# Solutionnaire du chapitre 12

**1.** Le rayon est

$$\begin{aligned} R &= 0,0126R_\odot \cdot \sqrt[3]{\frac{M_\odot}{M}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{M}{1,44M_\odot}\right)^{4/3}} \\ &= 0,0126R_\odot \cdot \sqrt[3]{\frac{M_\odot}{0,6M_\odot}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{0,6M_\odot}{1,44M_\odot}\right)^{4/3}} \\ &= 0,0126R_\odot \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{0,6}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{0,6}{1,44}\right)^{4/3}} \\ &= 0,0126R_\odot \cdot 1,1856 \cdot 0,8299 \\ &= 0,0124R_\odot \end{aligned}$$

**2.** a) On trouve la luminosité avec

$$R = 33,3R_\odot \cdot \sqrt{\frac{L}{L_\odot}} \cdot \left(\frac{1000K}{T}\right)^2$$

On a déjà la température, mais il nous manque le rayon. Ce rayon est

$$\begin{aligned} R &= 0,0126R_\odot \cdot \sqrt[3]{\frac{M_\odot}{M}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{M}{1,44M_\odot}\right)^{4/3}} \\ &= 0,0126R_\odot \cdot \sqrt[3]{\frac{M_\odot}{0,8M_\odot}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{0,8M_\odot}{1,44M_\odot}\right)^{4/3}} \\ &= 0,0126R_\odot \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{0,8}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{0,8}{1,44}\right)^{4/3}} \\ &= 0,0126R_\odot \cdot 1,0772 \cdot 0,7371 \\ &= 0,01R_\odot \end{aligned}$$

La luminosité est donc

$$R = 33{,}3R_\odot \cdot \sqrt{\frac{L}{L_\odot}} \cdot \left(\frac{1000K}{T}\right)^2$$

$$0{,}01R_\odot = 33{,}3R_\odot \cdot \sqrt{\frac{L}{L_\odot}} \cdot \left(\frac{1000K}{30\,000K}\right)^2$$

$$2{,}872\times10^{-4} = \sqrt{\frac{L}{L_\odot}} \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^2$$

$$0{,}270 = \sqrt{\frac{L}{L_\odot}}$$

$$L = 0{,}073L_\odot$$

b) La grandeur du champ gravitationnel est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM}{R^2} \\ &= \frac{6{,}674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 0{,}8\cdot 1{,}9885\times10^{30}\,kg}{\left(0{,}01\cdot 6{,}597\times10^{8}\,m\right)^2} \\ &= 2{,}44\times10^{6}\,\frac{N}{kg} \end{aligned}$$

Note : on aurait pu prendre la formule plus générale

$$g = \left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{GM}{r^2}$$

Mais on aurait obtenu pratiquement le même résultat

c) La hauteur caractéristique de l'atmosphère est

$$\begin{aligned} H &= \frac{RT}{\mu g} \\ &= \frac{8{,}31\,\frac{J}{molK}\cdot 30\,000K}{0{,}001\,\frac{kg}{mol}\cdot 2{,}44\times10^{6}\,\frac{N}{kg}} \\ &= 102m \end{aligned}$$

**3.** a) Le rayon est

$$\begin{aligned}R &= 11km\cdot\sqrt[3]{\frac{1,4M_\odot}{M}}\\ &= 11km\cdot\sqrt[3]{\frac{1,4M_\odot}{2M_\odot}}\\ &= 11km\cdot\sqrt[3]{\frac{1,4}{2}}\\ &= 9,767km\end{aligned}$$

b) La densité moyenne est

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{M}{volume}\\ &= \frac{2\cdot 1,9885\times10^{30}kg}{\frac{4}{3}\pi\left(9767m\right)^3}\\ &= 1,019\times10^{18}\,\tfrac{kg}{m^3}\end{aligned}$$

c) On trouve la luminosité avec

$$R = 33,3R_\odot\cdot\sqrt{\frac{L}{L_\odot}}\cdot\left(\frac{1000K}{T}\right)^2$$

On a donc

$$\begin{aligned}9767m &= 33,3\cdot 6,957\times10^8 m\cdot\sqrt{\frac{L}{L_\odot}}\cdot\left(\frac{1000K}{1\,000\,000K}\right)^2\\ 4,2159\times10^{-7} &= \sqrt{\frac{L}{L_\odot}}\cdot\left(\frac{1}{1000}\right)^2\\ 0,4216 &= \sqrt{\frac{L}{L_\odot}}\\ L &= 0,1777L_\odot\end{aligned}$$

