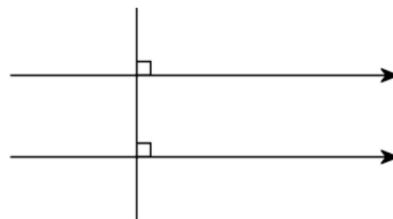
[www.astro.ucla.edu/~wright/cosmo\\_03.htm](http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmo_03.htm)

Un habitant de cet univers en deux dimensions ne peut percevoir la troisième dimension et il ne peut donc pas percevoir directement que son univers a une courbure dans la troisième dimension. Il existe cependant des façons pour que cet habitant puisse déterminer si la feuille de son univers a une courbure.

La courbure de l'univers doit être la même partout, car on suppose que l'univers est uniforme. On ne pourrait pas avoir une moitié de l'univers avec une courbure positive et une autre moitié avec une courbure négative.

### Les lignes parallèles

Pour tracer des droites parallèles, on prolonge deux droites situées à une certaine distance l'une de l'autre et perpendiculaires à une autre droite.



[astronomy.nmsu.edu/geas/lectures/lecture28/slide03.html](http://astronomy.nmsu.edu/geas/lectures/lecture28/slide03.html)

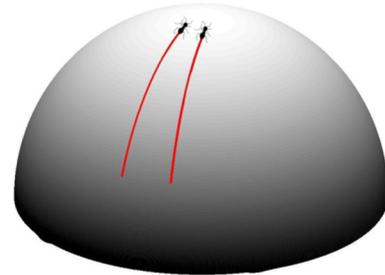
On sait, selon nos études de géométrie, que si on prolonge ces deux droites, elles resteront toujours à la même distance l'une de l'autre et ne se croiseront jamais. Autrement dit, si deux insectes marchent en lignes droites en partant perpendiculairement à une ligne droite, ils marcheront côte à côte en restant toujours à la même distance l'un de l'autre.

Ça, c'est ce qui se produit dans un univers plat.

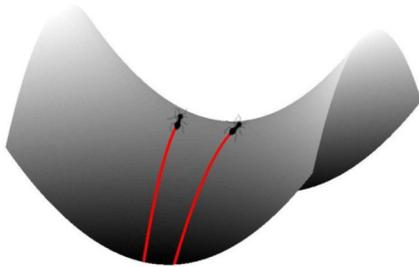
*Dans un univers plat (courbure nulle), les droites parallèles restent toujours à la même distance l'une de l'autre et ne se croisent pas.*

C'est ce que nous avons appris en géométrie, mais c'est vrai uniquement pour un univers plat. Dans un monde où l'espace est courbé, le résultat est différent.

L'univers en deux dimensions à courbure positif est une sphère. Regardons ce qui arrive dans ce cas si nos deux insectes partent perpendiculairement à une droite dans ce monde. Les insectes pourraient partir, par exemple, de l'équateur à la surface de la Terre. En partant à  $90^\circ$  de cette ligne, les deux insectes se dirigent directement vers le pôle. Dans ce cas, les deux insectes s'approchent l'un de l'autre pendant leur déplacement pour finalement se rencontrer au pôle. On arrive donc à la conclusion suivante.



*Dans un univers à courbure positive, les droites parallèles s'approchent l'une de l'autre et finissent par se croiser.*



L'univers à deux dimensions à courbure négative ressemble à une selle de cheval ou à une croustille *Pringle*. Regardons ce qui arrive dans ce cas si nos deux insectes partent perpendiculairement à une droite dans ce monde. Dans ce cas, la forme de la surface amène les deux insectes à s'éloigner l'un de l'autre pendant qu'elles marchent sur la surface en partant à  $90^\circ$  d'une ligne droite.

*Dans un univers à courbure négative, les droites parallèles s'éloignent l'une de l'autre.*

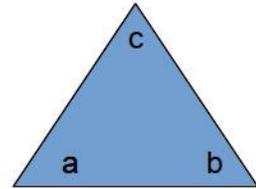
L'habitant du monde à deux dimensions, qui ne peut pas percevoir directement la courbure de son monde, peut donc faire l'expérience suivante pour déterminer la courbure de son univers : il trace une ligne droite et trace deux autres lignes droites perpendiculaires à celle-ci. Il prolonge ces droites pour déterminer si elles s'approchent, restent à la même distance ou s'éloignent l'une de l'autre. Si elles s'approchent l'une de l'autre, il vit dans un monde à courbure positive, si elles restent à la même distance l'une de l'autre, il vit dans un monde plat et si elles s'éloignent l'une de l'autre, il vit dans un monde à courbure négative.

### Les triangles

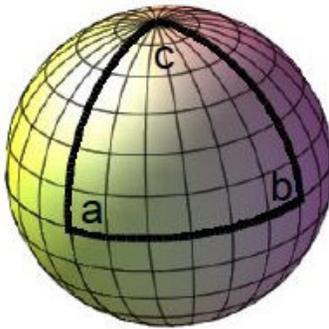
On sait tous que la somme des angles d'un triangle est de  $180^\circ$ . Cependant, ce résultat n'est valide que dans un monde plat.

*Dans un univers plat (courbure nulle), la somme des angles d'un triangle est de  $180^\circ$ .*

$$a + b + c = 180^\circ$$



La situation est bien différente dans un univers courbé. Regardons ce qui arrive si on trace un triangle sur une surface ayant une courbure positive.



Prenons un triangle un peu particulier. Le triangle de la figure a un côté correspondant à l'équateur de la sphère. Aux points a et b, distants d'un quart de la circonférence, deux lignes partent perpendiculairement à l'équateur pour aller se rencontrer au pôle. Puisque les lignes allant vers le pôle partent perpendiculairement à l'équateur, les angles a et b sont de  $90^\circ$ . Comme les points a et b sont distants d'une distance égale au quart de la circonférence, l'angle c au pôle est également égale à  $90^\circ$ . La somme des angles est donc de  $270^\circ$ . Ce n'est pas  $180^\circ$ .

En fait, sur une surface à courbure positive, on a toujours la situation suivante :

*Dans un univers à courbure positive, la somme des angles d'un triangle est supérieure à  $180^\circ$ .*

$$a + b + c > 180^\circ$$

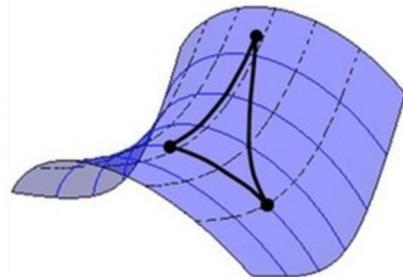
(Voici, en passant, un petit théorème intéressant : L'aire du triangle sur la sphère est donnée par  $(a + b + c - \pi)R^2$  où les angles  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont en radians. On voit donc que l'aire dépend de combien la somme des angles  $a + b + c$  dépasse  $180^\circ$  ( $\pi$  rad). Plus la somme des angles dépasse  $180^\circ$ , plus l'aire du triangle est grande.)

On pourrait argumenter que cette forme n'est pas vraiment un triangle puisque les côtés sont courbés (ils suivent la courbure de la sphère). Cependant, il faut se rappeler que l'habitant d'un tel monde à deux dimensions ne perçoit pas la troisième dimension. Comme la ligne est courbée dans cette troisième dimension, l'habitant ne perçoit pas cette courbure. Pour lui, les trois côtés du triangle sont des lignes parfaitement droites. La somme des angles plus grande que  $180^\circ$  est l'indice lui permettant de se rendre compte qu'il vit dans un monde à courbure positive.

Dans un monde à courbure négative, c'est l'inverse qui se produit.

*Dans un univers à courbure négative, la somme des angles d'un triangle est inférieure à  $180^\circ$ .*

$$a + b + c < 180^\circ$$



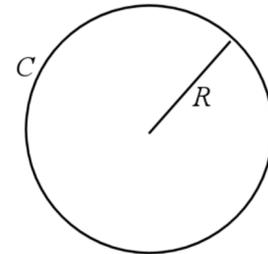
[www.quora.com/Physics/What-does-it-mean-that-the-universe-does-not-have-positive-curvature-but-is-flat](http://www.quora.com/Physics/What-does-it-mean-that-the-universe-does-not-have-positive-curvature-but-is-flat)

Notre habitant peut donc déterminer la courbure de son univers ainsi : il trace un grand triangle dans son univers et mesure l'angle aux trois sommets, puis fait la somme de ces angles. Si la somme est de  $180^\circ$ , il vit dans un monde plat. Si la somme est supérieure à  $180^\circ$ , il vit dans un monde à courbure positive et si la somme est inférieure à  $180^\circ$ , il vit dans un monde à courbure négative.

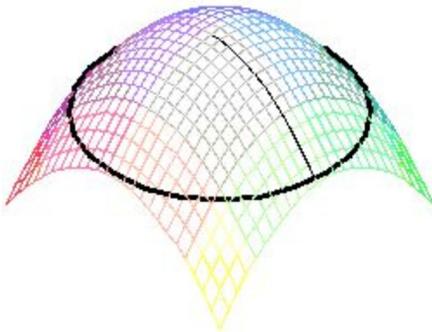
### La circonférence d'un cercle

Dans un monde plat, la circonférence d'un cercle est égale à  $2\pi$  fois le rayon.

$$C = 2\pi R$$



Toutefois, cela n'est vrai que pour un univers plat.



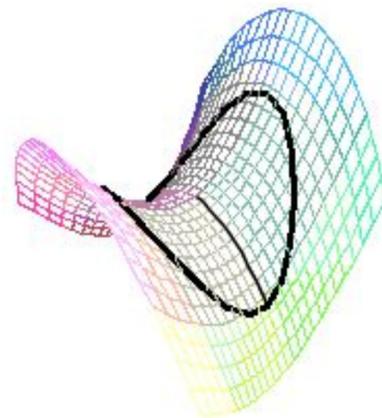
Dans un univers à courbure positive, on voit que la courbure allonge le rayon par rapport à la circonférence. Cela signifie donc que

$$C < 2\pi R$$

[www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-sphericon2](http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-sphericon2)

Dans un univers à courbure négative, on voit que la courbure allonge le rayon par rapport à l'univers plat, mais elle allonge encore plus la circonférence. Cela signifie donc que dans ce cas

$$C > 2\pi R$$



Notez encore une fois que notre habitant ne perçoit pas que la circonférence monte et descend dans l'univers à courbure négative. Ces oscillations se font dans la troisième dimension, qu'il ne perçoit pas. Pour lui, la circonférence du cercle reste toujours à la même hauteur (en fait, une hauteur nulle puisqu'il n'y a pas de hauteur dans ce monde).

Voici donc comment notre habitant de ce monde en deux dimensions pourrait déterminer la courbure de son espace. Il trace un immense cercle et mesure la circonférence et le rayon de ce cercle. Si la circonférence vaut exactement  $2\pi$  fois le rayon, il vit dans un univers plat. Si la circonférence vaut moins que  $2\pi$  fois le rayon, il vit dans un univers à courbure positive et si la circonférence vaut plus que  $2\pi$  fois le rayon, il vit dans un univers à courbure négative.

Notre monde en trois dimensions

Pour nous, des habitants d'un monde en trois dimensions, nous ne pouvons percevoir directement la courbure de l'univers, tout comme l'habitant du monde en deux dimensions ne pouvait percevoir la courbure de son monde. Cette courbure pourrait être représentée dans une quatrième dimension que l'on ne perçoit pas, mais cela n'est pas obligatoire. D'ailleurs, on ne mentionne pas de telle 4<sup>e</sup> dimension spatiale en relativité.

Par contre, nous pouvons faire certains tests qui vont nous permettre de déterminer la courbure de notre univers.

- On peut tracer des lignes parallèles. Si elles s'approchent l'une de l'autre, on vit dans un monde à courbure positive, si elles restent à la même distance l'une de l'autre, on vit dans un monde plat et si elles s'éloignent l'une de l'autre, on vit dans un monde à courbure négative.
- On peut tracer un grand triangle dans l'univers. Si la somme des angles du triangle est de 180°, on vit dans un monde plat. Si la somme est supérieure à 180°, on vit dans un monde à courbure positive et si la somme est inférieure à 180°, on vit dans un monde à courbure négative.
- On peut tracer un grand cercle et mesurer le rayon et la circonférence. Si la circonférence vaut exactement  $2\pi$  fois le rayon, on vit dans un univers plat. Si la circonférence vaut moins que  $2\pi$  fois le rayon, on vit dans un univers à courbure positive et si la circonférence vaut plus que  $2\pi$  fois le rayon, on vit dans un univers à courbure négative.

On dit que Gauss aurait tenté de faire le test du triangle en 1818. Des arpenteurs auraient été chargés de mesurer la distance exacte entre les sommets de 3 montagnes assez éloignées (la plus grande distance aurait été de 107 km). Avec ces mesures, Gauss aurait calculé que la somme des angles du triangle était de 180° et conclu qu'il vivait dans un univers plat. En fait, c'est un mythe et Gauss n'a jamais fait cela. Gauss a bien fait faire l'arpentage, mais tout ça n'avait rien à voir avec la mesure de la courbure de l'espace.

## L'équation de la relativité générale

Pour déterminer comment évolue le facteur d'échelle de l'univers, le taux d'expansion et la courbure en fonction du temps, il faut résoudre les équations de la relativité générale. Toute la relativité générale est basée sur l'équation suivante.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

Cette équation est d'un niveau assez élevé, mais on peut quand même mentionner que  $R_{\mu\nu}$  et  $R$  sont reliés à la courbure de l'espace et que  $T_{\mu\nu}$  est une matrice dans laquelle on retrouve la densité d'énergie et la pression.

En supposant que l'univers est homogène, on arrive, avec beaucoup d'étapes que nous ne donnerons pas ici vu le niveau de ces mathématiques, à des équations plus simples. Parmi ces équations, on a l'équation suivante, qu'on va appeler l'équation de la relativité.

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho - H^2$$

Dans cette équation,  $a$  est le facteur d'échelle,  $\rho$  est la densité de ce qu'il y a dans l'univers et  $H$  est le taux d'expansion de Hubble. La valeur de la constante  $k$  dépend de la courbure de l'univers. Si  $k$  est nul, la courbure est nulle, si  $k$  est positif, la courbure est positive et si  $k$  est négatif, la courbure est négative.

L'équation de la relativité est l'équation que nous utiliserons pour déterminer l'évolution de l'univers. Il ne reste qu'à choisir ce qu'on va mettre dans notre univers.

## 14.4 LES UNIVERS COMPOSÉS DE MATIÈRE

### L'équation de la relativité pour ces modèles

Dans ces modèles d'univers, on considère qu'il n'y a que de la matière et que cette matière est répartie uniformément dans l'univers. L'équation de la relativité devient alors

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m - H^2$$

où  $\rho_m$  est la densité de la matière (en kg/m<sup>3</sup>). Pour résoudre cette équation, il faut savoir comment change la densité de matière en fonction du facteur d'échelle. Puisque la densité est égale à la masse divisée par le volume, on va la calculer en prenant un cube de dimension  $L \times L \times L$ .

$$\rho_m = \frac{m}{L^3}$$

Or, cette matière se retrouve dans un cube de plus en plus grand à mesure que l'univers prend de l'expansion. En fait, les dimensions du cube varient avec le facteur d'échelle selon l'équation suivante.

$$L = aL_0$$

Dans cette équation,  $a$  est le facteur d'échelle et  $L_0$  est la dimension du cube en ce moment. On a donc

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{m}{L^3} \\ &= \frac{m}{(aL_0)^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{m}{a^3 L_0^3}$$

$$= \frac{1}{a^3} \frac{m}{L_0^3}$$

La masse divisée par les dimensions actuelles du cube donne la densité actuelle de la matière.

$$\rho_{m0} = \frac{m}{L_0^3}$$

On a alors

### Variation de la densité de matière avec l'expansion de l'univers

$$\rho_m = \frac{1}{a^3} \rho_{m0}$$

L'équation de la relativité pour un univers uniquement composé de matière est donc

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^3} \rho_{m0} - H^2$$

La solution de cette équation dépend du signe de  $k$  et donc de la courbure de l'univers (qui, on le verra bientôt, dépend de la densité de matière). Les solutions de cette équation ont été obtenues par Friedmann en 1922 et par George Lemaitre en 1927 (qui ne connaissait pas les travaux de Friedmann).

## 14.5 LE MODÈLE D'EINSTEIN-DE SITTER

Commençons par développer le modèle le plus simple, c'est-à-dire un univers plat dominé par de la matière. Ce modèle fut développé en premier par Friedmann en 1922. Toutefois, il fut davantage exploré par Einstein et de Sitter en 1931. C'est pour cela qu'il est connu sous le nom de Einstein-de Sitter.

### La densité critique

Si la courbure de l'univers est nulle, on a  $k = 0$  et l'équation de la relativité devient

$$0 = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^3} \rho_{m0} - H^2$$

On remarque premièrement que, pour que les 2 termes s'annulent, cet univers doit avoir une densité très précise qui dépend du taux d'expansion de Hubble. On peut trouver la valeur de cette densité actuelle de l'univers à partir de la valeur actuelle du taux d'expansion en posant  $a = 1$ .

$$\frac{8\pi G}{3} \rho_{m0} = H_0^2$$

$$\rho_{m0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

Si on calcule cette densité. On obtient

$$\rho_{m0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$= \frac{3(2,18 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1})^2}{8\pi(6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2})}$$

$$= 8,53 \times 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Puisqu'un proton a une masse de  $m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , cette densité est de

$$\rho_{m0} = 5,10 \frac{m_p}{\text{m}^3}$$

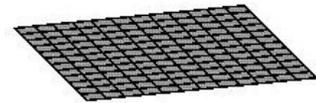
Cette valeur de densité moyenne de l'univers est appelée la densité critique actuelle de l'univers. On va noter cette densité  $\rho_{c0}$ .

