Solutionnaire du chapitre 13

1. a) L'intensité de la lumière est

$$\begin{aligned} I &= \frac{L}{4\pi D^2} \\ &= \frac{126000 \cdot 3,828 \times 10^{26} W}{4\pi\left(860 \cdot 9,46 \times 10^{15} m\right)^2} \\ &= 5,79 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

La magnitude est donc

$$\begin{aligned} I &= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4m} \\ 5,79 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} &= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4m} \\ m &= -0,90 \end{aligned}$$

b) Avec la poussière, l'intensité baisse selon la formule suivante

$$\begin{aligned} I &= I_0 (10)^{\frac{-D}{2500\,pc}} \\ &= 5,79 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot (10)^{\frac{-(860/3,262)pc}{2500\,pc}} \\ &= 4,54 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

La magnitude est donc

$$\begin{aligned} I &= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4m} \\ 4,54 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} &= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4m} \\ m &= -0,64 \end{aligned}$$

2. Avec une magnitude de -0,38, l'intensité de la lumière reçue est

$$\begin{aligned} I &= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4m} \\ &= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4 \cdot -0,38} \\ &= 3,576 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

Cette intensité est aussi donnée par

$$\begin{aligned}
I &= I_0 10^{-\frac{D}{2500pc}} \\
&= \frac{9211 \cdot 3,828 \times 10^{26} W}{4\pi D^2} \cdot 10^{-\frac{D}{2500pc}} \\
&= \frac{2,806 \times 10^{29} W}{D^2} \cdot 10^{-\frac{D}{2500pc}}
\end{aligned}$$

On doit donc résoudre l'équation

$$3,576 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} = \frac{2,805 \times 10^{29} W}{D^2} \cdot 10^{-\frac{D}{2500pc}}$$

$$D^2 = 7,846 \times 10^{36} m^2 \cdot 10^{-\frac{D}{2500pc}}$$

$$D = 2,801 \times 10^{18} m \cdot \left(10^{-\frac{D}{2500pc}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$D = 2,801 \times 10^{18} m \cdot 10^{-\frac{D}{5000pc}}$$

$$D = 90,77 pc \cdot 10^{-\frac{D}{5000pc}}$$

Voyons ce que ça donne ici si on suppose que la distance est de 90 pc (C'est une bonne idée de prendre la valeur devant l'exponentielle.)

1re itération	$90,77 pc \cdot 10^{-\frac{90pc}{5000pc}} = 87,08 pc$
2e itération	$90,77 pc \cdot 10^{-\frac{87,08pc}{5000pc}} = 87,20 pc$
3e itération	$90,77 pc \cdot 10^{-\frac{87,20pc}{5000pc}} = 87,20 pc$

La distance est donc de 87,20 pc = 284,4 al.

3. Le temps pour faire une tour est

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\pi r}{v} \\ &= \frac{2\pi \cdot \left(8180 \cdot 3,262 \cdot 9,46 \times 10^{15} m\right)}{240\,000 \frac{m}{s}} \\ &= 6,61 \times 10^{15} s \\ &= 209,4 Ma \end{aligned}$$

Puisque le Soleil a une durée de vie de 10,9 Ga, le nombre de tour est

$$\begin{aligned} N &= \frac{10900 Ma}{209,4 Ma} \\ &= 52,1 \end{aligned}$$

Le Soleil fera donc près de 52 tours autour de la galaxie durant sa vie.

4. Voir les réponses à la fin du chapitre.

5. La luminosité d'une étoile de type B0 est donnée par

$$\begin{aligned} M &= 2,5 \log\left(\frac{78,8 L_\odot}{L}\right) \\ -7 &= 2,5 \log\left(\frac{78,8 L_\odot}{L}\right) \\ L &= 49720 L_\odot \end{aligned}$$

Comme il y a 0,1 % de *N* étoiles qui sont de ce type, la luminosité totale des étoiles *B* est

$$\begin{aligned} L_B &= 49720 L_\odot \cdot 0,001 \cdot N \\ &= 49,72 L_\odot \cdot N \end{aligned}$$

La luminosité d'une étoile de type K0 est donnée par

$$M = 2{,}5\log\left(\frac{78{,}8L_\odot}{L}\right)$$
$$5{,}7 = 2{,}5\log\left(\frac{78{,}8L_\odot}{L}\right)$$
$$L = 0{,}414L_\odot$$

Comme il y a 99,9 % de N étoiles qui sont de ce type, la luminosité totale des étoiles K est

$$\begin{aligned} L_K &= 0{,}414L_\odot \cdot 0{,}999 \cdot N \\ &= 0{,}4131L_\odot \cdot N \end{aligned}$$

Le rapport des luminosités est

$$\begin{aligned} \frac{L_B}{L_K} &= \frac{49{,}72L_\odot \cdot N}{0{,}4131L_\odot \cdot N} \\ &= 120 \end{aligned}$$

La luminosité des rares étoiles de type B0 est donc 120 fois plus grande que celles des étoiles de type K0 !