**4.** Selon la conservation du moment cinétique, on a

$$\frac{R^2}{T}=\frac{R'^2}{T'}$$

$$\frac{\left(6,371\times10^6 m\right)^2}{86\,400s}=\frac{\left(0,015m\right)^2}{T'}$$

$$T'=4,79\times10^{-13}s$$

**5.** Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S&=\frac{2GM}{c^2}\\&=\frac{2\cdot6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,98\times10^{24}kg}{\left(3\times10^8\,\frac{m}{s}\right)^2}\\&=8,87mm\end{aligned}$$

**6.** a) La grandeur du champ gravitationnel

$$g=\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{GM}{r^2}$$

Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S&=2,953km\cdot\frac{M}{M_\odot}\\&=2,953km\cdot\frac{2M_\odot}{M_\odot}\\&=5,906km\end{aligned}$$

et le rayon de l'étoile est

$$\begin{aligned} R &= 11km \cdot \sqrt[3]{\frac{1,4M_\odot}{M}} \\ &= 11km \cdot \sqrt[3]{\frac{1,4M_\odot}{2M_\odot}} \\ &= 11km \cdot \sqrt[3]{\frac{1,4}{2}} \\ &= 9,767km \end{aligned}$$

Le champ est donc

$$\begin{aligned} g &= \left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{GM}{r^2} \\ &= \left(1-\frac{5906m}{9767m}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{6,674\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 2\cdot 1,9885\times10^{30} kg}{(9767m)^2} \\ &= 1,5905 \cdot 2,7824\times10^{12} \tfrac{N}{kg} \\ &= 4,4254\times10^{12} \tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

b) En surface, l'énergie est

$$E = \left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2$$

Loin de l'étoile, l'énergie sera, au minimum (donc à $v = 0$),

$$\begin{aligned} E' &= \left(1-\frac{R_S}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}} (1-0)^{-\frac{1}{2}} mc^2 \\ &= mc^2 \end{aligned}$$

En égalant les énergies, on arrive à

$$E = E'$$

$$\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2 = mc^2$$

$$\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$1-\frac{R_S}{r} = 1-\frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{R_S}{r} = \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{2GM}{c^2 r} = \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{2GM}{r} = v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Étonnamment, c'est la même formule que celle qu'on obtient avec la gravitation de Newton. La vitesse est

$$\begin{aligned} v_{lib} &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\cdot 1{,}9885\times 10^{30} kg}{9767m}} \\ &= 2{,}331\times 10^{8} \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

C'est quand même près de 80% de la vitesse de la lumière !

**7.** a) Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S &= 2,953km\cdot\frac{M}{M_\odot}\\ &= 2,953km\cdot\frac{2M_\odot}{M_\odot}\\ &= 5,906km\end{aligned}$$

et le rayon de l'étoile est

$$\begin{aligned}R &= 11km\cdot\sqrt[3]{\frac{1,4M_\odot}{M}}\\ &= 11km\cdot\sqrt[3]{\frac{1,4M_\odot}{2M_\odot}}\\ &= 11km\cdot\sqrt[3]{\frac{1,4}{2}}\\ &= 9,767km\end{aligned}$$

La longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned}\lambda_{espace} &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r}}}\\ &= \frac{450nm}{\sqrt{1-\frac{5906m}{9767m}}}\\ &= 715,7nm\end{aligned}$$

b) Le décalage est donc

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\lambda'}{\lambda}\\ &= \frac{715,7nm}{450nm}\\ &= 1,590\end{aligned}$$

**8.** a) La vitesse orbitale est

$$v=\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{R_S}{r-R_S}}$$

Comme le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S &= 2,953km\cdot\frac{M}{M_\odot}\\ &= 2,953km\cdot\frac{2M_\odot}{M_\odot}\\ &= 5,906km\end{aligned}$$