### Densité critique de l'univers

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\rho_{c0} = 8,53 \times 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 5,10 \frac{m_p}{\text{m}^3} \quad (\text{si } H_0 = 67,4 \text{ km/s/Mpc})$$

Tout cela signifie que l'univers rempli de matière a une courbure nulle uniquement si la densité moyenne actuelle est égale à cette densité critique.



Courbure nulle

### Le facteur d'échelle en fonction du temps

On peut ensuite trouver le facteur d'échelle en fonction du temps pour cet univers qui a une densité égale à la densité critique et une courbure nulle en faisant la solution de l'équation suivante.

$$0 = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^3} \rho_{c0} - H^2$$

Puisque

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

on arrive à

$$0 = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^3} \rho_{c0} - \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2$$

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{c0}}{3} \frac{1}{a}}$$

Cette équation est assez facile à résoudre. En réorganisant, on arrive à

$$\sqrt{a} da = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{c0}}{3}} dt$$

En intégrant de chaque côté, on arrive à

$$\int \sqrt{a} da = \int \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{c0}}{3}} dt$$

$$\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{c0}}{3}} t + Cst$$

Cette équation permet au facteur d'échelle de prendre une valeur nulle (c'est le cas ici si  $t = 0$  et  $Cst = 0$ ). Une valeur nulle du facteur d'échelle correspond à la naissance de l'univers, sur lequel nous reviendrons au chapitre suivant. Si on prend que  $t = 0$  à la naissance de l'univers ( $a = 0$ ), cela veut dire que la constante d'intégration est nulle.

En isolant  $a$ , on arrive alors à

$$a = \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{c0}}{3}} t \right)^{\frac{2}{3}}$$

Puisque

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

on peut écrire notre solution sous la forme suivante.

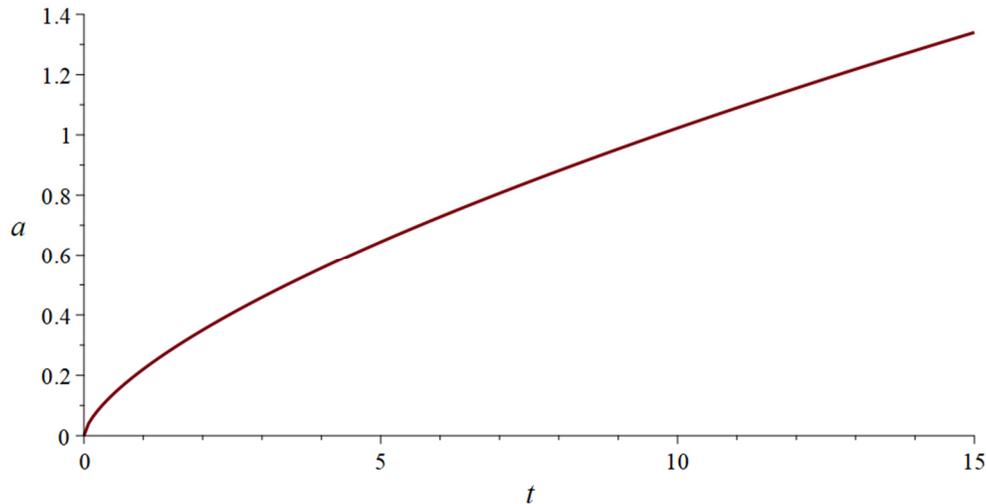
$$a = \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}}$$

Avec  $H_0 = 0,0689 \text{ Ga}^{-1}$ , on arrive à

$$a = \left( \frac{3}{2} \cdot 6,89 \times 10^{-2} \text{ Ga}^{-1} \cdot t \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$a = \left( \frac{t}{9,67 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Voici un graphique montrant la valeur du facteur d'échelle en fonction du temps (en Ga) dans le modèle d'Einstein-de Sitter avec  $H_0 = 67,4 \text{ km/s/Mpc}$ .



On voit qu'il s'agit d'un univers qui serait toujours en expansion puisque la valeur de  $a$  augmente continuellement.

## L'âge de l'univers

Puisque l'univers a maintenant un facteur d'échelle de 1, la valeur actuelle de  $t$ , qu'on va appeler  $t_A$  pour *temps actuel*, serait, avec ce modèle,

$$a = \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$1 = \left( \frac{3}{2} H_0 t_A \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t_A = \frac{2}{3H_0}$$

Avec  $H_0 = 0,0689 \text{ Ga}^{-1}$ , on arrive à

$$t_A = 9,67 \text{ Ga}$$

L'univers aurait donc 9,67 milliards d'années si c'est le modèle d'Einstein-de Sitter qui le décrit correctement.

Notez qu'au départ, Hubble avait obtenu une valeur du taux d'expansion beaucoup plus grande, de l'ordre de  $500 \text{ km/s/Mpc}$ , parce qu'il avait confondu deux types d'étoiles variables. Avec une telle valeur, l'âge de l'univers est de seulement 1,3 milliard d'années. Il semblait y avoir un formidable désaccord avec l'âge de la Terre qui est de 4,5 milliards

d'années (quoiqu'à cette époque, on l'estimait plutôt aux environs de 2 milliards d'années). Comme la Terre ne pouvait pas être plus vieille que l'univers, c'était un peu gênant.

Les erreurs de mesure de distance des galaxies ne sont corrigées qu'en 1952 par Walter Baade. Avec la nouvelle calibration des distances, Allan Sandage obtient, en 1958, une valeur du taux d'expansion de Hubble se situant entre 50 et 100 km/s/Mpc. Ces valeurs donneraient un âge de l'univers se situant entre 6,5 et 13 milliards d'années selon le modèle d'Einstein-de Sitter. On obtenait alors un âge de l'univers beaucoup plus plausible.

Cependant, le problème persistait. À la fin des années 1990, on obtenait un âge de l'univers d'environ 10 milliards d'années avec le modèle d'Einstein-de Sitter alors que les plus vieilles étoiles de l'univers semblaient avoir près de 12 milliards d'années. Toutefois, on ne s'en faisait pas tant que ça. La valeur du taux d'expansion de Hubble était encore plutôt imprécise (entre 50 et 85 km/s/Mpc en 1996) et les modèles donnant l'évolution des étoiles, qui permettaient de déterminer l'âge des étoiles, n'étaient peut-être pas parfaits.

## Le taux d'expansion de Hubble en fonction du temps

Puisque

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

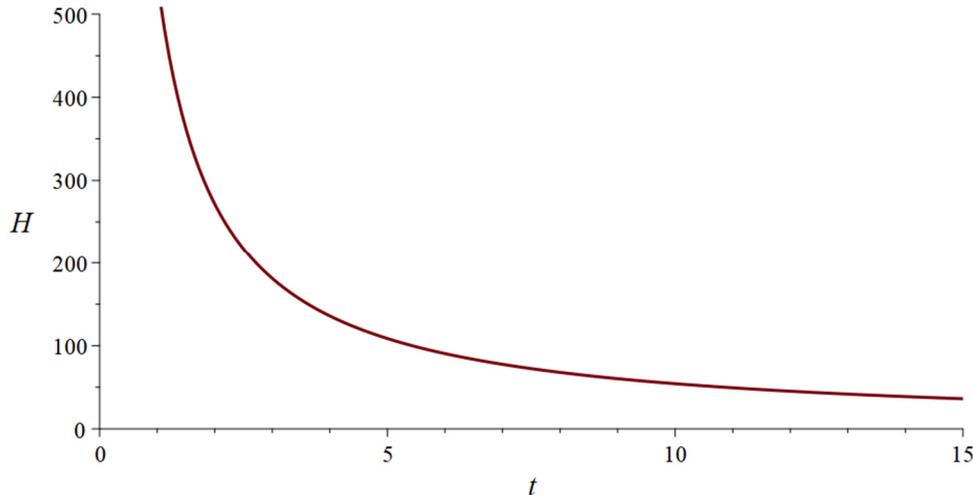
Le taux d'expansion de Hubble pour le modèle d'Einstein-de Sitter est

$$\begin{aligned} H &= a^{-1} \frac{da}{dt} \\ &= \left( \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{-1} \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left( \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{-1} \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{3}{2} H_0 \right) \end{aligned}$$

Si on simplifie, on arrive à

$$H = \frac{2}{3t}$$

Ainsi, dans le modèle d'Einstein-de Sitter, la valeur du taux d'expansion de Hubble diminue avec le temps pour atteindre 67,4 km/s/Mpc à un âge de 9,67 Ga et ensuite s'approcher de 0. Voici le graphique de  $H$  en fonction du temps pour le modèle de Einstein-de Sitter.



## 14.6 LES MODÈLES DE FRIEDMANN

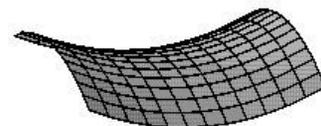
L'univers uniquement rempli de matière est décrit par le modèle d'Einstein-de Sitter seulement si la densité de l'univers est exactement égale à la densité critique. Si la densité est différente, il est décrit par un des deux modèles de Friedmann.

### La densité est plus petite que la densité critique

Revenons à l'équation de la relativité

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^3} \rho_{m0} - H^2$$

Quand la densité est égale à la densité critique, les deux termes de droite s'annulent mutuellement et la courbure  $kc^2/a^2$  est nulle. Cependant, si la densité est plus petite que la densité critique, le premier terme de droite est plus petit que  $H^2$  et les deux termes ne s'annulent plus. On obtient plutôt un résultat négatif et on a donc un univers possédant une courbure négative.



Courbure négative

On va écrire cette formule sous une forme un peu plus utile. Pour y arriver, on utilise le rapport entre la densité actuelle et la densité critique actuelle notée par le symbole  $\Omega_{m0}$ .

$$\Omega_{m0} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}}$$

Pour l'univers ayant une courbure négative, on a  $\Omega_{m0} < 1$  (pour le modèle d'Einstein-de Sitter, on a  $\Omega_{m0} = 1$ ).

L'équation de la relativité peut alors s'écrire sous la forme suivante.

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^3} \Omega_{m0} \rho_{c0} - H^2$$

Mais puisque

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

on peut l'équation sous cette forme

$$\frac{kc^2}{a^2} = H_0^2 \frac{1}{a^3} \Omega_{m0} - H^2$$

De plus, on doit aussi avoir que  $a = 1$  quand  $H = H_0$ . Cela veut dire que

$$\begin{aligned} \frac{kc^2}{1^2} &= H_0^2 \frac{1}{1^3} \Omega_{m0} - H_0^2 \\ kc^2 &= H_0^2 (\Omega_{m0} - 1) \end{aligned}$$

L'équation de la relativité prend alors forme suivante.

$$\frac{H_0^2 (\Omega_{m0} - 1)}{a^2} = H_0^2 \frac{1}{a^3} \Omega_{m0} - H^2$$

En réorganisant cette équation, on arrive à

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 \left( \frac{1}{a^3} \Omega_{m0} - \frac{\Omega_{m0} - 1}{a^2} \right) \\ \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 &= H_0^2 \left( \frac{1}{a^3} \Omega_{m0} - \frac{\Omega_{m0} - 1}{a^2} \right) \\ \frac{da}{dt} &= H_0 \sqrt{\frac{1}{a} \Omega_{m0} - (\Omega_{m0} - 1)} \end{aligned}$$

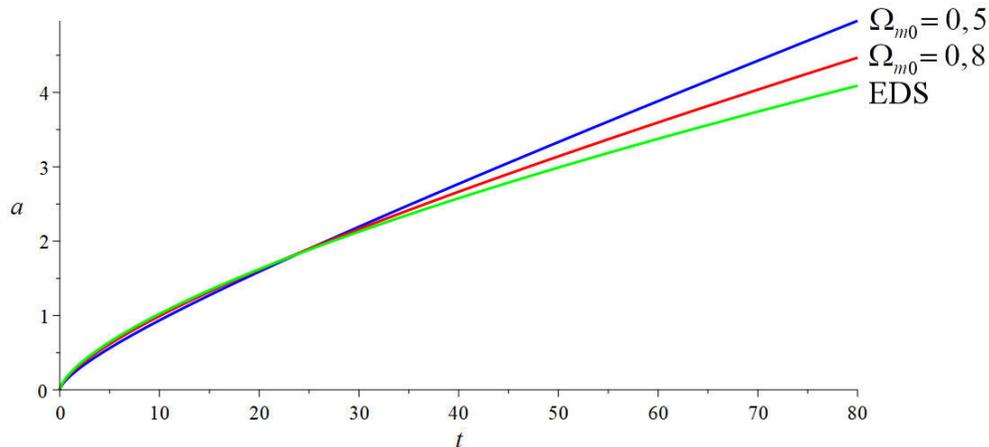
Finalement, il faut intégrer cette équation pour trouver la valeur de  $a$  en fonction du temps.

La solution de cette intégrale pour  $\Omega_{m0} < 1$  existe, mais elle n'est pas facile à obtenir.

(Voyez ce document pour voir la solution de cette équation

<https://physique.merici.ca/astro/Solutionouvert.pdf>)

Avec cette solution (qu'on ne donne pas ici), on peut tracer le graphique de  $a$  en fonction du temps. Voici le graphique du facteur d'échelle en fonction du temps pour le modèle de Friedmann avec  $\Omega_{m0} = 0,8$  et  $\Omega_{m0} = 0,5$  et un taux d'expansion de Hubble en ce moment de 67,4 km/s/Mpc.



Dans ces modèles, l'univers prend continuellement de l'expansion comme dans le modèle d'Einstein-de Sitter, mais avec un rythme différent. Dans les modèles de Friedmann avec une densité inférieure à la densité critique, la courbe de  $a$  en fonction du temps devient pratiquement une droite pour des valeurs de  $t$  élevée.

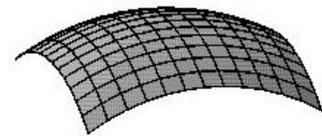
On peut trouver l'âge de l'univers en trouvant à quel instant on a  $a = 1$ . Si la densité était de 0,8 fois la densité critique, l'univers aurait un âge de 10,10 milliards d'années, alors que son âge serait de 10,93 milliards d'années si la densité était la moitié de la densité critique.

## La densité est plus grande que la densité critique

Avec l'équation de la relativité

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^3} \rho_{m0} - H^2$$

on voit que si la densité est plus grande que la densité critique, le premier terme de droite est plus grand que  $H^2$  et les deux termes ne s'annulent plus. On obtient plutôt un résultat positif et on a donc un univers possédant une courbure positive.



Courbure positive

Pour cet univers ayant une courbure positive, on a  $\Omega_{m0} > 1$ .

L'équation à résoudre reste la même,

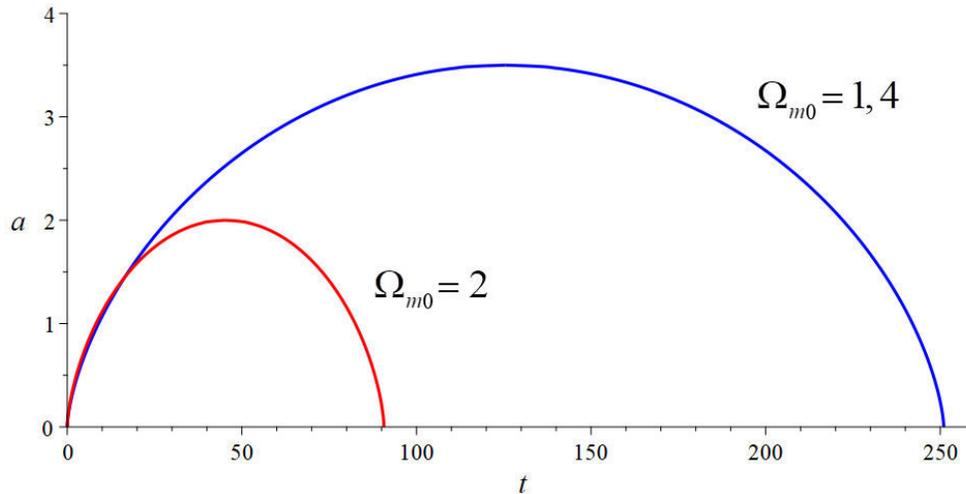
$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\frac{1}{a} \Omega_{m0} - (\Omega_{m0} - 1)}$$

mais la solution est un peu différente quand  $\Omega_{m0} > 1$ .

(Voyez ce document pour voir la solution de cette équation

<https://physique.merici.ca/astro/Solutionferme.pdf>)

Avec cette solution (qu'on ne donne pas ici), on peut tracer le graphique de  $a$  en fonction du temps. Voici le graphique du facteur d'échelle en fonction du temps pour le modèle de Friedmann avec  $\Omega_{m0} = 1,4$  et  $\Omega_{m0} = 2$  et un taux d'expansion de Hubble en ce moment de 67,4 km/s/Mpc.



Si la densité est 1,4 fois plus grande que la densité critique, l'univers prend de l'expansion jusqu'à atteindre un facteur d'échelle de 3,5 quand l'âge de l'univers est de 125,5 milliards d'années. Puis le facteur d'échelle se met à diminuer et les galaxies commencent à se rapprocher les unes des autres. L'univers disparaît après une vie de 251 milliards d'années quand le facteur d'échelle redevient nul. Avec une telle densité, l'univers aurait un âge de 8,96 milliards d'années.