6. a) La masse est

$$\begin{aligned} M_{\text{int}} &= \frac{v^2 r}{G} \\ &= \frac{\left(250\,000\,\tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot \left(50\,000 \cdot 9{,}46\times10^{15}\,m\right)}{6{,}674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}} \\ &= 4{,}43\times10^{41}\,kg \\ &= 222{,}7\times10^{9}\,M_\odot \end{aligned}$$

b) Le temps est

$$v = \frac{distance}{temps}$$

$$v = \frac{2\pi r}{t}$$

$$250\,000 \tfrac{m}{s} = \frac{2\pi \cdot \left(50\,000 \cdot 9,46 \times 10^{15} m\right)}{t}$$

$$t = 1,189 \times 10^{16} s$$

$$t = 376,7 \times 10^{6} a$$

7. À 8 kpc, la densité est

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{4,6 \times 10^{8} \tfrac{M_\odot}{kpc}}{\left(2,8kpc\right)^2 + r^2} \\ &= \frac{4,6 \times 10^{8} \tfrac{M_\odot}{kpc}}{\left(2,8kpc\right)^2 + \left(8,18kpc\right)^2} \\ &= 6,15 \times 10^{6} \tfrac{M_\odot}{kpc^3}\end{aligned}$$

Si on change les unités pour obtenir des kg/m³, on arrive à

$$\begin{aligned}\rho &= 6,15 \times 10^{6} \tfrac{M_\odot}{kpc^3} \cdot \left(\frac{1,9885 \times 10^{30} kg}{1 M_\odot}\right) \cdot \left(\frac{1kpc}{3262 \cdot 9,46 \times 10^{15} m}\right)^3 \\ &= 4,16 \times 10^{-22} \tfrac{kg}{m^3}\end{aligned}$$

8. a) La masse est

$$\begin{aligned}M_{\text{int}} &= \frac{v^2 r}{G} \\ &= \frac{\left(250\,000 \tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot \left(130\,000 \cdot 9,46 \times 10^{15} m\right)}{6,674 \times 10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2}} \\ &= 1,152 \times 10^{42} kg \\ &= 5,79 \times 10^{11} M_\odot\end{aligned}$$

b) On trouve la luminosité avec la relation de Tully-Fisher

$$\begin{aligned} L &= 3,2\,\tfrac{L_\odot s^4}{km^4}\cdot v^4 \\ &= 3,2\,\tfrac{L_\odot s^4}{km^4}\cdot\left(250\,\tfrac{km}{s}\right)^4 \\ &= 1,25\times10^{10}\,L_\odot \end{aligned}$$

c) Le rapport M/L est

$$\begin{aligned} \frac{M}{L} &= \frac{5,79\times10^{11}\,M_\odot}{1,25\times10^{10}\,L_\odot} \\ &= 46,3\,\tfrac{M_\odot}{L_\odot} \end{aligned}$$

d) Le rapport *M/L* des étoiles est aux alentours de 4 $M_\odot/L_\odot$. Cela signifie que la masse des étoiles est

$$\begin{aligned} 4\,\tfrac{M_\odot}{L_\odot} &= \frac{M_{étoiles}}{L} \\ 4\,\tfrac{M_\odot}{L_\odot} &= \frac{M_{étoiles}}{1,25\times10^{10}\,L_\odot} \\ M_{étoiles} &= 5\times10^{10}\,M_\odot \end{aligned}$$

La masse de la matière sombre est donc

$$\begin{aligned} M_{sombre} &= M - M_{étoile} \\ &= 5,79\times10^{11}\,M_\odot - 5\times10^{10}\,M_\odot \\ &= 5,29\times10^{11}\,M_\odot \end{aligned}$$

Le rapport des masses est donc

$$\begin{aligned} \frac{M_{sombre}}{M_{étoiles}} &= \frac{5,29\times10^{11}\,M_\odot}{5\times10^{10}\,M_\odot} \\ &= 10,6 \end{aligned}$$

9. La magnitude absolue est

$$\begin{aligned}\overline{M_V} &= -2,43\log\left(\frac{P}{10j}\right)-4,05\\ &= -2,43\log\left(\frac{6,7j}{10j}\right)-4,05\\ &= -3,63\end{aligned}$$

Avec la magnitude, on trouve ensuite la distance

$$\begin{aligned}M &= m+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ -3,63 &= 27,71+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ D &= 60,39Mal\end{aligned}$$

10. Les supernovæ de type I ont une magnitude absolue de -19,6. Avec la magnitude, on trouve ensuite la distance

$$\begin{aligned}M &= m+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ -19,6 &= 18,5+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ D &= 1,36Gal\end{aligned}$$