La vitesse est

$$\begin{aligned}v &= \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{5906m}{20\,000m-5906m}}\\ &= 0,4577c\\ &= 137\,225\tfrac{km}{s}\end{aligned}$$

b) Le temps est

$$\begin{aligned}T_{vaisseau} &= \frac{2\pi r}{c}\sqrt{\frac{2r-3R_S}{R_S}}\\ &= \frac{2\pi\cdot 20\,000m}{299\,792\,458\frac{m}{s}}\sqrt{\frac{2\cdot 20\,000m-3\cdot 5906m}{5906m}}\\ &= 4,19169\times 10^{-4}s\sqrt{3,7728}\\ &= 8,142\times 10^{-4}s\\ &= 0,8142ms\end{aligned}$$

c) Le temps est

$$\begin{aligned}T_{loin} &= \frac{2\pi r}{c}\sqrt{\frac{2r}{R_S}}\\ &= \frac{2\pi\cdot 20\,000m}{299\,792\,458\frac{m}{s}}\sqrt{\frac{2\cdot 20\,000m}{5906m}}\\ &= 4,19169\times 10^{-4}s\sqrt{6,773}\\ &= 1,091\times 10^{-3}s\\ &= 1,091ms\end{aligned}$$

d) Le rayon minimum de l'orbite est

$$\begin{aligned} r_{ISCO} &= 3R_S \\ &= 3\cdot 5{,}906km \\ &= 17{,}718km \end{aligned}$$

**9.** Le temps est

$$\tau_{cl} = \frac{2R_S}{3c}\left(\left(\frac{r_A}{R_S}\right)^{3/2} - \left(\frac{r_B}{R_S}\right)^{3/2}\right)$$

Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned} R_S &= 2{,}953km\cdot\frac{M}{M_\odot} \\ &= 2{,}953km\cdot\frac{2M_\odot}{M_\odot} \\ &= 5{,}906km \end{aligned}$$

La valeur de $r_A$ est 10 000 000 m et la valeur de $r_B$ est égale au rayon de l'étoile à neutron, qui est

$$\begin{aligned} R &= 11km\cdot\sqrt[3]{\frac{1{,}4M_\odot}{M}} \\ &= 11km\cdot\sqrt[3]{\frac{1{,}4M_\odot}{2M_\odot}} \\ &= 11km\cdot\sqrt[3]{\frac{1{,}4}{2}} \\ &= 9{,}767km \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\tau_{cl} &= \frac{2R_S}{3c}\left(\left(\frac{r_A}{R_S}\right)^{3/2} - \left(\frac{r_B}{R_S}\right)^{3/2}\right) \\ &= \frac{2\cdot 5906m}{3\cdot 299\,792\,458\frac{m}{s}}\left(\left(\frac{10\,000\,000m}{5906m}\right)^{3/2} - \left(\frac{9767m}{5906m}\right)^{3/2}\right) \\ &= 1,313\times 10^{-5}s\left(69\,672,25 - 2,13\right) \\ &= 0,915s\end{aligned}$$

**10.** L'angle de déviation est

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{4GM}{bc^2} \\ &= \frac{4\cdot 6,674\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(2,19\cdot 1,9885\times 10^{30}kg\right)}{\left(1,73\cdot 6,955\times 10^{8}m\right)\cdot\left(3\times 10^{8}\frac{m}{s}\right)^2} \\ &= 1,07\times 10^{-5}rad \\ &= 2,21''\end{aligned}$$

**11.** Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S &= 2,953km\cdot\frac{M}{M_\odot} \\ &= 2,953km\cdot\frac{1M_\odot}{M_\odot} \\ &= 2,953km\end{aligned}$$

Le temps est donc

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{imm} &= \Delta t\sqrt{1-\frac{R_S}{r}} \\ 1an &= \Delta t\sqrt{1-\frac{2,953km}{8km}} \\ \Delta t &= 1,259an\end{aligned}$$

**12.** La distance parcourue se trouve avec

$$\sigma = R_S \left[ \sqrt{x(x-1)} + \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right) \right]_{x_1}^{x_2}$$

Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned} R_S &= 2,953km \cdot \frac{M}{M_\odot} \\ &= 2,953km \cdot \frac{1M_\odot}{M_\odot} \\ &= 2,953km \end{aligned}$$

Les valeurs initiales et finales de $x$ sont donc

$$x_1 = \frac{6km}{2,953km} = 2,0318$$

$$x_2 = \frac{5km}{2,953km} = 1,6932$$

La distance est donc

$$\sigma = 2953m \cdot \left[ \sqrt{x(x-1)} + \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right) \right]_{2,0318}^{1,6932}$$

La borne supérieure est

$$\sqrt{1,6932 \cdot 0,6932} + \ln\left(\sqrt{1,6932} + \sqrt{0,6932}\right) = 1,8413$$

La borne inférieure est

$$\sqrt{2,0318 \cdot 1,0318} + \ln\left(\sqrt{2,0318} + \sqrt{1,0318}\right) = 2,3404$$

La distance est donc

$$\begin{aligned} \sigma &= 2953m \cdot (1,8413 - 2,3404) \\ &= -1474m \end{aligned}$$

La distance parcourue est donc de 1453 m.