Si la densité est 2 fois plus grande que la densité critique, l'univers prend de l'expansion jusqu'à atteindre un facteur d'échelle de 2 quand l'âge de l'univers est de 45,35 milliards d'années. Puis le facteur d'échelle se met à diminuer et les galaxies commencent à se rapprocher les unes des autres. L'univers disparaît après une vie de 90,7 milliards d'années. Avec une telle densité, l'univers aurait un âge de 8,24 milliards d'années en ce moment.

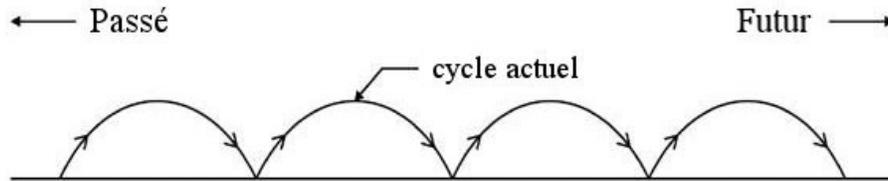
Chose certaine, on peut difficilement imaginer que notre univers puisse avoir une densité plus grande que 10 fois la densité critique. Avec une telle densité, l'âge de l'univers serait d'à peine 5 milliards d'années, ce qui ne laisserait pas assez de temps pour que le Soleil se forme et brûle de l'hydrogène pendant 4,5 milliards d'années.

Les univers qui reviennent ainsi à une valeur de  $a = 0$  s'appellent des univers fermés. Ce modèle porte donc le nom de *modèle de Friedmann fermé*. La contraction de l'univers dans la deuxième moitié de sa vie amène toutes les galaxies à s'approcher les unes des autres jusqu'à ce que les distances entre les galaxies deviennent nulles. Cette mort de l'univers s'appelle le *Big Crunch*.

Les univers dans lesquels  $a$  augmente sans cesse s'appellent des univers ouverts. Le modèle de Friedmann où la densité de la matière est inférieure à la densité critique s'appelle donc le *modèle de Friedmann ouvert*.

## L'univers cyclique

Un univers qui disparaît après une contraction pourrait très bien recommencer un autre cycle pour faire un autre univers. On pourrait alors obtenir une suite d'expansion et de contraction.



[media.radiosai.org/journals/Vol\\_06/01MAR08/04-musings.htm](http://media.radiosai.org/journals/Vol_06/01MAR08/04-musings.htm)

On obtient alors un univers cyclique, dont l'existence n'a pas de début et pas de fin. Les premiers à évoquer cette idée sont Friedmann (1922), Takeuchi (1930), Einstein (1931) et Tolman (1931).

## 14.7 LEQUEL DE CES MODÈLES REPRÉSENTE NOTRE UNIVERS ?

Pour déterminer lequel de ces modèles représente notre univers, on doit évidemment déterminer quelle est la densité moyenne de l'univers. Le rapport de cette densité par rapport à la densité critique nous indiquera lequel de ces trois modèles représente notre univers. Évidemment, il faudrait être pas mal chanceux pour tomber exactement sur la densité critique.

### Mesure de la densité

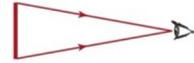
On a vu quelques techniques utilisées pour déterminer les masses dans l'univers. En réalité, il y a bien d'autres méthodes. Dans les années 90, on commençait à avoir suffisamment de données précises pour calculer la densité moyenne de l'univers. Au moins 8 méthodes différentes arrivaient à des valeurs se situant aux alentours de 30 % de la densité critique. Selon les mesures actuelles, cette densité moyenne est de  $1,61 m_p/m^3$ , ce qui représente seulement 31,5 % de la densité critique ( $\Omega_m = 0,315$ ) (valeur qui inclut toute la matière sombre qu'on découvre avec la gravitation). Avec une telle densité, l'univers serait décrit par le modèle de Friedmann ouvert, aurait un âge de 11,66 milliards d'années, aurait une courbure négative et grandirait sans cesse.

Pourtant, peu de personnes ont pensé que ce modèle était le bon. Pratiquement tous les astrophysiciens des années 80 et 90 s'accordaient pour dire que le modèle d'Einstein-de Sitter devait être le bon (à ce moment, les incertitudes sur la densité n'excluaient pas que la densité puisse être égale à la densité critique, sauf à la fin des années 90). Pourtant, il faut être très chanceux pour que la densité de l'univers soit exactement égale à la densité critique. Pourquoi pensait-on cela alors ?

## La largeur angulaire des galaxies

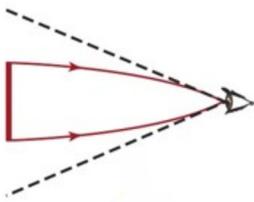
Dans un univers plat, les rayons lumineux voyagent en ligne droite. Si on observe un objet à une distance  $D$ , la largeur angulaire de l'objet est

$$\alpha = \frac{d}{D}$$



[medium.com/starts-with-a-bang/how-big-is-the-entire-universe-f3fdd468d3db](https://medium.com/starts-with-a-bang/how-big-is-the-entire-universe-f3fdd468d3db)

où  $d$  est le diamètre de l'objet. (On a fait l'approximation des petits angles  $\tan \alpha \approx \alpha$ .)



Dans un univers ayant une courbure positive (donc un univers de Friedmann fermé), la lumière se déplace comme on le montre sur la figure de gauche (page suivante). La largeur angulaire d'un objet lointain (comme une galaxie) semblerait alors plus grande qu'elle ne l'est en réalité, un peu comme s'il y avait une lentille convergente. Dans ce cas, la largeur angulaire est donnée par

$$\alpha = \frac{d}{R \sin\left(\frac{d}{R}\right)}$$

où  $R$  est le rayon de courbure de l'univers. Notez que la taille angulaire devient très grande si  $d = \pi R$ . (La formule donne une taille infinie, mais ce résultat n'est pas vraiment valide puisque l'approximation des petits angles ne tient plus dans ce cas.) Comme on ne voit pas telles galaxies qui ont une taille angulaire immense, on en conclut que le rayon de courbure de l'univers doit être très grand, en tout cas beaucoup plus grand que la grandeur de l'univers visible. On doit donc être assez près d'un univers plat.

Dans un univers ayant une courbure négative (donc un univers de Friedmann ouvert), la lumière se déplacerait comme on le montre sur la figure de droite. La largeur angulaire des galaxies lointaines semblerait alors plus petite, un peu comme s'il y avait une lentille divergente. Dans ce cas, la largeur angulaire est donnée par

$$\alpha = \frac{d}{R \sinh\left(\frac{d}{R}\right)}$$



(Ce  $\sinh$  est un sinus hyperbolique que vous avez sur votre calculatrice. On en reparlera plus loin.) Comme on ne voit pas telles galaxies qui ont une taille angulaire anormalement petite, on en conclut encore une fois que le rayon de courbure de l'univers doit être très grand, en tout cas beaucoup plus grand que la grandeur de l'univers visible. On doit donc être assez près d'un univers plat.

## La densité initiale

On a dit qu'il fallait être assez chanceux pour tomber pile sur la densité critique. En fait, on va montrer ici qu'il faut être tout aussi chanceux pour avoir n'importe quel modèle de

Friedmann ouvert ou fermé pouvant correspondre à un univers possible. Pour cela, on va trouver comment change  $\Omega_m$  avec le facteur d'échelle.

On sait que la densité de matière change avec le facteur d'échelle selon la formule suivante.

$$\rho_m = \frac{1}{a^3} \rho_{m0}$$

On sait que la densité critique (qui change avec le temps puisque  $H$  change) est

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{3H^2}{8\pi G} \\ &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \frac{H^2}{H_0^2} \\ &= \rho_{c0} \frac{H^2}{H_0^2} \end{aligned}$$

$\Omega_m$  est donc

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{\rho}{\rho_c} \\ &= \frac{\frac{1}{a^3} \rho_{m0}}{\rho_{c0} \frac{H^2}{H_0^2}} \\ &= \frac{1}{a^3} \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{m0} \end{aligned}$$

Pour savoir comment change  $\Omega_m$  avec  $a$ , il nous faut le lien entre  $H$  et  $H_0$ . On trouve ce lien avec l'équation de la relativité.

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m - H^2$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{kc^2}{a^2} &= H^2 \left( \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_m - 1 \right) \\ \frac{kc^2}{a^2} &= H^2 \left( \frac{1}{\rho_c} \rho_m - 1 \right) \\ \frac{kc^2}{a^2} &= H^2 (\Omega_m - 1) \\ kc^2 &= a^2 H^2 (\Omega_m - 1) \end{aligned}$$

Ce résultat signifie que

$$a^2 H^2 (\Omega_m - 1) = \text{constante}$$

On peut calculer la valeur de cette constante avec les valeurs actuelles.

$$1^2 H_0^2 (\Omega_{m0} - 1) = \text{constante}$$

Le lien entre  $H$  et  $H_0$  est donc

$$a^2 H^2 (\Omega_m - 1) = H_0^2 (\Omega_{m0} - 1)$$

En utilisant ce lien entre  $H$  et  $H_0$ , on trouve que  $\Omega_m$  est

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \frac{1}{a^3} \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{m0} \\ \Omega_m &= \frac{1}{a^3} \frac{a^2 H^2 (\Omega_m - 1)}{H^2 (\Omega_{m0} - 1)} \Omega_{m0} \\ \Omega_m &= \frac{1}{a} \frac{(\Omega_m - 1)}{(\Omega_{m0} - 1)} \Omega_{m0}\end{aligned}$$

Si on isole  $\Omega_{m0}$  dans cette équation, on arrive à

$$\Omega_{m0} = \frac{a \Omega_m}{a \Omega_m - (\Omega_m - 1)}$$

Cette équation va nous permettre de savoir, par exemple, qu'elle serait la valeur de  $\Omega_{m0}$  si l'univers a une certaine valeur de  $\Omega_m$  à  $a = 0,001$ . Voici ce qu'on obtient.

$\Omega_m$ à $a = 0,001$	$\Omega_{m0}$
0,9	0,0089
0,9985	0,3996
0,9990	0,4997
0,9995	0,6666
1	1
1,0005	1,9990
1,0010	1001

On constate que la valeur de  $\Omega_m$  diverge rapidement de 1 à mesure que l'univers prend de l'expansion. Si  $\Omega_m$  est à peine plus petit que 1 à  $a = 0,001$ , alors  $\Omega_{m0}$  serait nettement inférieur à 1 aujourd'hui et l'univers serait pratiquement vide. Si  $\Omega_m$  est à peine plus grand que 1 à  $a = 0,001$ , alors  $\Omega_{m0}$  serait nettement supérieur à 1 aujourd'hui ou l'univers aurait fait un Big Crunch et n'aurait jamais atteint  $a = 1$  (c'est pour ça qu'on obtient un  $\Omega_{m0}$  négatif si  $\Omega_m$  est plus grand que 1,001001 à  $a = 0,001$ ). C'est comme un crayon en équilibre sur sa pointe. Il reste en équilibre seulement s'il est parfaitement balancé. S'il y a le moindre écart au départ, le crayon tombe et s'écarte de l'équilibre. Pour l'univers, s'il y a le moindre écart avec une densité critique de 1 au départ, la valeur de la densité critique plus tard s'écarte de plus en plus de 1.

Avec un univers de Friedmann fermé qui aurait maintenant une valeur de  $\Omega_{m0} = 2$ , on doit avoir  $\Omega_m = 1,0005$  quand le facteur d'échelle était de 0,001. Comme on a dit que  $\Omega_{m0}$  ne peut pas vraiment être supérieur à 10 en ce moment, la valeur de  $\Omega_m$  pourrait avoir, au maximum, une valeur de 1,0009 quand le facteur d'échelle était de 0,001. Avec un univers de Friedmann ouvert qui aurait maintenant une valeur de  $\Omega_{m0} = 0,3$ , on obtient  $\Omega_m = 0,99767$  quand le facteur d'échelle était de 0,001. On voit que n'importe quelle densité plausible de  $\Omega_{m0}$  nous amène à des valeurs de  $\Omega_m$  très près de 1 à  $a = 0,001$ . Les valeurs plausibles de  $\Omega_m$  seraient encore plus près de 1 si on prenait des valeurs de  $a$  encore plus petites.

Ainsi, tous les modèles (plat, ouvert ou fermé) impliquent que l'univers avait presque la densité critique quand il était très jeune. Ainsi, il faut être aussi chanceux pour avoir un univers plat avec  $\Omega_m = 1$  que pour avoir un univers ouvert ou fermé avec n'importe quelle valeur de  $\Omega_m$  puisqu'il faut toujours avoir la densité critique au départ.

(Notez qu'on peut donner une jolie interprétation de l'équation  $a^2 H^2 (\Omega_m - 1) = \text{constante}$  <https://physique.merici.ca/astro/energie-expansion.pdf>)

## Conclusion

Ainsi, tous les univers dont la densité actuelle semble raisonnable doivent avoir une densité initiale pratiquement égale à la densité critique. On pense donc qu'il y a un mécanisme quelconque qui a amené la densité de l'univers très jeune à une valeur extrêmement près de la densité critique (mécanisme qu'on verra au chapitre suivant). La densité initiale est si près de la densité critique qu'on en est venu à croire que ce mécanisme a nécessairement amené la densité de l'univers à la densité critique et que c'est donc le modèle d'Einstein-de Sitter qui devait être le bon. C'était le modèle privilégié durant les années 80 et 90.

Il y avait cependant deux problèmes importants avec le modèle d'Einstein-de Sitter.

- 1) Le problème de la masse manquante.

La densité critique est de  $5,10 m_p/m^3$  alors que la densité observée, incluant la matière sombre, est de  $1,61 m_p/m^3$ . C'est seulement 31,5 % de la critique. Il y a donc un problème de masse manquante. Près du 2/3 de la masse de l'univers nous échapperait. On se demandait donc où se cachait ce 68,5 % de la matière qu'on ne parvenait pas à détecter, même pas avec la gravitation.

- 2) Le problème de l'âge de l'univers.

L'âge de l'univers dans le modèle d'Einstein-de Sitter est de 9,67 milliards d'années. Or, selon les modèles d'évolution des étoiles, certains amas globulaires auraient un âge de près de 12 milliards d'années. On se demandait donc comment certaines étoiles dans l'univers pouvaient être plus vieilles que l'univers.

Ces problèmes étaient toujours très présents vers l'an 2000 quand tout a changé.

## 14.8 LA CONSTANTE COSMOLOGIQUE

### L'ajout de la constante

Quand Einstein arrive aux équations de la relativité générale, il en vient à utiliser ses équations pour décrire l'ensemble de l'univers (en 1917). Comme tout le monde pense que l'univers est statique (ni en contraction ni en expansion) à cette époque, Einstein cherche à obtenir un tel univers. Cependant, il constate qu'il est impossible d'obtenir un univers statique avec les équations de la relativité générale qu'il a obtenu.

C'est alors qu'Einstein se rend compte que son équation de la gravitation n'est pas l'équation la plus générale permise par la théorie. En effet, l'équation de la relativité générale est une équation qui doit obéir à plusieurs principes de symétrie et Einstein s'aperçoit que toutes les symétries sont encore respectées si on ajoute une constante  $\Lambda$  à l'équation suivante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

pour obtenir

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

Cette constante  $\Lambda$  est appelée la *constante cosmologique*. Dans un univers homogène contenant de la matière, cette équation devient

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_\Lambda) - H^2$$

La constante  $\Lambda$  fait en sorte que le vide agit exactement comme s'il avait une certaine densité d'énergie  $\rho_\Lambda$  (qu'on convertit en densité de masse avec  $E = mc^2$  pour la mettre dans l'équation). On parle donc souvent d'*énergie du vide*. (En anglais, on parle de *dark energy*, à ne pas confondre avec la *dark matter*, qui est la matière sombre.)

Ce qui est particulier, c'est que la densité d'énergie du vide reste toujours la même malgré l'expansion de l'univers. Alors que la densité de matière diminue avec l'expansion (parce que la même matière est diluée dans un espace de plus en plus grand), la densité d'énergie du vide reste constante. On a donc l'impression que la quantité d'énergie augmente avec l'expansion. Toutefois, cette énergie du vide fait une pression négative de sorte que l'énergie totale reste la même avec l'expansion.

(<https://physique.merici.ca/astro/energie-expansion2.pdf> pour plus de détails)

Puisqu'on sait que la densité de matière varie avec  $1/a^3$  et que la densité d'énergie du vide ne change pas avec  $a$ , l'équation de la relativité générale devient

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{m0}}{a^3} + \rho_{\Lambda} \right) - H^2$$

## La constante cosmologique accélère l'expansion à l'univers

Voyons comment cette constante modifie l'évolution de l'univers. On va premièrement réorganiser les termes de l'équation de la relativité pour obtenir

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{m0}}{a^3} + \rho_{\Lambda} \right) - \frac{kc^2}{a^2}$$

On va ensuite utiliser  $\Omega_{m0}$ ,  $\Omega_{\Lambda0}$  et  $\Omega_k$  qui sont

$$\Omega_{m0} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}} \quad \Omega_{\Lambda0} = \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_{c0}} \quad \Omega_k = -\frac{3kc^2}{8\pi G\rho_{c0}}$$

(Notez que ce  $\Omega_k$  est ce qui s'appelle la *courbure de l'univers*.) On obtient alors

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\Omega_{m0}\rho_{c0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda0}\rho_{c0} \right) + \frac{8\pi G}{3} \frac{\Omega_k\rho_{c0}}{a^2}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_{c0}}{3} \left( \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda0} + \frac{\Omega_k}{a^2} \right)$$

Mais puisque

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

on arrive à

$$H^2 = H_0^2 \left( \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda0} + \frac{\Omega_k}{a^2} \right)$$

On utilise ensuite

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

pour obtenir

$$\left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 = H_0^2 \left( \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda0} + \frac{\Omega_k}{a^2} \right)$$

$$\left( \frac{da}{dt} \right)^2 = H_0^2 \left( \frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda0} a^2 + \Omega_k \right)$$

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda0} a^2 + \Omega_k}$$

C'est cette équation qu'on devra résoudre un peu plus tard pour trouver comment le facteur d'échelle quand il y a de l'énergie du vide.