11. Selon la relation de Tully-Fisher, la luminosité de la galaxie est

$$\begin{aligned}L &= 3,2\tfrac{L_\odot s^4}{km^4}\cdot v^4\\ &= 3,2\tfrac{L_\odot s^4}{km^4}\cdot\left(150\tfrac{km}{s}\right)^4\\ &= 1,62\times10^9 L_\odot\end{aligned}$$

Cette luminosité correspond à la magnitude absolue suivante.

$$\begin{aligned}M &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{L}\right)\\ &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{1,62\times10^9 L_\odot}\right)\\ &= -18,28\end{aligned}$$

La distance est donc

$$M = m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$-18,3 = 9,4 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$D = 11,2Mal$$

12. On a

$$D < c\Delta t_{observé}$$
$$D < 3\times10^{8}\,\tfrac{m}{s}\cdot 3600s$$
$$D < 1,08\times10^{12}\,m$$
$$D < 7,22UA$$

La taille maximale est donc de 7,22 UA.

13. L'étoile survit si le rayon de Schwarzschild est plus grand que la limite de Roche. On a donc

$$R_s > r$$
$$2,953km\cdot\left(\frac{M_{TN}}{1M_\odot}\right) > 2,4\cdot\sqrt[3]{\frac{M_{TN}}{1M_\odot}}\cdot 1R_\odot$$
$$2,953km\cdot\left(\frac{M_{TN}}{1M_\odot}\right) > 2,4\cdot\sqrt[3]{\frac{M_{TN}}{1M_\odot}}\cdot 6,957\times10^{5}\,km$$
$$\left(\frac{M_{TN}}{1M_\odot}\right) > \sqrt[3]{\frac{M_{TN}}{1M_\odot}}\cdot 5,65\times10^{5}$$
$$\left(\frac{M_{TN}}{1M_\odot}\right)^{\frac{2}{3}} > 5,65\times10^{5}$$
$$M_{TN} > 4,25\times10^{8}\,M_\odot$$

L'étoile survit jusqu'à l'horizon si la masse du trou noir est supérieur à 425 millions de masses solaires.

14. a) Le rythme est

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{M}{t} \\ &= \frac{4,2\times10^6 M_\odot}{10^8 an} \\ &= 0,042 \tfrac{M_\odot}{an}\end{aligned}$$

b) On trouve la luminosité avec

$$\dot{m} = \frac{5L_{TN}}{c^2}$$

Toutefois, il nous le rythme d'accumulation en kg par seconde. Ce rythme est

$$\begin{aligned}\dot{m} &= 0,042 \tfrac{M_\odot}{an} \cdot \left(\frac{1an}{365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60s}\right) \cdot \left(\frac{1,9885\times10^{30} kg}{1M_\odot}\right) \\ &= 2,646\times10^{21} \tfrac{kg}{s}\end{aligned}$$

La luminosité est donc

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{5L_{TN}}{c^2} \\ 2,626\times10^{21} \tfrac{kg}{s} &= \frac{5L_{TN}}{\left(3\times10^8 \tfrac{m}{s}\right)^2} \\ L_{TN} &= 4,73\times10^{37} W\end{aligned}$$

C'est près de la luminosité des galaxies de Seyfert, mais pas tout à fait. Probablement que la Voie lactée ne fut jamais une galaxie très active.

15. La masse est

$$\begin{aligned}M_{\text{int}} &= \frac{v^2 r}{G} \\ &= \frac{\left(650\,000 \tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot \left(10\,000\,000 \cdot 9,46\times10^{15} m\right)}{6,674\times10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2}} \\ &= 5,989\times10^{44} kg \\ &= 3,01\times10^{14} M_\odot\end{aligned}$$

16. a) La moyenne des 22 vitesses est 7125 km/s. C'est la vitesse de l'amas.

b) Les différences de vitesse (en km/s) entre la galaxie et l'amas sont : 327, -1376, 481, 528, 210, 1193, 101, 48, 179, -1070, 569, -1621, 317, -1416, 1078, -306, -920, 198, 997, -113, 420, 185.

c) La variance est

$$\begin{aligned}\sigma_r^2 &= \frac{\sum v^2}{N}\\ &= \frac{1\frac{km^2}{s^2}}{26}\left(327^2+1376^2+481^2+528^2+210^2+1193^2+101^2+48^2+179^2\right.\\ &\qquad +1070^2+569^2+1621^2+317^2+1416^2+1078^2+306^2+920^2+198^2\\ &\qquad \left.+997^2+113^2+420^2+185^2\right)\\ &= \frac{13\,582\,919\frac{km^2}{s^2}}{22}\\ &= 617\,405\frac{km^2}{s^2}\end{aligned}$$

d) La masse est

$$\begin{aligned}M &= \frac{5R\sigma_r^2}{G}\\ &= \frac{5\cdot\left(2\times10^6\cdot 9,46\times10^{15}m\right)\cdot 617\,405\,000\,000\frac{m^2}{s^2}}{6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}}\\ &= 8,75\times10^{44}kg\\ &= 4,4\times10^{14}M_\odot\end{aligned}$$