**13.** a) La distance minimale pour souffrir est

$$\begin{aligned} r_{ouch} &= 2000km \cdot \sqrt[3]{\frac{M}{M_{\odot}}} \\ &= 2000km \cdot \sqrt[3]{\frac{20M_{\odot}}{M_{\odot}}} \\ &= 5429km \end{aligned}$$

b) La distance pour déchirer est

$$\begin{aligned} r_{déchire} &= \frac{r_{ouch}}{6} \\ &= \frac{5429km}{6} \\ &= 905km \end{aligned}$$

c) Comme le rayon de Schwarzschild est de

$$\begin{aligned} R_S &= 2,953km \cdot \frac{M}{M_{\odot}} \\ &= 2,953km \cdot \frac{20M_{\odot}}{M_{\odot}} \\ &= 59,06km \end{aligned}$$

La distance minimale pour ne pas souffir est de 91,9 fois le rayon de Schwarzschild et la distance minimale pour ne pas être spaghettifié est de 15,3 fois le rayon de Schwarzschild.

**14.** Ici on veut que

$$r_{ouch} < R_S$$

Cela donne

$$2000km \cdot \sqrt[3]{\frac{M}{M_{\odot}}} < 2,953km \cdot \frac{M}{M_{\odot}}$$

Si on isole *M*, on arrive à

$$677 \cdot \sqrt[3]{\frac{M}{M_\odot}} < \frac{M}{M_\odot}$$

$$677^3 \cdot \frac{M}{M_\odot} < \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3$$

$$677^3 < \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2$$

$$17\,626 M_\odot < M$$

La masse minimale est donc de 17 626 masses solaires.

**15.** La durée maximale est

$$\begin{aligned}\tau &= 1,557\times10^{-5} s \frac{M}{M_\odot} \\ &= 1,557\times10^{-5} s \frac{100M_\odot}{M_\odot} \\ &= 1,557\times10^{-3} s \\ &= 1,557 ms\end{aligned}$$

**16.** L'horizon des évènements est à

$$\begin{aligned}r_{HE} &= \tfrac{1}{2} R_S \left(1+\sqrt{1-a^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} R_S \left(1+\sqrt{1-0,6^2}\right) \\ &= \tfrac{9}{10} R_s\end{aligned}$$

Comme le rayon de Schwarzschild est de

$$\begin{aligned}R_S &= 2,953 km \cdot \frac{M}{M_\odot} \\ &= 2,953 km \cdot \frac{5M_\odot}{M_\odot} \\ &= 14,765 km\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} r_{HE} &= \tfrac{9}{10} \cdot 14,765km \\ &= 13,2885km \end{aligned}$$

L'horizon de Cauchy est à

$$\begin{aligned} r_{HC} &= \tfrac{1}{2} R_S \left(1 - \sqrt{1-a^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} R_S \left(1 - \sqrt{1-0,6^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{10} R_s \\ &= \tfrac{1}{10} \cdot 14,765km \\ &= 1,4765km \end{aligned}$$

**17.** a) Le rayon de la plus petite orbite se trouve avec

$$\begin{aligned} r_{ISCO} &= \tfrac{1}{2} R_S \left(3 + Z_2 \pm \sqrt{(3-Z_1)(3+Z_1+2Z_2)}\right) \\ Z_1 &= 1 + \sqrt[3]{1-a^2}\left(\sqrt[3]{1+a^2} + \sqrt[3]{1-a^2}\right) \\ Z_2 &= \sqrt{3a^2 + Z_1^2} \end{aligned}$$

La valeur de $Z_1$ est

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \sqrt[3]{1-0,6^2}\left(\sqrt[3]{1+0,6^2} + \sqrt[3]{1-0,6^2}\right) \\ &= 2,69744 \end{aligned}$$

La valeur de $Z_2$ est

$$\begin{aligned} Z_2 &= \sqrt{3a^2 + Z_1^2} \\ &= \sqrt{3 \cdot 0,6^2 + 2,69744^2} \\ &= 2,89071 \end{aligned}$$

Le rayon de l'orbite la plus petite orbite stable est donc

$$\begin{aligned} r_{ISCO} &= \tfrac{1}{2} R_S \left(3 + Z_2 - \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} R_S \left(3 + 2,89017 - \sqrt{(3 - 2,69744)(3 + 2,69744 + 2 \cdot 2,89017)}\right) \\ &= 2,0135 R_s \end{aligned}$$

On a gardé le signe négatif pour le ± car Yannick va dans le même sens que la rotation du trou noir sur lui-même.