Pour savoir comment chaque terme modifie le facteur d'échelle, on va trouver la 2<sup>e</sup> dérivée de  $a$  pour trouver la concavité de la courbe. Une 2<sup>e</sup> dérivée positive signifie que la courbe est concave vers le haut et que l'expansion de l'univers s'accélère. Une 2<sup>e</sup> dérivée négative signifie que la courbe est concave vers le bas et que l'expansion de l'univers ralentit. En utilisant la règle de dérivation en chaîne, on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{d^2a}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \frac{da}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left( H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 + \Omega_k} \right) \\ &= \frac{d}{da} \left( H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 + \Omega_k} \right) \frac{da}{dt} \\ &= \frac{H_0}{2\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 + \Omega_k}} \left( -\frac{\Omega_{m0}}{a^2} + 2\Omega_{\Lambda 0} a \right) \frac{da}{dt}\end{aligned}$$

Comme on sait que

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 + \Omega_k}$$

on peut remplacer la dérivée à la fin de l'équation pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{d^2a}{dt^2} &= \frac{H_0}{2\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 + \Omega_k}} \left( -\frac{\Omega_{m0}}{a^2} + 2\Omega_{\Lambda 0} a \right) H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 + \Omega_k} \\ &= \frac{H_0^2}{2} \left( -\frac{\Omega_{m0}}{a^2} + 2\Omega_{\Lambda 0} a \right)\end{aligned}$$

Voilà, on y est. On voit que le terme qui dépend de la matière est négatif, ce qui signifie que la matière fait ralentir l'expansion de l'univers. On voit que le terme qui dépend de l'énergie du vide est positif, ce qui signifie que l'énergie du vide fait accélérer l'expansion de l'univers.

Alors que la présence de matière cherche à ralentir l'expansion (comme une force d'attraction), l'énergie du vide tend à faire accélérer l'expansion de l'univers (comme une force de répulsion).

## Le modèle d'Einstein

On se rappelle qu'Einstein voulait un univers statique. C'est exactement ce qu'on peut obtenir avec la constante cosmologique. Comme la matière cherche à faire contracter l'univers et que l'énergie du vide cherche à faire grandir l'univers, on peut avoir un équilibre entre les deux et obtenir un taux d'expansion nulle si on choisit bien la valeur de la densité d'énergie du vide.

Dans un univers statique, on a  $a = 1$ ,  $da/dt = 0$  et  $d^2a/dt^2 = 0$ . Pour obtenir  $d^2a/dt^2 = 0$  quand  $a = 1$ , on doit avoir

$$\begin{aligned}\frac{d^2a}{dt^2} &= \frac{H_0^2}{2} \left( -\frac{\Omega_{m0}}{a^2} + 2\Omega_{\Lambda 0}a \right) \\ 0 &= \frac{H_0^2}{2} (-\Omega_{m0} + 2\Omega_{\Lambda 0}) \\ \Omega_{m0} &= 2\Omega_{\Lambda 0}\end{aligned}$$

On obtient un univers statique si la densité d'énergie du vide est égale à la moitié de la densité d'énergie de la matière.

Comme on doit aussi avoir  $da/dt = 0$  quand  $a = 1$ , l'équation de  $da/dt$ , nous donne

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0}a^2 + \Omega_k} \\ 0 &= H_0 \sqrt{\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_k} \\ 0 &= \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_k \\ 0 &= 2\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_k \\ \Omega_k &= -3\Omega_{\Lambda 0}\end{aligned}$$

On voit que  $\Omega_k$  est négatif. Puisque

$$\Omega_k = -\frac{3kc^2}{8\pi G\rho_{c0}}$$

cela signifie que  $k$  est positif et que la courbure de cet univers est positive. Il s'agit d'un univers à courbure positive ayant un volume limité. On pourrait calculer que le volume de cet univers est  $2\pi^2/\Lambda^{3/2}$ .

Par contre, le modèle statique d'Einstein est instable. La moindre petite perturbation vient briser le fragile équilibre entre contraction et expansion. Par exemple, si, pour une raison quelconque, l'univers d'Einstein prend un peu d'expansion, alors la densité de matière diminue pendant que  $\rho_{\Lambda}$  reste constante. Ainsi, l'expansion provoquée par l'énergie du vide devient plus grande que la contraction provoquée par la matière et l'univers commence à prendre plus d'expansion, ce qui amplifie encore plus la domination de  $\rho_{\Lambda}$  et qui accélère encore plus l'expansion.

## D'où vient l'énergie du vide ?

Premièrement, on peut simplement considérer que  $\rho_\Lambda$  est une constante de la nature et qu'elle ne nécessite pas d'explication, tout comme on ne cherche pas à expliquer la valeur de la constante de gravitation  $G$ . Si c'est le cas, la valeur de  $\rho_\Lambda$  serait définitivement une constante et ne pourrait pas changer en fonction du temps.

On peut aussi chercher d'où vient cette énergie. Pour l'instant, il y a deux principales hypothèses.

1. En physique des particules, il y a effectivement une énergie du vide qui vient de l'énergie minimum de tous les champs présents dans l'univers. Cette énergie minimum n'est pas nulle et on obtient même une densité d'énergie infinie quand on fait le calcul ! Les physiciens ont donc inventé une façon d'obtenir une densité d'énergie nulle avec la *supersymétrie* qui prévoit l'existence d'une particule supersymétrique pour chaque type de particule qui existe. Par exemple, il devrait y avoir une particule supersymétrique associée à l'électron qui s'appellerait le *sélectron* (on ajoute un s devant le nom de la particule). En brisant un peu cette supersymétrie, on pourrait obtenir une valeur d'énergie du vide raisonnable qui pourrait expliquer pourquoi le vide a une énergie. Comme on n'a pas découvert de particules supersymétriques, cette idée reste hypothétique.
2. En physique des particules, il y a un certain type de particules, appelées les *particules scalaires*, qui peuvent imiter parfaitement l'énergie du vide. Il suffirait qu'il y ait un peu de ces particules dans l'univers pour faire le même effet que l'énergie du vide. Comme on n'a pas découvert de particules de ce genre, cette idée reste hypothétique.

Notez qu'avec ces hypothèses, on peut faire des théories dans lesquelles la valeur de  $\rho_\Lambda$  change en fonction du temps ou du facteur d'échelle.

Peut-être que l'énergie du vide n'existe même pas. Des physiciens examinent si l'accélération de l'expansion faite par l'énergie du vide pourrait aussi s'expliquer avec une version modifiée de la gravitation dans laquelle il n'y a pas de constante cosmologique. Pour l'instant, on a de la difficulté à formuler une telle théorie de la gravitation qui donne des résultats en accord avec ce qui se passe dans le Système solaire.

Autrement dit, on n'a pour l'instant aucune idée de l'origine de cette énergie du vide (si elle existe).

## Vie et mort de $\Lambda$

Au début des années 20, tout va bien. L'ajout de la constante cosmologique permettait d'obtenir un univers statique tel que tous l'imaginaient à cette époque.

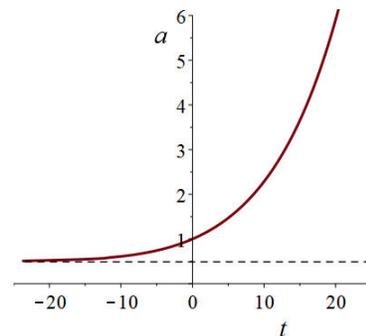
Puis, on voit apparaître les 3 modèles présentés précédemment (Einstein-de Sitter, Friedmann ouvert et Friedmann fermé), trouvés en 1922 par Friedmann et, indépendamment, en 1927 par George Lemaître. Ces modèles décrivent des univers en expansion ou en contraction, mais personne à l'époque ne pense que ces solutions décrivent véritablement notre univers. En 1927, Einstein, qui connaît les travaux de Friedmann et de Lemaître, trouve toujours « abominable » (selon les souvenirs de Lemaître) l'idée d'un univers en expansion.

Quand, au début des années 30, plusieurs arrivent à la conclusion que la découverte du lien entre le décalage des raies et la distance des galaxies par Hubble montre que l'univers est en expansion, tous les modèles prévoyant une expansion deviennent plausibles.

Comme la constante cosmologique avait spécifiquement été ajoutée pour obtenir un univers statique, plusieurs considèrent que cette constante devient complètement inutile. Einstein n'a jamais vraiment aimé la constante cosmologique. Il a dû l'ajouter à sa théorie pour obtenir un univers statique, mais il a toujours pensé que cette solution n'était pas très élégante. Il est bien content de se débarrasser de cette affreuse constante. (On donne souvent une citation d'Einstein disant que l'ajout de la constante cosmologique a été la plus grande erreur de sa vie. Il est fort probable qu'Einstein n'ait jamais dit ça et que ce soit George Gamow qui ait inventé cette histoire.)

Ce dégoût de la constante cosmologique par Einstein et par plusieurs physiciens fait en sorte que beaucoup s'intéressent alors aux modèles où il n'y a pas de constante cosmologique. C'est ainsi qu'Einstein et de Sitter développent, à partir de 1931, le modèle de Friedmann ayant la densité critique, qui commence alors à porter le nom de modèle d'Einstein-de Sitter.

D'autres, au contraire, gardent la constante cosmologique et explorent des solutions des équations de la relativité contenant cette constante (l'univers statique n'est pas la seule solution possible avec une constante cosmologique). Parmi ces solutions, notons tout spécialement le modèle de Lemaître-Eddington. Dans ce modèle, l'univers est initialement un univers d'Einstein dans lequel il manque un peu de matière. Cet univers n'est donc pas en équilibre et prend lentement de l'expansion au départ. Plus la matière se dilue avec l'expansion, plus l'effet de l'énergie du vide domine et plus l'expansion s'accélère. Par exemple, voici le graphique du facteur d'échelle d'un univers de Lemaître ayant un facteur d'échelle initiale de 0,5. Dans ce graphique, on est présentement à  $t = 0$  et la pente à  $t = 0$  correspond au taux d'expansion en ce moment. Dans ce modèle, il y a de l'expansion, mais pas de moment où  $a = 0$ . On voit que  $a$  tend plutôt vers  $a = 0,5$  quand  $t$  tend vers  $-\infty$ . C'est donc un univers qui a un âge infini.



Lemaître avait proposé ce modèle dès 1927. Toutefois, il avait publié les résultats dans un obscur journal belge et il n'a pratiquement rien fait pour faire connaître ce modèle. Quand la cosmologie prend soudainement son envol en 1930, le modèle est proposé à nouveau par

Eddington et devient le modèle d'Eddington-Lemaître. Reste que dans l'article de 1927, Lemaitre a été le premier à sérieusement envisager que notre univers pourrait être en expansion.

Toutefois, il y a de moins en moins de cosmologistes qui pensent qu'il y a une constante cosmologique. Le modèle d'Einstein-de Sitter semble assez bien décrire notre univers sans avoir à ajouter cette affreuse constante. Après 1940, il n'y a presque plus aucun cosmologiste qui utilise les équations qui contiennent la constante cosmologique.

Il semblerait que l'ajout de la constante cosmologique a été inutile. Mais l'avenir réservait une surprise.

## 14.9 LE MODÈLE ACTUEL ( $\Lambda_{cdm}$ )

### La révolution

À la fin des années 1990, l'amélioration des instruments et les mesures faites par de nouveaux satellites font en sorte que la valeur mesurée de plusieurs paramètres devient de plus en plus précise. Il devient alors évident qu'il y a plusieurs éléments du modèle d'Einstein-de Sitter qui sont incompatibles avec d'autres éléments (comme l'âge des plus vieilles étoiles qui est plus grand que l'âge de l'univers par exemple). Plusieurs cosmologistes montrent alors (il y a eu environ une dizaine d'articles scientifiques entre 1985 et 1995) que les observations pourraient s'accorder si on ajoutait une constante cosmologique correspondant à une valeur de  $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0,7$ .

La confirmation de l'existence de cette énergie du vide est arrivée en 1998. Une équipe de chercheur nommée *High-z Supernova Search Team* montre que les distances de supernova calculées à partir de la brillance des supernovas sont en désaccord avec les distances calculées à partir du décalage  $z$  en utilisant le modèle de Einstein-de Sitter (on n'a pas fait ce genre de calcul, mais on va le faire un peu plus loin pour le modèle actuel.) Par contre, ils montrent qu'il y aurait un accord si  $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0,7$  et  $\Omega_{m0} \approx 0,3$ . Presque au même moment, les mesures des variations spatiales du rayonnement de fond cosmologique devenaient plus précises et permettaient de calculer qu'on devait avoir  $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0,7$  et  $\Omega_{m0} \approx 0,3$ . C'était le début de la révolution. En environ 5 ans, presque tous les astronomes passent au modèle contenant de l'énergie du vide.

Il fallait donc ramener la fameuse constante cosmologique. Selon les observations actuelles, on règle tous les problèmes qu'on avait avec le modèle d'Einstein-de Sitter en prenant un modèle ayant les caractéristiques suivantes.

- 1) La densité totale de l'univers est égale à la densité critique et, donc, une courbure nulle (les observations donnent une valeur de  $\Omega_k = 0,0007 \pm 0,0019$ ).
- 2) La densité d'énergie de la matière représente  $31,5 \pm 0,7 \%$  de la densité critique ( $\Omega_{m0} = 0,315$ ).

- 3) La densité d'énergie du vide représente  $68,5 \pm 0,7 \%$  de la densité critique ( $\Omega_{\Lambda 0} = 0,685$ ).

On voit que la somme de la densité de matière et de la densité du vide donne 100 % de la densité critique. La densité d'énergie du vide est près de 3 fois plus grande que la densité d'énergie de la matière. Cette densité d'énergie du vide n'est seulement que de  $\rho_{\Lambda} = 5,83 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$  (68,5 % de la densité critique). C'est très peu quand on la compare à la densité de la matière sur Terre. Si on fait une sphère allant jusqu'à l'orbite de Neptune, la masse correspondant à l'énergie du vide dans ce volume est de  $2 \times 10^{12} \text{ kg}$ , ce qui est environ la masse d'une montagne. On en conclut que l'énergie du vide n'a pas beaucoup d'effet sur la gravitation dans le Système solaire. Mais dans tout l'univers, ça commence à représenter beaucoup d'énergie (l'équivalent de 88 milliards de masses solaires par mégaparsec cube) et l'effet est important pour l'évolution de l'univers.

Une bonne partie du 31,5 % de matière est composée de matière sombre froide (ce qui signifie que sa pression est faible). C'est pour cela que ce modèle s'appelle le modèle  $\Lambda_{cdm}$  ( $\Lambda$  pour la constante cosmologique et cdm pour *cold dark matter*).

## Évolution du facteur d'échelle

Avec l'énergie du vide, l'équation de la relativité nous avait donné

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 + \Omega_k}$$

Puisque la courbure est nulle dans le modèle  $\Lambda_{cdm}$ , on obtient

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2}$$

On doit donc résoudre cette équation pour trouver le facteur d'échelle en fonction du temps.

On obtient la solution en intégrant de chaque côté.

(Voyez les détails ici si vous le désirez : <https://physique.merici.ca/astro/SolutionLcdm.pdf>)

On obtient alors la solution suivante.

$$a = \left( \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}} \sinh \left( \frac{3\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0}{2} t \right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

Vous ne connaissez peut-être pas la fonction sinus hyperbolique (sinh), mais elle n'est pas bien compliquée. Cette fonction est simplement

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

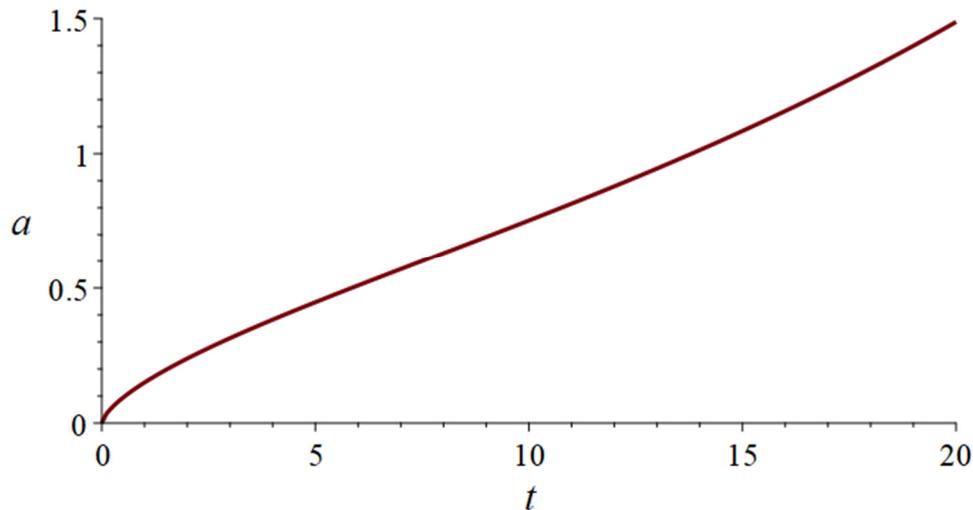
et vous la retrouvez sur toutes les calculatrices scientifiques.