Comme le rayon de Schwarzschild du trou noir est

$$\begin{aligned} R_S &= 2,953km \cdot \frac{M}{M_\odot} \\ &= 2,953km \cdot \frac{5M_\odot}{M_\odot} \\ &= 14,765km \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} r_{ISCO} &= 2,0135 \cdot 14,765km \\ &= 29,73km \end{aligned}$$

b) La période est

$$\begin{aligned} T_{loin} &= \frac{2\pi r}{c}\left(\sqrt{\frac{2r}{R_S}} + a\frac{R_S}{2r}\right) \\ &= \frac{2\pi \cdot 10^5 m}{c}\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 10^5 m}{14\,765m}} + 0,6 \cdot \frac{14\,765m}{2 \cdot 10^5 m}\right) \\ &= \frac{2\pi \cdot 10^5 m}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}}(3,769) \\ &= 7,894ms \end{aligned}$$

c) La période est

$$\begin{aligned}T_{vaisseau} &= \frac{2\pi r}{c}\sqrt{\frac{2r-3R_S}{R_S}+a\sqrt{\frac{2R_S}{r}}}\\ &= \frac{2\pi\cdot 10^5 m}{3\times 10^8 \frac{m}{s}}\sqrt{\frac{2\cdot 10^5 m-3\cdot 14\,765m}{14\,765m}+0,6\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 14\,765m}{10^5 m}}}\\ &= \frac{2\pi\cdot 10^5 m}{3\times 10^8 \frac{m}{s}}\cdot\sqrt{10,546+0,326}\\ &= 6,906ms\end{aligned}$$

**18.** On trouve la position du point de Lagrange avec l'équation suivante

$$-\frac{1}{w^2}+\frac{\mu}{(1-w)^2}=\mu-w(1+\mu)$$

Ici, on a

$$\mu=\frac{M_2}{M_1}=\frac{5M_\odot}{2M_\odot}=2,5$$

L'équation devient donc

$$-\frac{1}{w^2}+\frac{2,5}{(1-w)^2}=2,5-3,5w$$

Avec Wolfram alpha
https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=solve+-Divide%5B1%2CPower%5Bx%2C2%5D%5D%2BDivide%5B2.5%2CPower%5B%5C%2840%291-x%5C%2841%29%2C2%5D%5D%3D2.5-3.5*x, on trouve que la seule solution réelle de cette équation est $w$ = 0,407052. Le point de Lagrange est donc à

$$\begin{aligned}r &= 0,407042R\\ &= 0,407042\cdot 10\,000\,000km\\ &= 4\,070\,420km\end{aligned}$$

de l'étoile la moins massive.

**19.** La position du point de Lagrange avec l'équation suivante

$$-\frac{1}{w^2}+\frac{\mu}{(1-w)^2}=\mu-w(1+\mu)$$

Ici, on sait que $w$ = 0,2. On a donc l'équation suivante

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{0,2^2}+\frac{\mu}{(1-0,2)^2}=\mu-0,2\cdot(1+\mu) \\
-25+1,5625\mu=\mu-0,2-0,2\mu \\
0,7625\mu=24,8 \\
\mu=32,52
\end{gathered}$$

**20.** Le rapport des luminosités est

$$\frac{I_1}{I_2}=10^{0,4(m_2-m_1)}$$

Si l'étoile est 10 000 fois plus lumineuse, alors on a $I_2$ = 10 000 $I_1$. On a donc

$$\begin{gathered}
\frac{1}{10\,000}=10^{0,4\cdot(m_2-m_1)} \\
10^{-4}=10^{0,4\cdot(m_2-m_1)} \\
-4=0,4\cdot(m_2-m_1) \\
-10=m_2-m_1 \\
m_2=m_1-10
\end{gathered}$$

Cela signifie que la magnitude baisse de 10.

**21.** La quantité d'hydrogène est

$$\begin{aligned}
M_H&=\frac{10^{38}J}{6,4\times10^{14}\,\frac{J}{kg}} \\
&=1,5\times10^{23}kg
\end{aligned}$$

Cela représente 2,6 % de la masse de la Terre.

**22.** Puisque la sphère de matière est passée d'un rayon nul à un rayon de 8'' d'arc en 8 ans, $\omega$ est 1''/an. En radian par seconde, $\omega$ est

$$\begin{aligned}\omega &= 1'' / an \\ &= \left(\frac{1}{3600}\right)\frac{°}{an}\cdot\frac{\pi rad}{180°}\cdot\frac{1an}{365,25\cdot 24\cdot 60\cdot 60s} \\ &= 1,536\times 10^{-14}\,\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La distance est donc de

$$\begin{aligned}D &= \frac{v}{\omega_{(rad/s)}} \\ &= \frac{1700\times 10^{3}\,\tfrac{m}{s}}{1,536\times 10^{-13}\,\tfrac{rad}{s}} \\ &= 1,107\times 10^{19}m \\ &= 1170al\end{aligned}$$

**23.** Sachant que la magnitude absolue de la supernova est de -19,6, on trouve la distance avec

$$\begin{aligned}M &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ -19,6 &= 8,9 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ D &= 16,3Mal\end{aligned}$$

**24.** La limite de visibilité étant d'une magnitude de 6, on trouve la distance maximale avec

$$\begin{aligned}M &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ -19,6 &= 6 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ D &= 4,3Mal\end{aligned}$$

**25.** a) L'énergie gravitationnelle est

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \\
&= -\frac{3}{5}\cdot\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(2\times10^{30}\,kg\right)^2}{5,5\times10^{6}\,m} \\
&= -2,91\times10^{43}\,J
\end{aligned}
$$

b) L'énergie libérée par une réaction

$$14\,{}^{12}_{6}C \rightarrow 3\,{}^{56}_{28}Ni$$

est

$$
\begin{aligned}
Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(14\cdot 12u - 3\cdot 55,942132u\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(168u - 167,826396u\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(0,173604u\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= 161,7\,MeV
\end{aligned}
$$

Pour trouver le nombre de réaction, trouvons le nombre d'atome de carbone 12. Ce nombre est

$$N_C = \frac{2\times10^{30}\,kg}{0,012\,\frac{g}{mol}}\cdot 6,02\times10^{23}\,\tfrac{atomes}{mol} = 1,00\times10^{56}$$

Comme il faut 14 atomes de carbone pour faire 1 réaction, le nombre de réaction est

$$N = \frac{N_C}{14} = \frac{1,00\times10^{56}}{14} = 7,17\times10^{54}$$

Puisque chaque réaction donne 161,7 MeV, on a

$$
\begin{aligned}
E &= 7,17\times10^{54}\cdot 161,7\,MeV \\
&= 1,159\times10^{57}\,MeV \\
&= 1,857\times10^{44}\,J
\end{aligned}
$$

c) La somme des deux énergies

$$\begin{aligned} E &= U_g + Q \\ &= -2,91\times 10^{43} J + 1,857\times 10^{44} J \\ &= 1,566\times 10^{44} J \end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, il y a assez d'énergie pour disperser l'étoile. De plus, la valeur de l'énergie obtenue correspond pas mal à l'énergie libérée par une supernova de type Ia.

**26.** La température est

$$\begin{aligned} T &= 2\,000\,000K \cdot \left(\frac{10M_\odot}{M}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= 2\,000\,000K \cdot \left(\frac{10M_\odot}{25M_\odot}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= 2\,000\,000K \cdot \left(\frac{10}{25}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= 1\,590\,541K \end{aligned}$$

**27.** La puissance est

$$\begin{aligned} P &= \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1+m_2)}{5c^5 r^5} \\ &= \frac{32\cdot\left(6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)^4 \cdot \left(2\times 10^{30} kg\right)^2 \cdot \left(6\times 10^{24} kg\right)^2 \cdot \left(2\times 10^{30} kg + 6\times 10^{24} kg\right)}{5\cdot\left(3\times 10^8 \frac{m}{s}\right)^5 \cdot \left(1,5\times 10^{11} m\right)^5} \\ &= 198W \end{aligned}$$

b) Le temps est

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{5c^5r^4}{256G^3m_1m_2\left(m_1+m_2\right)} \\
&= \frac{5\cdot\left(3\times10^8\,\frac{m}{s}\right)^5\cdot\left(1,5\times10^{11}m\right)^4}{256\cdot\left(6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^3\cdot2\times10^{30}kg\cdot6\times10^{24}kg\cdot\left(2\times10^{30}kg+6\times10^{24}kg\right)} \\
&= 3,37\times10^{30}s \\
&= 1,07\times10^{23}a
\end{aligned}
$$