Avec les valeurs de  $\Omega_{m0} = 0,315$ ,  $\Omega_{\Lambda 0} = 0,685$  et  $H_0 = 0,0689 \text{ Ga}^{-1}$ , on obtient

### Facteur d'échelle en fonction du temps

$$a = \left( 0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69 \text{ Ga}}\right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

Voici un graphique montrant la valeur du facteur d'échelle de l'univers en fonction du temps.



Au départ, la densité de matière est plus grande que la densité du vide, et on remarque que la pente du graphique diminue et que le graphique est concave vers le bas. La matière, qui domine, provoque alors un ralentissement de l'expansion. Toutefois, à mesure que l'univers grandit, la densité de matière diminue (la même matière est répartie dans un univers de plus en plus grand) alors que la densité du vide reste la même. Il arrive donc un moment où la densité du vide devient plus grande que la densité de matière (cela s'est produit quand l'univers avait 10,3 milliards d'années). Notez qu'on est passé d'une courbe concave vers le bas à une courbe concave vers le haut quand le facteur d'échelle était de 0,613 (cela s'est produit quand l'univers avait 7,7 milliards d'années). Depuis ce moment, l'expansion de l'univers est de plus en plus rapide.

Notez que ce modèle avait déjà été examiné en 1930 par de Sitter (une solution parmi d'autres solutions proposées) et par Lemaître en 1931. (Mais pas avec des valeurs précises pour les densités.) Le modèle a eu une certaine popularité dans les années 30 avant que les modèles utilisant la constante cosmologique tombent en disgrâce.

## L'âge de l'univers

Puisque l'univers a maintenant un facteur d'échelle de 1, on trouve la valeur de  $t_A$  avec

$$1 = \left( \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda0}}} \sinh \left( \frac{3\sqrt{\Omega_{\Lambda0}} H_0}{2} t_A \right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

En isolant  $t_A$ , on arrive à

$$t_A = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda0}} H_0} \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda0}}{\Omega_{m0}}}$$

(Notez le  $\sinh^{-1}$  qui est la fonction inverse du sinus hyperbolique. Elle est aussi sur votre calculatrice.)

Avec les valeurs de  $\Omega_{m0} = 0,315$ ,  $\Omega_{\Lambda0} = 0,685$  et  $H_0 = 0,0689 \text{ Ga}^{-1}$ , on arrive à

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{2}{3\sqrt{0,685} \cdot 0,0689 \text{ Ga}^{-1}} \sinh^{-1} \sqrt{\frac{0,685}{0,315}} \\ &= 13,80 \text{ Ga} \end{aligned}$$

**L'univers aurait donc un âge de 13,80 milliards d'années selon le modèle actuel.**

### Exemple 14.9.1

Le décalage des raies du quasar 3C 273 est de  $\delta = 1,16$ . Depuis combien de temps voyage cette lumière ?

On commence par trouver le facteur d'échelle à l'émission à partir du décalage.

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\delta} \\ &= \frac{1}{1,16} \\ &= 0,8621 \end{aligned}$$

L'âge de l'univers à l'émission était donc

$$\begin{aligned} a &= \left( 0,6781 \cdot \sinh \left( \frac{t}{11,69 \text{ Ga}} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ 0,8621 &= \left( 0,6781 \cdot \sinh \left( \frac{t_e}{11,69 \text{ Ga}} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ 0,8621^{3/2} &= 0,6781 \cdot \sinh \left( \frac{t_e}{11,69 \text{ Ga}} \right) \\ 1,180 &= \sinh \left( \frac{t_e}{11,69 \text{ Ga}} \right) \end{aligned}$$

$$t_e = 11,69Ga \cdot \sinh^{-1} 1,180$$

$$t_e = 11,73Ga$$

Comme l'âge de l'univers est maintenant de 13,80 Ga, cette lumière a voyagé durant

$$\Delta t = 13,80Ga - 11,73Ga$$

$$= 2,07Ga$$

Cela signifie qu'on voit ce quasar tel qu'il était il y a 2,07 milliards d'années.

## Le taux d'expansion de Hubble en fonction du temps

Puisque

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

le taux d'expansion de Hubble pour ce modèle est

$$H = \left( \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}} \sinh \left( \frac{3\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t}{2} \right) \right)^{-2} \frac{d}{dt} \left( \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}} \sinh \left( \frac{3\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t}{2} \right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

On obtient, après simplification (sachant que la dérivée des  $\sinh x$  est  $\cosh x$ ).

$$H = \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 \frac{\cosh \left( \frac{3\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t}{2} \right)}{\sinh \left( \frac{3\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 \frac{1}{\tanh \left( \frac{3\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t}{2} \right)}$$

Cette fois, ce sont les fonctions cosinus et tangente hyperboliques ( $\cosh$  et  $\tanh$ ) que vous ne connaissez peut-être pas. Ces fonctions sont simplement

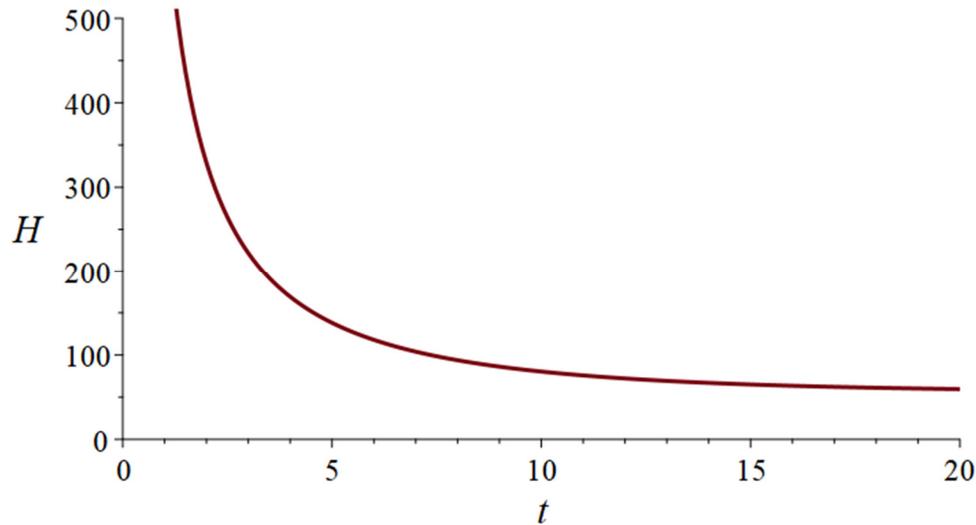
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

et vous les retrouvez sur toutes les calculatrices scientifiques. Avec les valeurs de  $\Omega_{m0} = 0,315$ ,  $\Omega_{\Lambda 0} = 0,685$  et  $H_0 = 67,4 \text{ km/s/Mpc} = 0,0689 \text{ Ga}^{-1}$ , on a

### Taux d'expansion de Hubble en fonction du temps

$$H = 55,8 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \cdot \frac{1}{\tanh \left( \frac{t}{11,69Ga} \right)}$$

Voici un graphique du taux d'expansion de Hubble en fonction du temps.



Encore une fois, le taux d'expansion de Hubble diminue en fonction du temps. Toutefois, il ne tend pas vers 0 comme il le faisait dans le modèle d'Einstein-de Sitter. Ici, sa valeur tend vers 55,8 km/s/Mpc.

### Exemple 14.9.2

Dans combien de temps le taux d'expansion de Hubble vaudra-t-il 65 km/s/Mpc ?

Si  $H = 65 \text{ km/s/Mpc}$ , on a

$$H = 55,8 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \cdot \frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69 \text{ Ga}}\right)}$$

$$65 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 55,8 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \cdot \frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69 \text{ Ga}}\right)}$$

$$1,165 = \frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69 \text{ Ga}}\right)}$$

$$0,8585 = \tanh\left(\frac{t}{11,69 \text{ Ga}}\right)$$

$$t = 11,69 \text{ Ga} \cdot \tanh^{-1}(0,8585)$$

$$t = 15,05 \text{ Ga}$$

(Notez le  $\tanh^{-1}$  qui est la fonction inverse de la tangente hyperbolique. Elle est aussi sur votre calculatrice.)

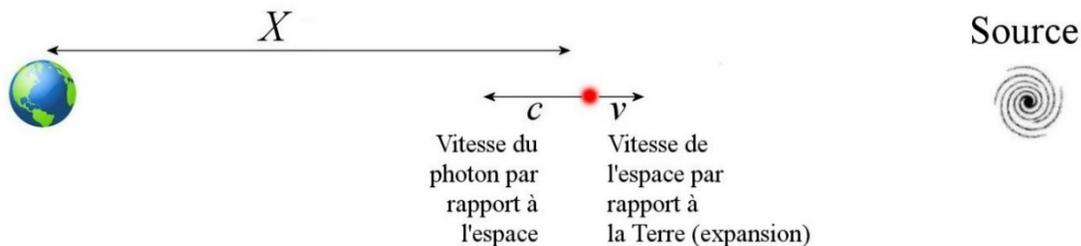
Comme nous sommes déjà à  $t_A = 13,80 \text{ Ga}$ , nous atteindrons cette valeur dans 1,25 Ga.

## La distance parcourue par un photon

Supposons qu'une source très distante envoie un photon vers la Terre. Évidemment, ce photon se déplace dans l'espace à la vitesse de la lumière.

Toutefois, ce photon est aussi entraîné par l'expansion de l'univers. Prenons une analogie pour illustrer l'effet de l'expansion. Imaginons que l'univers est rempli d'eau et que le photon est comme un poisson nageant vers la Terre à une certaine vitesse. L'expansion de l'univers fait alors la même chose qu'un courant s'opposant au mouvement du photon vers la Terre. Plus on est loin de la Terre, plus la vitesse de ce courant est grande. La vitesse totale du poisson vers la Terre est donc plus petite que s'il n'y avait pas de courant. En fait, la vitesse du poisson est égale à sa vitesse de nage moins la vitesse du courant s'opposant à son mouvement.

La situation est similaire pour le photon. Il se dirige vers nous à la vitesse de la lumière, mais l'expansion de l'univers lui donne aussi une vitesse s'opposant à son mouvement vers la Terre.



On a donc que la vitesse résultante ( $dX/dt$ ) est

$$\frac{dX}{dt} = -(c - v)$$

où  $X$  est la distance entre le photon et la Terre. (La dérivée est négative puisque la valeur de  $X$  diminue.)

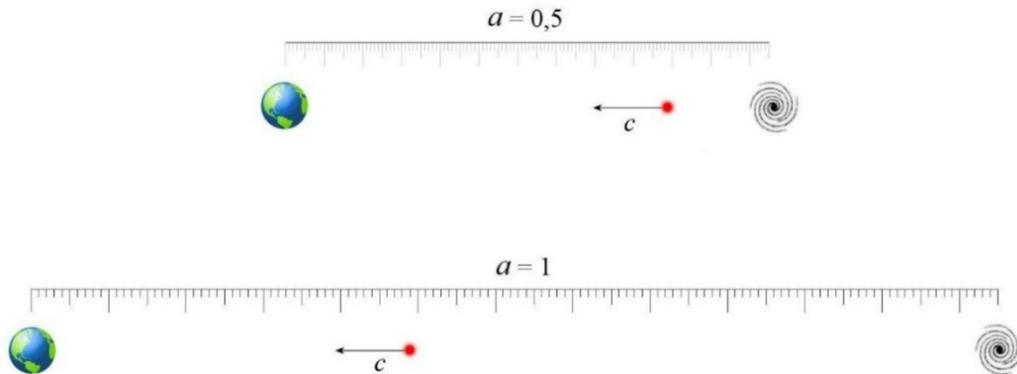
La vitesse d'expansion augmente selon la formule  $v = HX$  en accord avec la loi de Hubble-Lemaître. On a donc

$$\frac{dX}{dt} = -(c - HX)$$

Ensuite, on a vu que la valeur de  $H$  change en fonction du temps. On pourrait remplacer  $H$  par la formule de  $H$  en fonction dans cette équation pour obtenir l'équation différentielle de  $X$ . On pourrait alors isoler  $X$  pour connaître la distance entre le photon et la Terre en fonction du temps. Ça semble simple, mais n'est pas si simple de résoudre l'équation différentielle qu'on obtient.

On peut utiliser une autre approche pour trouver plus facilement la distance de la source. Pour y arriver, on va utiliser le système de coordonnées  $d$ . On se rappelle que ce système de coordonnées grandit avec l'univers, ce qui fait que les objets ont toujours les mêmes

coordonnées, même si l'univers prend de l'expansion. Voici, par exemple, l'axe des  $x$  qui mesure la distance  $d$  quand le facteur d'échelle est de 0,5 et de 1.



La distance entre la Terre et le photon mesurée avec la graduation  $d$  sera notée  $x$  alors que celle mesurée avec la graduation  $D$ , qui mesure la véritable distance, est notée  $X$ .

La vitesse de la lumière est toujours la même. Supposons qu'elle parcourt une certaine distance  $\Delta X$  durant le temps  $\Delta t$ . On doit alors avoir

$$c = \frac{\Delta X}{\Delta t}$$

Comme la distance mesurée sur la graduation  $d$  se trouve avec  $\Delta X = a\Delta x$ , on a

$$c = \frac{a\Delta x}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{c}{a}$$

Ainsi, si le facteur d'échelle est de 0,5,  $x$  change au rythme de  $6 \times 10^8$  m/s. C'est normal que ça change deux fois plus vite que normalement parce que l'axe donnant la valeur de  $x$  est comprimé par rapport aux vraies distances de sorte que les graduations sont deux fois plus près.

Si on prend un temps très petit, on arrive à

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{a}$$

La distance  $x$  parcourue par le photon durant le temps  $dt$  est donc de

$$dx = \frac{c}{a} dt$$

En intégrant de chaque côté, on trouve la distance totale parcourue sur l'axe de  $x$ .

$$x = \int \frac{c}{a} dt$$

## La distance d'une source lumineuse

En prenant des bornes d'intégration allant du temps d'émission du photon ( $t_e$ ) jusqu'au temps de réception du photon sur Terre ( $t_r$ ), on trouve la distance parcourue par le photon pendant son voyage de la source vers la Terre, mesurée avec la graduation  $d$ . Cette distance est évidemment la distance de la source mesurée avec la graduation  $d$ , qui est la distance actuelle de la source. On a donc

$$d = \int_{t_e}^{t_r} \frac{c}{a} dt$$

En utilisant la valeur de  $a$  en fonction du temps pour le modèle  $\Lambda_{\text{cdm}}$  avec les valeurs de  $\Omega_{m0} = 0,315$ ,  $\Omega_{\Lambda 0} = 0,685$  et  $H_0 = 0,0689 \text{ Ga}^{-1}$ , on arrive à la formule suivante.

### Distance actuelle d'une source

$$d = 1,296 \cdot c \int_{t_e}^{t_r} \left( \sinh \left( \frac{t}{11,69 \text{ Ga}} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

(On met les bornes en Ga et le résultat de l'intégrale sera aussi en Ga. Quand on va multiplier ce résultat en Ga par  $1,296c$ , on obtiendra des Gal.)

Malheureusement, il n'y a pas de solution simple à cette intégrale. (Il y a une solution dans laquelle on retrouve une fonction qui s'appelle la fonction hypergéométrique, mais elle est un peu compliquée. De toute façon, cette solution ne servira pas à grand-chose puisque votre calculatrice ne calcule pas la fonction hypergéométrique.) On peut quand même trouver la valeur de l'intégrale avec une intégrale numérique. On peut la faire avec le site suivant.

[https://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+1.296\\*%28sinh%28t%2F11.69%29%29%5E%28-2%2F3%29+from+0+to+13.8](https://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+1.296*%28sinh%28t%2F11.69%29%29%5E%28-2%2F3%29+from+0+to+13.8)

Il ne vous reste qu'à changer les bornes dans « from 0 to 13.80 » pour mettre les temps voulus.

### Exemple 14.9.3

On sait que le décalage des raies du quasar 3C 273 est de 1,16, que le facteur d'échelle de l'univers était de 0,8621 quand la lumière a été émise et que l'âge de l'univers à l'émission était de 11,73 Ga (exemple 14.9.1).

- a) Quelle est la distance de ce quasar en ce moment ?

La distance est

$$d = 1,296 \cdot c \int_{11,73}^{13,80} \left( \sinh \left( \frac{t}{11,69 \text{ Ga}} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

Cette intégrale vaut (on change les bornes dans Wolfram pour « 11.73 to 13.80 »)

$$\begin{aligned}d &= 2,23Ga \cdot c \\ &= 2,23Gal\end{aligned}$$

- b) Quelle était la distance de ce quasar quand il a émis la lumière qu'on reçoit aujourd'hui ?

Puisque le facteur d'échelle à l'émission était de 0,8621, la distance au moment de l'émission était de

$$\begin{aligned}D &= ad \\ &= 0,8621 \cdot 2,23Gal \\ &= 1,92Gal\end{aligned}$$

On voit que le quasar s'est éloigné de 310 millions d'années-lumière pendant que sa lumière s'est dirigée vers nous.