**28.** a) On trouve la distance avec la troisième loi de Kepler

$$
\begin{aligned}
T^2 &= \frac{4\pi^2r^3}{GM_{tot}} \\
\left(36\,000s\right)^2 &= \frac{4\pi^2r^3}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot10\times10^{30}kg} \\
r &= 2,798\times10^9m
\end{aligned}
$$

b) La puissance est

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{32G^4m_1^2m_2^2\left(m_1+m_2\right)}{5c^5r^5} \\
&= \frac{32\cdot\left(6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^4\cdot\left(4\times10^{30}kg\right)^2\cdot\left(6\times10^{30}kg\right)^2\cdot10\times10^{30}kg}{5\cdot\left(3\times10^8\,\frac{m}{s}\right)^5\cdot\left(2,798\times10^9m\right)^5} \\
&= 1,754\times10^{24}W
\end{aligned}
$$

b) Le temps est

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{5c^5r^4}{256G^3m_1m_2\left(m_1+m_2\right)} \\
&= \frac{5\cdot\left(3\times10^8\,\frac{m}{s}\right)^5\cdot\left(2,798\times10^9m\right)^4}{256\cdot\left(6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^3\cdot4\times10^{30}kg\cdot6\times10^{30}kg\cdot10\times10^{30}kg} \\
&= 4,08\times10^{16}s \\
&= 1,29\times10^9\,ans
\end{aligned}
$$

**29.** a) À $r = 50\ R_s$, on a

$$\begin{aligned}\eta &= \arccos\left(\frac{2r}{r_0}-1\right)\\ &= \arccos\left(\frac{2\cdot 50R_s}{1000R_s}-1\right)\\ &= \arccos(-0,9)\\ &= 2,69057\end{aligned}$$

Le temps est donc

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{2}\frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{R_S}}(\sin\eta+\eta)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1000\cdot R_S}{3\times 10^8\,\frac{m}{s}}\cdot\sqrt{\frac{1000R_s}{R_S}}\left(\sin(2,69057)+2,69057\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1000\cdot R_S}{3\times 10^8\,\frac{m}{s}}\cdot\sqrt{1000}\cdot 3,12646\end{aligned}$$

Comme le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S &= 2,953km\cdot\frac{M}{M_\odot}\\ &= 2,953km\cdot\frac{5M_\odot}{M_\odot}\\ &= 14,765km\end{aligned}$$

le temps est

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1000\cdot 14\,765m}{3\times 10^8\,\frac{m}{s}}\cdot\sqrt{1000}\cdot 3,12646\\ &= 2,433s\end{aligned}$$

b) À $r = 1\ R_s$, on a

$$\begin{aligned}\eta &= \arccos\left(\frac{2r}{r_0}-1\right)\\ &= \arccos\left(\frac{2\cdot 1R_s}{1000R_s}-1\right)\\ &= \arccos\left(-\frac{499}{500}\right)\\ &= 3,0783366\end{aligned}$$

Le temps nécéssaire pour arriver à l'horizon est donc

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{2}\frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{R_S}}\left(\sin\left(3,0783366\right)+3,0783366\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{R_S}}\cdot 3,1415504\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1000\cdot 14\,765m}{3\times 10^8\,\frac{m}{s}}\cdot\sqrt{\frac{1000R_s}{R_s}}\cdot 3,1415504\\ &= 2,4447038s\end{aligned}$$

À $r = 0$, on a

$$\begin{aligned}\eta &= \arccos\left(\frac{2r}{r_0}-1\right)\\ &= \arccos\left(\frac{2\cdot 0R_s}{1000R_s}-1\right)\\ &= \arccos\left(-1\right)\\ &= \pi\end{aligned}$$

Le temps nécéssaire pour arriver à la singularité est donc

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{2}\frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{R_S}}\left(\sin\left(\pi\right)+\pi\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{R_S}}\cdot\pi\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1000\cdot 14\,765m}{3\times 10^8\,\frac{m}{s}}\cdot\sqrt{\frac{1000R_s}{R_s}}\cdot\pi\\ &= 2,4447366s\end{aligned}$$

Le temps pour passer de $r$ =1 $R_s$ à $r$ = 0 est donc

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_0 - t_1\\ &= 2,4447366s - 2,4447038s\\ &= 0,0000328\\ &= 32,8ms\end{aligned}$$

c) À $r$ = 0, on a

$$\begin{aligned}\eta &= \arccos\left(\frac{2r}{r_0} - 1\right)\\ &= \arccos\left(\frac{2\cdot 0R_s}{1000R_s} - 1\right)\\ &= \arccos(-1)\\ &= \pi\end{aligned}$$

Le temps est donc

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{2}\frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{R_S}}(\sin\eta + \eta)\\ &= \frac{1}{2}\frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{R_S}}(\sin\pi + \pi)\\ &= \frac{1}{2}\frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{R_S}}\pi\\ &= \frac{\pi}{2}\frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{R_S}}\\ &= \frac{\pi}{2}\frac{R_s}{c}\frac{r_0}{R_s}\sqrt{\frac{r_0}{R_S}}\\ &= \frac{\pi}{2}\frac{R_s}{c}\left(\frac{r_0}{R_s}\right)^{3/2}\end{aligned}$$

d) À $r$ = 50 $R_s$, on a

$$\begin{aligned}\eta &= \arccos\left(\frac{2r}{r_0}-1\right)\\ &= \arccos\left(\frac{2\cdot 50R_s}{1000R_s}-1\right)\\ &= \arccos(-0,9)\\ &= 2,69057\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\xi &= \sqrt{\frac{r_0}{R_s}-1}\\ &= \sqrt{\frac{1000R_s}{R_s}-1}\\ &= \sqrt{999}\end{aligned}$$

Le temps est donc

$$\begin{aligned}t &= \frac{R_s}{c}\left(\ln\left|\frac{\xi+\tan\frac{\eta}{2}}{\xi-\tan\frac{\eta}{2}}\right|+\xi\left(\eta+\frac{r_0}{2R_s}(\sin\eta+\eta)\right)\right)\\ &= \frac{14\,765m}{3\times10^8\,\frac{m}{s}}\cdot\left(\ln\left|\frac{\sqrt{999}+\tan(1,3453)}{\sqrt{999}-\tan(1,3453)}\right|+\sqrt{999}\cdot\left(2,69057+\frac{1000R_s}{2R_s}\left(\sin(2,69057)+2,69057\right)\right)\right)\\ &= \frac{14\,765m}{3\times10^8\,\frac{m}{s}}\cdot\left(\ln\left|\frac{35,96586}{27,24806}\right|+\sqrt{999}\cdot 1565,9\right)\\ &= \frac{14\,765m}{3\times10^8\,\frac{m}{s}}\cdot(0,277+49\,494)\\ &= 2,436s\end{aligned}$$

C'est à peine plus grand que le temps mesuré par la personne qui tombe (2,433 s).

e) À $r = 1\ R_s$, on a

$$\begin{aligned}\eta &= \arccos\left(\frac{2r}{r_0}-1\right)\\ &= \arccos\left(\frac{2\cdot 1R_s}{1000R_s}-1\right)\\ &= \arccos\left(-\frac{499}{500}\right)\\ &= 3,0783366\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\xi &= \sqrt{\frac{r_0}{R_s}-1}\\ &= \sqrt{\frac{1000R_s}{R_s}-1}\\ &= \sqrt{999}\end{aligned}$$

Le temps est donc

$$\begin{aligned}t &= \frac{R_s}{c}\left(\ln\left|\frac{\xi+\tan\frac{\eta}{2}}{\xi-\tan\frac{\eta}{2}}\right|+\xi\left(\eta+\frac{r_0}{2R_s}(\sin\eta+\eta)\right)\right)\\ &= \frac{14\,765m}{3\times 10^8\,\frac{m}{s}}\cdot\left(\ln\left|\frac{\sqrt{999}+\tan(1,5391)}{\sqrt{999}-\tan(1,5391)}\right|+\sqrt{999}\cdot\left(3,07834+\frac{1000R_s}{2R_s}\left(\sin(3,07834)+3,07834\right)\right)\right)\\ &= \frac{14\,765m}{3\times 10^8\,\frac{m}{s}}\cdot\left(\ln\left|\frac{63,2139}{0}\right|+\sqrt{999}\cdot 1573,8\right)\\ &= \infty\end{aligned}$$

Il faut donc un temps infini pour que la personne qui tombe arrive à l'horizon selon la personne qui est loin du trou noir.