Résumons tous les calculs qu'on doit combiner pour trouver la distance à partir de  $z$  quand on n'a pas  $z \ll 1$ . Notez que si  $z \ll 1$ , c'est plus facile, car on peut utiliser

$$z \approx \frac{D}{14,51Gal}$$

### Exemple 14.9.4

La galaxie JADES-GS-z14-0 est la galaxie connue pour laquelle le décalage est le plus grand (12 décembre 2024). Son décalage est de  $z = 14,32$ . Quelle est la distance actuelle de cette galaxie ?

On commence par trouver le facteur d'échelle à l'émission à partir du décalage.

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\delta} \\ &= \frac{1}{z+1} \\ &= \frac{1}{15,32} \\ &= 0,06527\end{aligned}$$

On trouve ensuite le temps à l'émission en utilisant la formule de  $a$  en fonction du temps.

$$\begin{aligned}a &= \left( 0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ 0,06527 &= \left( 0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t_e}{11,69Ga}\right) \right)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

$$0,06527^{3/2} = 0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t_e}{11,69Ga}\right)$$

$$0,02459 = \sinh\left(\frac{t_e}{11,69Ga}\right)$$

$$t_e = 11,69Ga \cdot \sinh^{-1} 0,02459$$

$$t_e = 0,2875Ga$$

Finalement, on trouve la distance avec

$$\begin{aligned} d &= 1,296 \cdot c \int_{0,2875}^{13,80} \left( \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt \\ &= 33,82Ga \cdot c \\ &= 33,82Gal \end{aligned}$$

### Exemple 14.9.5

La distance actuelle du quasar 3C 273 est de 2,23 Gal.

a) Dans combien de temps arrivera la lumière émise aujourd'hui par le quasar ?

Puisque la distance actuelle est de 2,23 Gal et que le temps à l'émission est de 13,80 Ga, on a

$$2,23Gal = 1,296 \cdot c \int_{13,80}^{t_r} \left( \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

$$2,23Ga = 1,296 \int_{13,80}^{t_r} \left( \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

Pour trouver le temps à la réception, on n'a pas vraiment le choix. Il faut essayer des valeurs de  $t_r$  avec Wolfram jusqu'à ce qu'on tombe sur  $d = 2,23$ .

Après quelques essais, on trouve que

$$t_r = 16,22Ga$$

Comme la lumière est partie à  $t = 13,80$  Ga, la durée de la trajectoire de la lumière est

$$\begin{aligned} \Delta t &= 16,22Ga - 13,80Ga \\ &= 2,42Ga \end{aligned}$$

La lumière arrivera donc dans 2,42 milliards d'années

b) Quelle sera la distance du quasar à ce moment ?

La distance se trouve avec

$$D = ad$$

Pour la trouver, il nous faut le facteur d'échelle à  $t = 16,22 \text{ Ga}$ . Le facteur d'échelle à ce moment sera de

$$\begin{aligned} a &= \left( 0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69\text{Ga}}\right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left( 0,678 \cdot \sinh\left(\frac{16,22\text{Ga}}{11,69\text{Ga}}\right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 1,175 \end{aligned}$$

La distance sera donc de

$$\begin{aligned} D &= ad \\ &= 1,175 \cdot 2,23\text{Gal} \\ &= 2,62\text{Gal} \end{aligned}$$

## Distance entre la Terre et un photon émis par une galaxie lointaine

Examinons maintenant des graphiques montrant quelle était la distance entre la Terre et un photon pendant son trajet vers la Terre pour des sources dont la lumière est reçue en ce moment sur Terre.

Comme on reçoit le photon en ce moment, le temps à la réception est  $13,80 \text{ Ga}$ . La distance  $d$  du photon en fonction du temps est

$$d = 1,296 \cdot c \int_t^{13,80} \left( \sinh\left(\frac{\tau}{11,69\text{Ga}}\right) \right)^{-\frac{2}{3}} d\tau$$

(On a changé la variable dans l'intégrale pour éviter la confusion avec la borne  $t$ .) Comme on veut la véritable distance du photon, on doit multiplier cette distance par le facteur d'échelle, pour obtenir  $D$ . On obtient alors

$$D = 1,296 \cdot c \cdot a \int_t^{13,80} \left( \sinh\left(\frac{\tau}{11,69\text{Ga}}\right) \right)^{-\frac{2}{3}} d\tau$$

Puisque

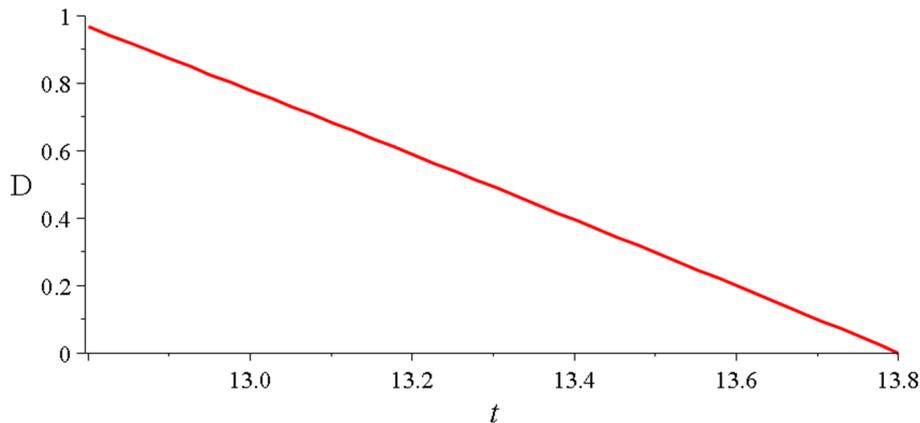
$$a = \left( 0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69\text{Ga}}\right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

la distance en fonction du temps est

$$D = 1,296 \cdot c \cdot \left( 0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right) \right)^{\frac{2}{3}} \int_t^{13,80} \left( \sinh\left(\frac{\tau}{11,69Ga}\right) \right)^{-\frac{2}{3}} d\tau$$

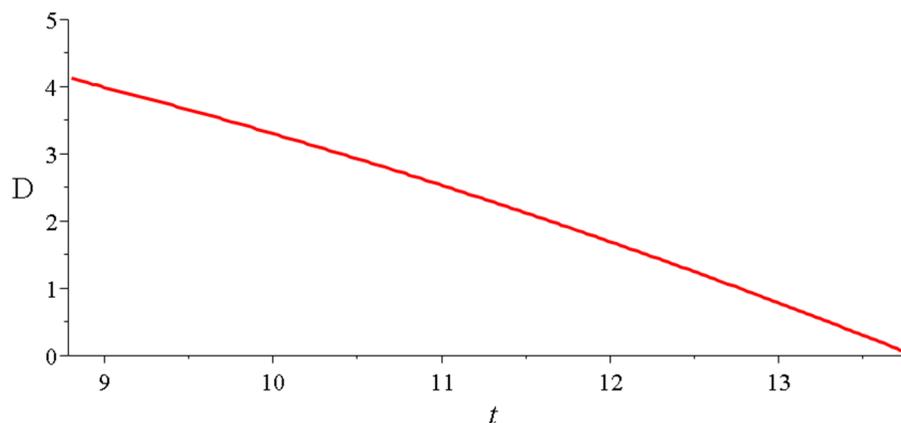
$$= c \cdot \left( \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right) \right)^{\frac{2}{3}} \int_t^{13,80} \left( \sinh\left(\frac{\tau}{11,69Ga}\right) \right)^{-\frac{2}{3}} d\tau$$

On va examiner le graphique de cette fonction. Commençons par une source ayant émis sa lumière il y a un milliard d'années (le graphique commence donc à  $t = 12,80$  Ga).



On remarque que le graphique forme pratiquement une droite. On remarque que quand le photon a quitté la source il y a un milliard d'années, il était pratiquement à 1 milliard d'années-lumière de nous (on a presque  $D = 1$  Ga à  $t = 12,8$  Ga). Ça semble logique que la lumière prenne un milliard d'années pour arriver jusqu'à nous à partir d'une source située à 1 milliard d'années-lumière.

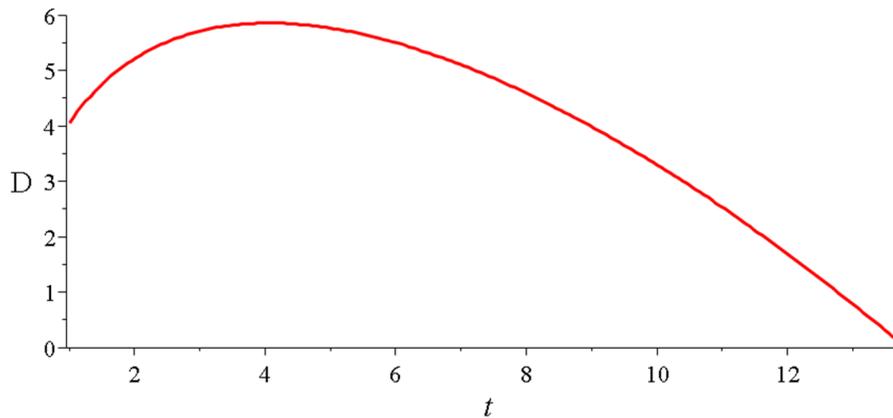
Prenons maintenant un photon émis par une source il y a 5 milliards d'années (le graphique commence à  $t = 8,80$  Ga).



On remarque alors que la distance de la source était de 4,11 milliards d'années-lumière lors de l'émission. Sans expansion, cette lumière serait arrivée en 4,11 milliards d'années, mais avec l'expansion elle est arrivée en 5 milliards d'années. Ce fut un peu plus long parce que

l'expansion s'est opposée au mouvement des photons vers la Terre, ce qui a retardé leur arrivée.

L'effet est encore plus grand si la lumière a été émise vers la Terre il y a 12,8 milliards d'années (le graphique commence à  $t = 1$  Ga).



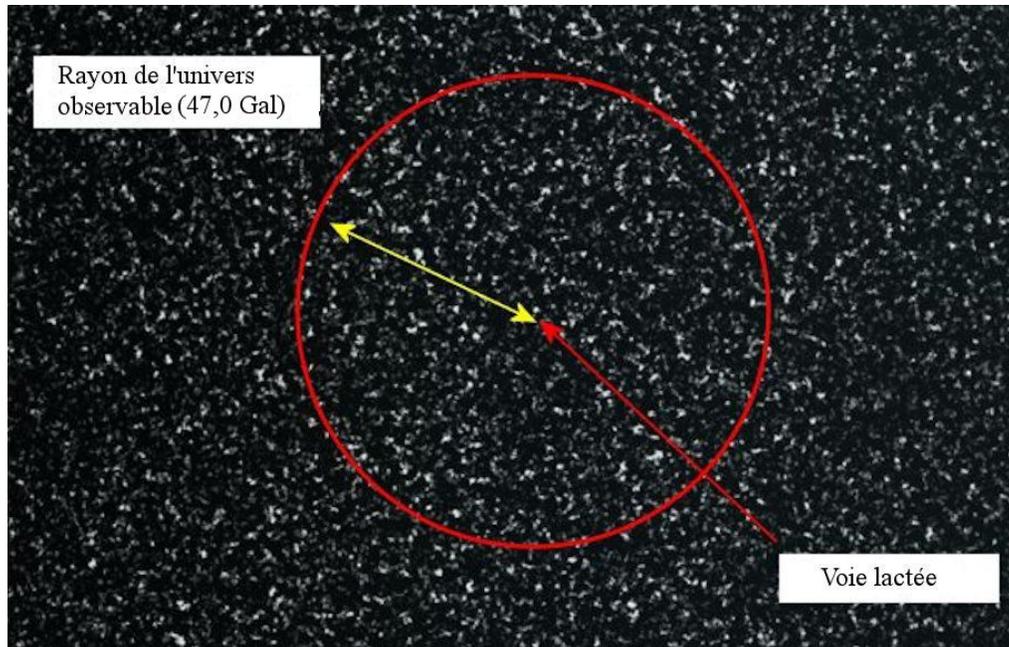
La source était alors à seulement 4,05 milliards d'années-lumière. Ce qui semble surprenant, c'est de voir ces photons s'éloigner de la Terre au départ pour aller jusqu'à une distance de 5,85 milliards d'années-lumière. C'est que l'expansion de l'univers était si rapide à ce moment que l'expansion éloignait les photons situés à cette distance avec une vitesse plus grande que celle de la lumière. Même en se déplaçant vers la Terre dans l'espace à la vitesse de la lumière, les photons s'éloignaient de nous ! Pour reprendre l'analogie du poisson, c'est comme si la vitesse du courant était plus grande que la vitesse du poisson. Le poisson a beau nager vers la Terre, le courant l'éloigne. Cependant, le taux d'expansion de Hubble diminue avec le temps, de sorte que la vitesse d'expansion à l'endroit où se trouvaient les photons a fini par descendre en bas de la vitesse de la lumière (à  $t = 4,06$  Ga) et les photons ont pu commencer à s'approcher de la Terre pour finalement arriver jusqu'à nous aujourd'hui.

## La limite de l'univers observable

À la naissance de l'univers, on avait  $t = 0$ . C'est la plus petite valeur de  $t$  qu'on peut avoir pour l'émission de la lumière. Ainsi, la plus grande distance  $d$  qu'il peut y avoir entre nous et une source qu'on voit aujourd'hui est

$$\begin{aligned} d_{\max} &= 1,296 \cdot c \int_0^{13,80} \left( \sinh \left( \frac{t}{11,69 \text{ Ga}} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt \\ &= 47,0 \text{ Gal} \end{aligned}$$

Ainsi, on ne peut pas voir une source située à plus de 47 milliards d'années-lumière de la Terre. La lumière d'une source plus loin que cette distance n'aurait pas eu le temps d'atteindre la Terre durant les 13,8 milliards d'années de vie de l'univers. Cette distance est donc la limite actuelle de l'univers observable.



### Rayon de l'univers observable : $d_{max} = 47,0 \text{ Gal}$

On n'a jamais vu les galaxies qui sont plus loin que cela. Même avec le meilleur télescope qu'on peut imaginer, on ne pourrait pas les voir.

Le modèle avec énergie du vide a cependant quelque chose de bien particulier. Dans le modèle d'Einstein-de Sitter, la lumière d'une galaxie finirait toujours par arriver jusqu'à nous, peu importe sa distance. Puisque le taux d'expansion de Hubble tend vers 0 avec le temps dans ce modèle, la vitesse d'expansion tend vers 0 et les photons auraient inévitablement une vitesse plus grande que l'expansion à un moment donné et pourraient alors s'approcher de la Terre. Toutes les sources auraient donc fini par entrer dans l'univers observable, quoique ça aurait pu prendre beaucoup de temps pour certaines sources très éloignées.

Dans le modèle  $\Lambda_{cdm}$ , la constante de Hubble diminue pour tendre vers la valeur de  $55,8 \text{ km/s/Mpc}$ . Or, avec un tel taux d'expansion, on atteint une vitesse d'expansion égale à la vitesse de la lumière à une distance de

$$v = HD$$

$$300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 55,8 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \cdot D$$

$$D = 5376 \text{ Mpc} = 17,53 \text{ Gal}$$

Ainsi, si un photon se retrouve à une distance de la Terre plus grande que 17,53 milliards d'années-lumière, la vitesse d'éloignement due à l'expansion sera toujours plus grande que la vitesse de la lumière et ce photon ne pourra jamais s'approcher de la Terre, exactement comme un poisson qui nage moins vite que le courant ne peut pas remonter une rivière.

Cela fait que certaines sources lumineuses ne seront jamais visibles de la Terre, même si on attendait un temps infini. On peut trouver où se situe cette limite en prenant notre formule de la distance d'une source et en posant  $t_e = 0$  (le plus tôt qu'une source peut émettre de la lumière) et  $t_r = \infty$  (la lumière a pris beaucoup de temps pour arriver). On arrive alors à

$$d_{\max} = 1,296 \cdot c \int_0^{\infty} \left( \sinh \left( \frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt = 63,7Gal$$

Ainsi, on ne recevra jamais la lumière d'une source située actuellement à plus de 63,7 milliards d'années-lumière. On ne verra jamais ce qui se passe dans tout l'univers situé actuellement à plus de 63,7 milliards d'années-lumière.

Attention, cette distance est mesurée avec le système d'axe  $d$ . Ce ne sera donc pas la vraie grandeur de l'univers observable, qui est mesurée avec  $D$ . Prenons un exemple pour illustrer, en imaginant qu'on est dans l'univers avec un facteur d'échelle de  $a = 100$ . L'intégrale nous donne alors un univers observable dont le rayon est  $d = 63,6 Gal$ . Avec un facteur d'échelle de 100, cela veut dire que la véritable distance de la limite de l'univers observable sera à une distance de

$$D = ad = 100 \cdot 63,6Gal = 6\,360Gal$$

L'univers observable sera donc immense. On pourrait alors penser qu'une galaxie située à 80 Gal de nous en ce moment va se retrouver dans l'univers visible, mais il faut se rappeler que l'expansion va éloigner cette galaxie. Avec un facteur d'échelle de 100, cette galaxie se retrouvera alors à 8 000 Gal de nous. On voit qu'elle est encore à l'extérieur de l'univers observable. On aurait beau attendre très longtemps, l'expansion poussera toujours cette galaxie à l'extérieur de l'univers observable.

## L'univers observable dans le futur

Dans le futur, on aura donc des galaxies qui s'éloignent de nous avec un taux d'expansion qui se stabilisera à 55,8 km/s/Mpc et une frontière où l'expansion sera plus rapide que la vitesse de la lumière située à 17,53 Gal de nous. Les galaxies vont donc s'éloigner de nous et aller traverser cette frontière et disparaître de l'univers observable. Une fois qu'elles auront traversé cette limite, on ne pourra plus jamais les voir. Tranquillement, les galaxies vont donc toutes disparaître de l'univers observable de sorte qu'il n'y aura plus d'autres galaxies visibles dans l'univers dans environ 100 milliards d'années, à l'exception de notre galaxie, qui sera le résultat de la fusion de la Voie lactée et de la galaxie d'Andromède.

Que voit-on exactement quand la galaxie traverse cette frontière ? Est-ce qu'elle disparaît subitement du ciel ? Non, voici plutôt ce qu'on va voir.

- 1) On va voir une galaxie pour laquelle le temps semble ralentir. En réalité, le temps s'écoule normalement dans cette galaxie, mais comme il faut de plus en plus de temps pour que l'image de la galaxie nous arrive, cela va donner l'impression que

le temps s'écoule au ralenti dans la galaxie. Le temps va donc sembler ralentir jusqu'à se figer sur l'image de la galaxie au moment où elle traverse la limite de l'univers observable.

- 2) La luminosité de la galaxie diminuera à mesure que la galaxie va s'approcher de la limite de l'univers observable. Il y a bien sûr une diminution d'intensité parce que la galaxie est de plus en plus loin, mais il y en a une aussi parce que le temps semblera ralentir. Comme la lumière prend de plus en plus de temps pour arriver jusqu'à nous, le temps entre l'arrivée des photons augmente continuellement, ce qui veut dire que le nombre de photons reçu par seconde diminue sans cesse. Si on reçoit moins de photons par seconde, cela veut dire que la luminosité de la galaxie baisse. Elle baissera jusqu'à devenir nulle pour l'image de la galaxie qui traverse la limite de l'univers observable.
- 3) Le décalage des raies va fortement augmenter quand la galaxie va s'approcher de la limite. Puisque les photons prennent de plus en plus de temps à nous arriver, l'augmentation de la longueur d'onde par l'expansion de l'univers sera de plus en plus importante. Le décalage augmentera sans cesse ce qui fera passer le maximum d'émission de la lumière du visible, à l'infrarouge, aux microondes puis aux ondes radio. Quand la galaxie arrive à la limite de l'univers observable, le décalage devient infini et la lumière a une longueur d'onde infinie.

Curieusement, cela ressemble à ce qu'on observe quand de la matière traverse l'horizon d'un trou noir...

C'est donc faux de dire qu'on ne verra plus de galaxies qu'on voit en ce moment. De façon correcte, on a toujours les voir, mais on va les voir figer à une certaine distance et devenir de moins en moins brillante. En examinant bien, on pourra toujours les voir.

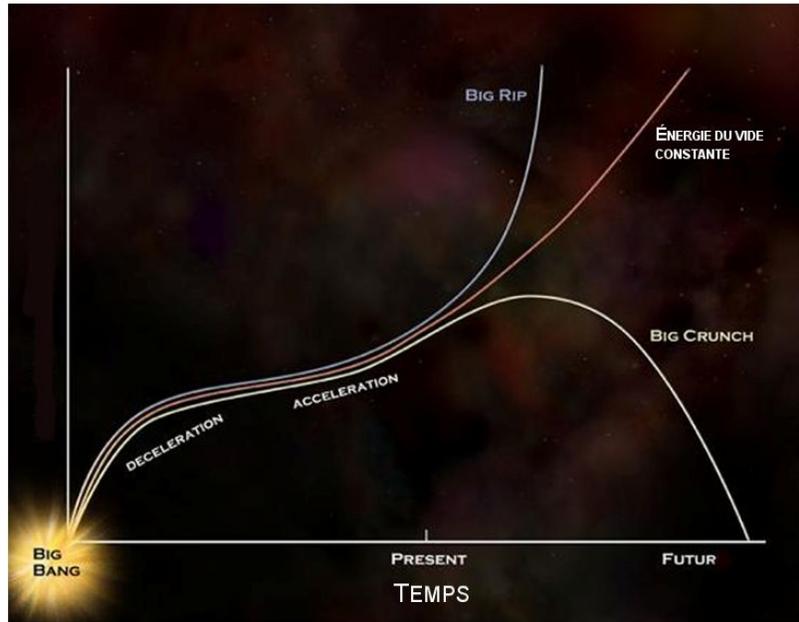
## Et si la constante cosmologique n'était pas constante ?

Si on considère  $\rho_\Lambda$  comme une simple constante de la nature, elle aura toujours la même valeur. Cela signifie que l'univers prendra toujours de l'expansion et grandira sans cesse, comme on l'a vu sur le graphique du taux d'expansion en fonction du temps pour le modèle  $\Lambda_{\text{cdm}}$ . Au bout d'un temps assez long, on se retrouve avec un univers observable vide, avec seulement notre galaxie au centre. On appelle ce résultat le *Big Chill*.

Toutefois, des hypothèses à l'étude en physique des particules prévoient que  $\rho_\Lambda$  pourrait changer en fonction du temps ou du facteur d'échelle. Voici quelques scénarios possibles si on peut avoir un tel  $\rho_\Lambda$  variable.

Si la densité diminue et devient même négative, l'expansion de l'univers va diminuer et pourrait même s'inverser pour devenir une contraction de l'univers qui se terminera quand le facteur d'échelle redeviendra nul et que la distance entre toutes les galaxies devient nulle. On a alors le *Big Crunch*, un destin déjà envisagé dans l'univers de Friedmann fermé.

Si la densité augmente, l'expansion se fera encore plus rapidement. Si elle augmente assez vite, on pourrait arriver à une situation où l'espace grandit tellement vite que la force de gravitation et les forces électromagnétiques ne pourraient plus garder ensemble les atomes formant les objets. Tous les objets de l'univers seraient déchirés par l'expansion de l'univers et même les électrons des atomes pourraient être arrachés par cette expansion trop rapide. C'est ce qu'on appelle le *Big Rip*.



[www.speed-light.info/expanding\\_universe.htm](http://www.speed-light.info/expanding_universe.htm)

## 14.10 LA TAILLE DE L'UNIVERS

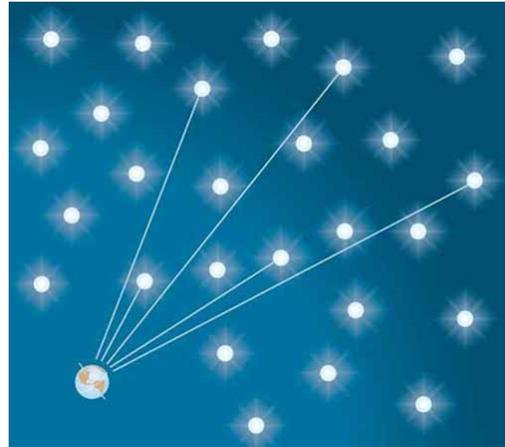
Que peut-on savoir sur la taille de tout l'univers, à part qu'il est certainement plus grand que l'univers observable ? Cette question est très ancienne. Déjà au 14<sup>e</sup> siècle, Nicolas de Cues affirme que l'univers doit être infini puisque la puissance de Dieu est infinie. Quand on commence à imaginer au 16<sup>e</sup> siècle que les étoiles sont comme des soleils très loin de la Terre, certains proposent à leur tour que l'univers est infini.

Voyons ce qu'on peut savoir à propos de la taille de l'univers.

### Le paradoxe d'Olbers

On tombe assez vite sur un paradoxe si on pense que l'univers est infini. (Ce paradoxe est aujourd'hui appelé le paradoxe d'Olbers, du nom d'un astronome vivant au 19<sup>e</sup> siècle. Le paradoxe était toutefois connu depuis la fin du 16<sup>e</sup> siècle puisque Kepler en parla à cette époque.) Si l'univers était infini, le ciel nocturne ne devrait pas être noir, il devrait avoir une luminosité par unité de surface aussi grande que la surface du Soleil vue de la Terre.

Il en est ainsi parce que dans un univers infini, on doit voir une étoile, peu importe dans quelle direction on regarde. Il est inévitable qu'il y ait une étoile dans une certaine direction si l'univers est infini. Dans l'image de droite, on montre qu'en regardant dans une certaine direction (on en montre trois ici), notre regard tombe sur une étoile. Sur cette image, on peut facilement tracer une ligne partant de la Terre qui n'arrive pas sur une étoile, mais il faut imaginer que cette image est infinie et parsemée d'étoiles. Il sera alors impossible de tracer une ligne qui partira de la Terre et qui n'arrivera jamais sur une étoile.



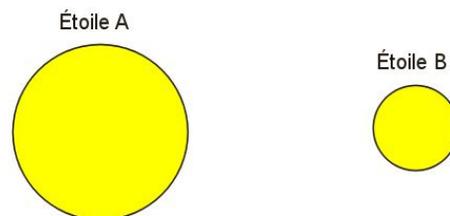
[www.crystalinks.com/olber's\\_paradox.html](http://www.crystalinks.com/olber's_paradox.html)

C'est une situation similaire à ce qui se passe si vous êtes dans une forêt. Si la forêt est petite, vous pouvez voir à l'extérieur de la forêt parce que vous pouvez voir entre les arbres. Mais si la forêt est très grande, vous ne pouvez pas voir à l'extérieur parce que votre regard arrive inévitablement sur un arbre, peu importe la direction de votre regard.

On pourrait penser que les étoiles très éloignées seront beaucoup moins lumineuses vu de la Terre. C'est vrai, mais l'intensité de lumière par unité de surface angulaire est similaire à celle du Soleil. Pour illustrer cela, prenons deux étoiles identiques. L'étoile A est à une distance  $D_A$  de la Terre et l'étoile B est plus éloignée, à une distance  $D_B$ . Étant plus loin, le diamètre apparent de l'étoile B sera plus petit vu de la Terre.

L'intensité de lumière par unité de surface de l'étoile A est

$$\frac{I_A}{\text{Aire angulaire}_A} = \frac{I_A}{\pi\theta_A^2}$$



L'étoile B étant deux fois plus loin, l'intensité de la lumière est plus petite. Elle est

$$I_B = \frac{L}{4\pi D_B^2} = \frac{L}{4\pi D_A^2} \cdot \frac{D_A^2}{D_B^2} = I_A \cdot \frac{D_A^2}{D_B^2}$$

Cependant, le diamètre angulaire de l'étoile B est plus petit. Puisque

$$\theta = \frac{\text{diamètre}}{\text{distance}}$$

on a

$$\frac{\theta_A}{\theta_B} = \frac{\frac{\text{diamètre}}{D_A}}{\frac{\text{diamètre}}{D_B}} = \frac{D_B}{D_A}$$

Cette équation veut simplement dire que si l'étoile B est trois fois plus loin, son diamètre angulaire est trois fois plus petit.

L'intensité de la lumière par unité angulaire de surface de l'étoile B est donc

$$\begin{aligned} \frac{I_B}{\text{Aire angulaire}_B} &= \frac{I_B}{\pi\theta_B^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot I_B \cdot \left(\frac{1}{\theta_B}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(I_A \cdot \frac{D_A^2}{D_B^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\theta_A} \cdot \frac{D_B}{D_A}\right)^2 \\ &= \frac{I_A}{\pi\theta_A^2} \end{aligned}$$

Cette intensité est la même intensité par unité de surface que l'étoile A. Puisque l'intensité de la lumière diminue avec le carré de la distance et que la surface angulaire de l'étoile diminue aussi avec le carré de la distance, les deux se compensent exactement et l'intensité de lumière par unité de surface angulaire des deux étoiles est identique. Elle devrait en fait être assez similaire pour toutes les étoiles, incluant le Soleil, ce qui signifie que le ciel nocturne devrait avoir la même luminosité par unité de surface angulaire que la surface du Soleil vue de la Terre.

De toute évidence, ce n'est pas ce qu'on voit. Le ciel nocturne est très noir. C'est le paradoxe d'Olbers : pourquoi le ciel est-il noir alors qu'il devrait être aussi lumineux par unité de surface que la surface du Soleil si l'univers est infini ?

Il y a quelques solutions possibles à ce paradoxe.

- 1) La solution évidente est que l'univers n'est pas infini. Si notre regard n'arrive pas toujours sur une étoile, c'est que l'univers est limité. C'est exactement la conclusion qu'on tire si on voit à l'extérieur d'une forêt : la forêt n'est pas très grande. Si on voit entre les étoiles, c'est que l'univers n'est pas infini.
- 2) La poussière interstellaire diminue l'intensité par unité de surface pour les étoiles très éloignées et c'est pour ça que le ciel n'a pas toute la même intensité par unité de surface. Ça semble être une bonne solution, mais elle n'est pas bonne. La poussière qui absorbe l'énergie de la lumière doit, par la conservation de l'énergie, la réémettre un jour ou l'autre. À l'équilibre, la poussière doit émettre autant de rayonnement qu'elle en reçoit et l'intensité par unité de surface reste donc la même.
- 3) L'âge de l'univers est limité. Notre regard arrive effectivement toujours sur une étoile, peu importe la direction qu'on regarde, mais la lumière des étoiles très éloignées n'a pas encore eu le temps d'arriver jusqu'à nous et on ne les voit pas.

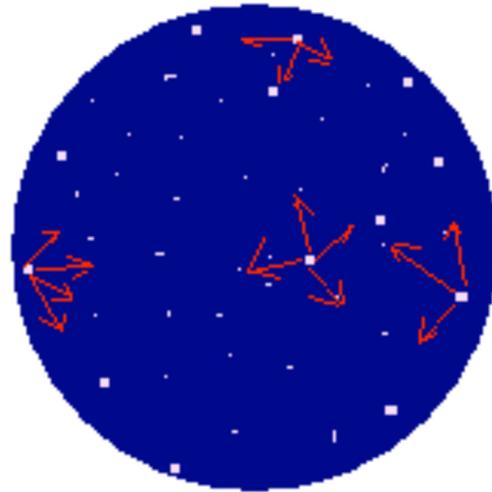
Puisqu'on reçoit uniquement la lumière des étoiles qui sont seulement à moins d'une certaine distance, la situation est identique à celle qu'on a avec un univers limité. C'est une solution qui fut proposée, entre autres, par Edgar Allan Poe et Lord Kelvin.

Ainsi, si le ciel est noir, c'est donc que l'univers n'est pas infini, ou que son âge n'est pas infini.

## La gravitation de Newton

Halley, en se basant sur la gravitation de Newton, s'est également prononcé sur la question de la taille de l'univers. Selon la gravitation, l'univers ne pouvait pas être fini parce que si c'était le cas, il s'effondrerait sur lui-même par la force de gravitation. On comprend pourquoi si on examine les forces de gravitation qui s'exercent sur les objets dans un univers fini. Près des bords, il n'y a des forces que d'un seul côté de l'objet et la résultante est une force dirigée vers le centre de l'univers.

Plus près du centre, il y a des forces d'attraction dans toutes les directions et la force résultante vers le centre est plus petite. Cette force résultante est nulle uniquement au centre de l'univers, où l'objet est attiré également dans toutes les directions. Ainsi, tous les objets seraient attirés vers le centre et cet univers s'effondrerait sur lui-même.



[www.uni.edu/morgans/astro/course/Notes/section3/new14.html](http://www.uni.edu/morgans/astro/course/Notes/section3/new14.html)

Par contre, dans un univers infini, tous les corps sont attirés également dans toutes les directions, comme l'objet situé au centre de l'univers fini, et la force résultante est toujours nulle. L'univers serait un univers statique et infini. Comme il est statique, il a un âge infini. Newton doutait toutefois qu'un tel univers infini et statique puisse véritablement être stable.

Cependant, on n'a pas envisagé que les galaxies puissent être en train de s'éloigner les unes des autres dans cet univers. Dans ce cas, l'univers pourrait être limité et la force nette sur les galaxies situées sur les bords de l'univers fera diminuer la vitesse d'éloignement des galaxies. Dans ce cas, l'univers pourrait ne pas être infini.

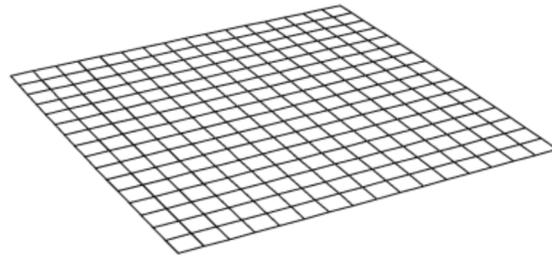
On semblait donc dans une impasse. Le paradoxe d'Olbers indiquait que l'univers n'était pas infini ou que son âge était limité et Halley affirmait que l'univers était infini et que son âge était aussi infini.

## La relativité générale

La découverte de l'expansion de l'univers a tout changé. Elle détruit les arguments de Newton et résout le paradoxe d'Olbers (puisque presque tous les modèles obtenus avec la relativité montrés ici donnent un âge limité à l'univers). Puisque c'est l'âge de l'univers qui donne la solution du paradoxe d'Olbers et que les arguments de Newton ne sont plus valides, on ne sait toujours pas si l'univers est infini ou non.

On pourrait penser que la relativité générale va donner une réponse à cela. On utilise souvent la courbure pour montrer que la taille de l'univers doit être infinie pour un univers plat. Toutefois, on va voir que cette explication est fausse.

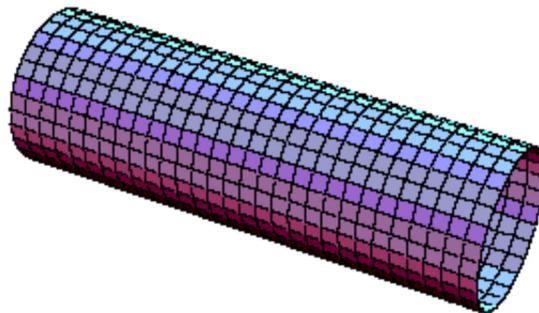
Pour illustrer la situation, on va reprendre notre monde en deux dimensions. Dans ce monde, l'univers est une feuille. La figure de droite montre ce monde si la courbure est nulle.



[arachnoid.com/gravity/](http://arachnoid.com/gravity/)

La conclusion semble inévitable : dans un univers plat infini, il faut imaginer que cette feuille s'étend à l'infini dans toutes les directions, ce qui signifie que l'univers est infini. On ne voit pas comment on pourrait limiter la taille de l'univers avec un univers sans courbure.

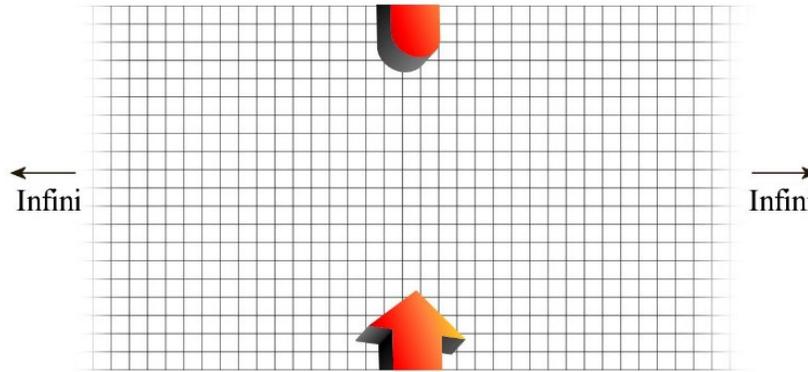
Toutefois, c'est possible de limiter la taille de l'univers en gardant une courbure nulle. Il suffit de former un cylindre avec la feuille. Cette surface vous semble peut-être courbée, mais mathématiquement, sa courbure est nulle. Les lignes parallèles ne se touchent pas, la somme des angles est  $180^\circ$  et la circonférence d'un cercle sur cette surface est  $\pi$  fois plus grande que le diamètre du cercle. La courbure change quand il faut étirer ou contracter une ou plusieurs parties de la surface. Pour plier ainsi la feuille plane pour faire un cylindre, il n'y a pas eu d'étirement ni de contraction nulle part sur cette surface.



[www.maths.manchester.ac.uk/~kd/geomview/geometry.html](http://www.maths.manchester.ac.uk/~kd/geomview/geometry.html)

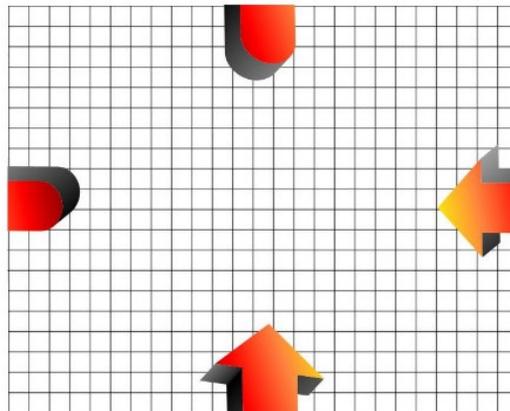
L'univers plat en deux dimensions pourrait donc avoir cette structure en forme de cylindre infini. Cela voudrait dire qu'il est infini dans une direction (qu'on va appeler  $x$ ), mais limité dans une autre direction (qu'on va appeler  $y$ ).

Voyons ce qui se passe dans un tel univers. Cet univers est équivalent à la situation suivante.



Cette image montre que l'univers est infini en  $x$ , mais limité en  $y$ . Dans cet univers, on revient au bas de la grille quand on sort en haut, comme le fait la flèche. Il en est ainsi parce qu'on revient à notre point de départ quand on fait le tour du cylindre. En se déplaçant dans cette direction des  $y$ , un habitant de cet univers reviendrait donc sans cesse au point de départ chaque fois qu'il fait le tour du cylindre.

En fait, on peut avoir une telle situation en  $x$  aussi. C'est impossible à représenter avec la feuille plane qu'on roule. Il faudrait alors connecter les deux bouts du cylindre pour former un genre de beigne, mais pour faire cela, il faut étirer une partie de la surface, signe qu'on change la courbure. Toutefois, on peut montrer mathématiquement qu'on peut connecter les 2 côtés de la feuille tout en gardant une courbure nulle. On a alors cet univers plat en deux dimensions.



Dans ce monde, on revient aussi continuellement à la même place quand on se déplace en  $x$  ou en  $y$ . La flèche nous montre qu'en sortant à gauche on revient à droite. La distance à parcourir pour revenir au même point en  $x$  n'est pas nécessairement la même que celle à parcourir en  $y$ .

Il y a d'ailleurs quelques jeux vidéos qui sont ainsi, quand on sort de l'écran en haut, on revient en bas et quand on sort à droite, on revient à gauche. Le célèbre Pac Man vivait dans un tel monde.

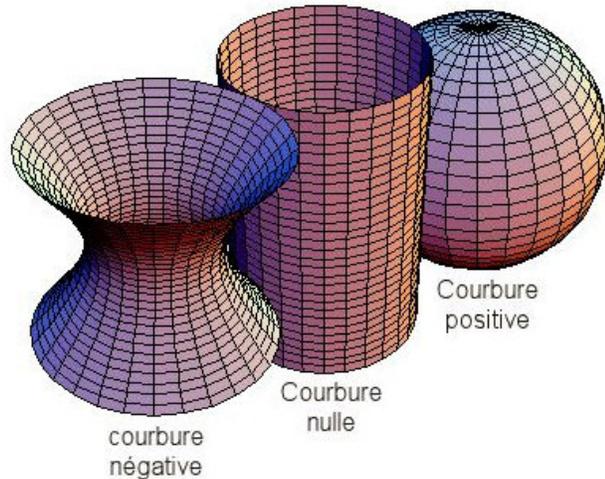
<https://www.youtube.com/watch?v=cVH1mCc5EvU>

Le petit vaisseau et les astéroïdes du jeu *asteroid* vivaient aussi dans un tel monde.

<https://www.youtube.com/watch?v=WYSupJ5r2zo>

Nous avons maintenant un univers plat à deux dimensions et qui n'est pas infini. Ce monde n'est pas infini et il n'a pas de bord. On ne peut pas arriver au bout de l'univers.

On peut faire ce genre de connexion d'un côté à l'autre de l'univers, et ce même si la courbure de l'univers est négative, nulle ou positive, comme le montre cette figure.



[www.storyofmathematics.com/19th\\_gauss.html](http://www.storyofmathematics.com/19th_gauss.html)

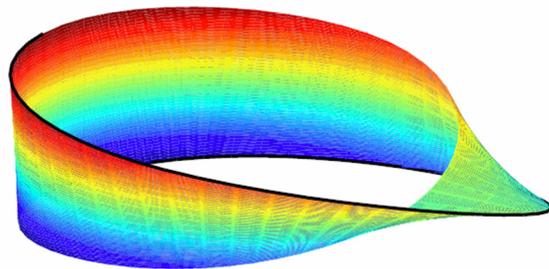
La situation est similaire en trois dimensions. Chacune des 3 dimensions peut être infinie ou se refermer sur elle-même. Si elle est infinie, on ne revient jamais au même point en se déplaçant dans cette direction. Si elle se referme, on revient continuellement au point de départ en se déplaçant dans cette direction. On pourrait donc quitter la Terre, aller toujours en ligne droite et revenir à la Terre. Avec un télescope assez puissant, on pourrait voir la Terre en regardant dans cette direction, à condition qu'elle se trouve dans l'univers observable bien sûr. Pour l'instant, aucun indice ne laisse croire que la distance à parcourir avant de revenir à la Terre est plus petite que la taille de l'univers observable. Si c'était le cas, on pourrait observer le même objet en regardant dans des directions diamétralement opposées.

La courbure de l'univers ne donne donc aucune information sur la taille de l'univers. Peu importe la courbure de l'univers, on peut replier l'espace sur lui-même ce qui nous fait revenir à notre point de départ si on se déplace toujours dans la même direction. Un univers plat n'est pas nécessairement infini.

Pour l'instant, on n'a aucune idée si l'univers se referme ainsi sur lui-même ou s'il est infini, la question reste ouverte.

## Une autre possibilité selon la relativité générale

Il existe une autre façon de connecter les deux côtés de l'univers à deux dimensions. On inverse la feuille avant de la connecter à l'autre côté de la feuille. On obtient alors le résultat montré à droite.



[www.mathworks.com/help/curvefit/multivariate-tensor-product-splines.html](http://www.mathworks.com/help/curvefit/multivariate-tensor-product-splines.html)

On crée alors un univers possédant une torsion. Dans cet univers, on revient

également à notre point de départ quand on se déplace en ligne droite dans la direction où on a fait la connexion, mais quand on revient à notre point de départ, on est maintenant inversé par rapport à ce qu'on était quand on a commencé notre voyage. Un astronaute allant en ligne droite dans un univers connecté avec une telle torsion reviendrait sur Terre, mais il serait alors à l'envers par rapport à ce qu'il était lors de son départ. Son cœur serait à droite, son foie à gauche. Remarquez que lui se trouverait normal et il penserait que ce sont tous les habitants de la Terre qui sont inversés...

Si ça semble bizarre, rassurez-vous puisque rien n'indique pour l'instant qu'il y ait de telles torsions dans notre univers.

## RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

### La loi de Hubble-Lemaître

$$v = HD$$

### Distance dans l'univers

$$D = a \cdot d$$

### Lien entre le taux d'expansion de Hubble et le facteur d'échelle

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

### Décalage des raies spectrales dû à l'expansion de l'univers

$$\delta = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{a_e}$$

### Distance à partir du décalage (si $z \ll 1$ )

$$z \approx \frac{D}{14,51 \text{Gal}}$$

### Variation de la densité de matière avec l'expansion de l'univers

$$\rho_m = \frac{1}{a^3} \rho_{m0}$$

### Densité critique de l'univers

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\rho_{c0} = 8,53 \times 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 5,10 \frac{m_p}{\text{m}^3}$$

**Facteur d'échelle en fonction du temps**

$$a = \left( 0,6781 \cdot \sinh \left( \frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

**Taux d'expansion de Hubble en fonction du temps**

$$H = 55,8 \frac{km/s}{Mpc} \cdot \frac{1}{\tanh \left( \frac{t}{11,69Ga} \right)}$$

**Distance actuelle d'une source lumineuse**

$$d = 1,296 \cdot c \int_{t_e}^{t_r} \left( \sinh \left( \frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

[https://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+1.296\\*%28sinh%28t%2F11.69%29%29%5E%28-2%2F3%29+from+0+to+13.8](https://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+1.296*%28sinh%28t%2F11.69%29%29%5E%28-2%2F3%29+from+0+to+13.8)

**EXERCICES**

Rappel : Dans le modèle actuel, on a

$$H_0 = 67,4 \frac{km/s}{Mpc} = 0,0689Ga^{-1} \quad \Omega_{m0} = 0,315 \quad \Omega_{\Lambda 0} = 0,685$$

**14.1 L'expansion de l'univers**

1. Une galaxie est à 300 Mal de nous. À quelle vitesse s'éloigne-t-elle ?
2. En 1929, Hubble avait obtenu une valeur de 500 km/s/Mpc pour le taux d'expansion de l'univers. Quelle est la valeur de ce taux d'expansion en  $Ga^{-1}$  ?

**14.2 Le décalage des raies spectrales**

3. Les raies spectrales de la galaxie elliptique géante M87 ont un décalage de  $\delta = 1,00436$ . Quelle est la distance de cette galaxie ?
4. À quelle longueur d'onde se retrouve la raie spectrale de l'hydrogène normalement à 656,11 nm dans le spectre d'une galaxie située à 600 millions d'années-lumière de nous ?

5. Dans le spectre du quasar PKS 2000-330, la raie spectrale de l'hydrogène, normalement à 656,1 nm, est à 3136,2 nm. Quel était le facteur d'échelle de l'univers quand la lumière de ce quasar, arrivant à nous aujourd'hui, a été émise ?

#### 14.4 Les univers composés de matière froide

6. Quelle était la densité de l'univers quand le facteur d'échelle était de  $a = 0,6$  si elle est de  $1,61 m_p/m^3$  aujourd'hui ?

#### 14.5 Le modèle d'Einstein-de Sitter

7. Quelle serait la densité critique de l'univers si le taux d'expansion de Hubble était de  $H_0 = 100 \text{ km/s/Mpc}$  ?
8. Dans ce problème, on va imaginer un univers dans lequel il n'y a que des photons. Dans ce cas, la formule de la relativité générale donne

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_r - H^2$$

où  $\rho_r$  est la densité d'énergie de la radiation (c'est-à-dire les photons). Avec des photons, la densité d'énergie diminue selon la formule

$$\rho_r = \frac{\rho_{r0}}{a^4}$$

(La densité diminue avec  $a^3$  parce que l'énergie est diluée par l'expansion et aussi avec  $a$  parce que l'étirement de la longueur d'onde fait diminuer l'énergie.)

- a) Sachant tout cela, trouvez la formule donnant le facteur d'échelle en fonction du temps pour un univers plat contenant seulement des photons.
- b) Quel serait l'âge d'un tel univers qui a un facteur d'échelle de 1 ?

#### 14.9 Le modèle actuel ( $\Lambda_{\text{cdm}}$ )

9. Quelle sera la valeur du facteur d'échelle dans 1 milliard d'années ?
10. Dans combien de temps le facteur d'échelle sera-t-il de  $a = 2$  ?
11. Quelle était la densité de matière de l'univers quand il avait un âge de 2 milliards d'années ?

12. Quel était l'âge de l'univers quand la densité de matière était égale à la densité du vide ?

13. Dans ces notes, on a montré que la concavité de la courbe de  $a$  en fonction de  $t$  est donnée par

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{H_0^2}{2} \left( -\frac{\Omega_{m0}}{a^2} + 2\Omega_{\Lambda 0}a \right)$$

Avec cette équation, déterminez quelles étaient les valeurs de  $a$  et  $t$  quand la concavité de la courbe a changé.

14. Quelle sera la valeur du taux d'expansion de Hubble dans 1 milliard d'années ?

15. Quel était l'âge de l'univers quand le taux d'expansion de Hubble était de  $H = 200 \text{ km/s/Mpc}$  ?

16. Le décalage des raies du quasar PKS 2000-330 est de  $z = 3,78$ .

- Depuis combien de temps voyage cette lumière qui arrive sur Terre aujourd'hui ?
- Quelle est la distance actuelle de ce quasar ?
- Quelle était la distance de ce quasar quand il a émis la lumière qu'on reçoit aujourd'hui ?
- Quand recevra-t-on ou a-t-on reçu la lumière que ce quasar a émise quand l'univers avait un âge de 5 milliards d'années ?
- Dans combien de temps recevra-t-on la lumière que ce quasar émet en ce moment ?

17. Une galaxie est située à 40 milliards d'années-lumière de nous en ce moment. Quel devrait être le décalage  $z$  de la lumière reçue en ce moment de cette distance ?

18. Quelle sera la taille de l'univers visible dans 56 Ga ?

19. Supposons qu'un jour, on trouve un objet dans l'univers ayant un âge de 20 milliards d'années. On pourrait alors ajuster le modèle cosmologique pour que l'univers ait au moins cet âge. On doit trouver une valeur de  $\Omega_{\Lambda 0}$  qui, dans l'équation de l'âge de l'univers

$$t_A = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0} \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}}}$$

permettrait d'obtenir un âge de 20 milliards d'années, si on garde le même taux d'expansion de Hubble et un univers plat ? (Ça ne sera pas facile d'isoler  $\Omega_{\Lambda 0}$ . Peut-être pourriez-vous utiliser un ordinateur pour trouver la solution de l'équation finale. Par exemple, vous pouvez utiliser ce site

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+3x2%2Bx-7%3D4x>.

Sur ce site, une racine s'écrit  $\sqrt{x}$  et  $\sinh^{-1}(x)$  s'écrit  $\operatorname{asinh}(x)$ .)

20. Dans Wikipédia, il est écrit que le quasar ULAS J1120+0641, ayant un décalage de  $z = 7,085$ , est à une distance de 28,85 Gal. Est-ce la bonne distance ?

## RÉPONSES

### 14.2 L'expansion de l'univers

1. 6202 km/s
2. 0,511 Ga<sup>-1</sup>

### 14.2 Le décalage des raies spectrales

3. 19,4 Mpc = 63,3 Mal
4. 683,2 nm
5. 0,2092

### 14.4 Les univers composés de matière froide

6. 7,45  $m_p/m^3$

### 14.5 Le modèle d'Einstein-de Sitter

7. 1,879 x 10<sup>-26</sup> kg/m<sup>3</sup> = 11,23  $m_p/m^3$
8. a)  $a = \sqrt{2H_0 t}$     b) 7,26 Ga

### 14.9 Le modèle actuel ( $\Lambda_{\text{cdm}}$ )

9. 1,070
10. 11,16 Ga
11. 118  $m_p/m^3$
12. 10,30 Ga
13.  $a = 0,6126$ ,  $t = 7,70$  Ga

14. 65,4 km/s/Mpc

15. 3,25 Ga

16. a) 12,16 Ga   b) 23,43 Gal   c) 4,90 Gal   d) 17,22 Ga   e) Jamais

17. 53,12

18. 70,91 Gal

19. 0,928

20. Oui