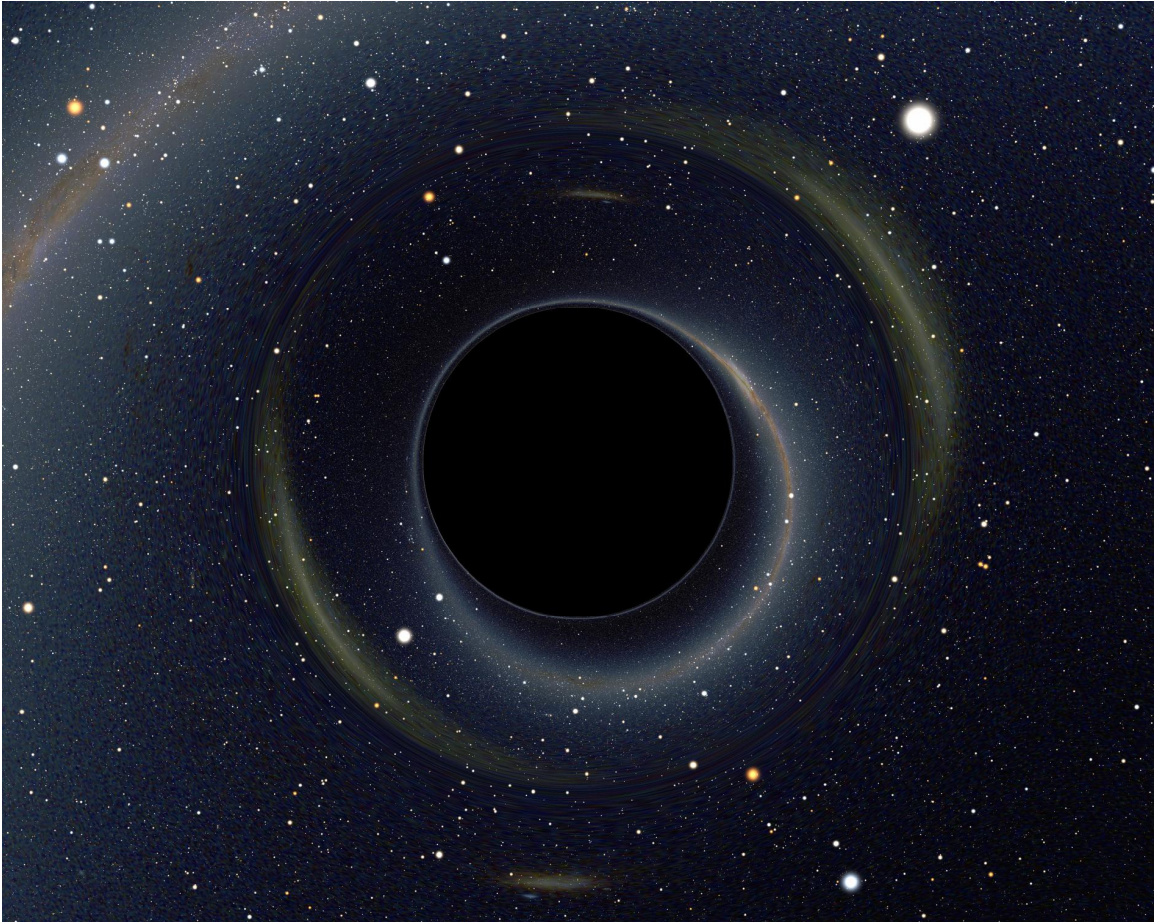


12 LES CADAVRES STELLAIRES

Qu'est-ce qu'un trou noir et comment peut-il se former ?



astroreview.com/issue/2012/article/how-black-holes-affect-gravity

Découvrez la réponse à cette question dans ce chapitre.

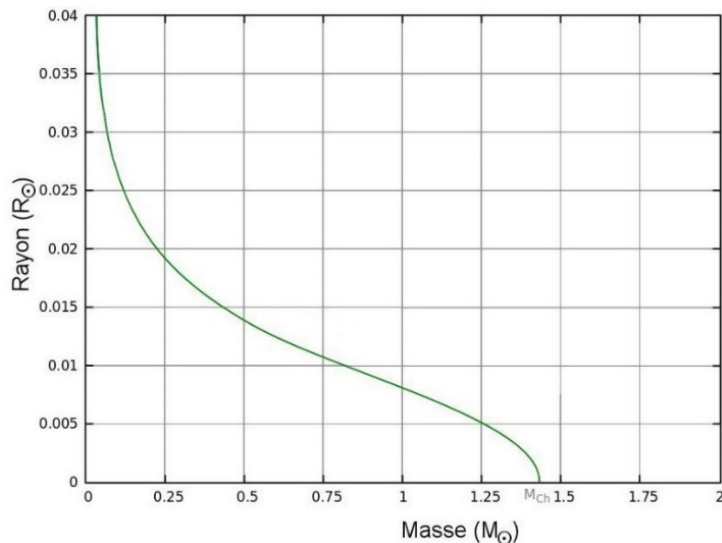
12.1 LES NAINES BLANCHES

On a vu au chapitre précédent que la mort des étoiles de moins de $8 M_{\odot}$ mène à la formation d'une naine blanche. C'est ce qui reste de l'étoile une fois que les couches externes ont été éjectées et que la fusion se soit arrêtée. La naine blanche est formée du cœur de carbone et d'oxygène entouré de couches d'hélium et d'hydrogène peu massives par rapport au cœur. Dans cette étoile, il y a un équilibre entre la force de gravitation et la force de pression de dégénérescence. C'est Ralph Howard Fowler qui appliqua le premier les idées de la pression de dégénérescence aux naines blanches en 1926.

Masse et dimension

Les naines blanches ont des masses se situant en $0,17 M_{\odot}$ et $1,33 M_{\odot}$, mais 80 % ont des masses se situant entre $0,42 M_{\odot}$ et $0,7 M_{\odot}$. Quand le Soleil va mourir, il ne restera qu'une naine blanche de $0,541 M_{\odot}$.

Les naines blanches ne sont pas très grosses puisqu'elles ont une taille comparable à celle de la Terre. Curieusement, la taille des naines blanches diminue quand on augmente la masse de la naine blanche. En augmentant la masse, on augmente les forces gravitationnelles et il faut donc augmenter la pression de dégénérescence dans l'étoile. Comme cette pression dépend uniquement de la densité de l'étoile, cela signifie qu'il faut augmenter la densité de l'étoile. En fait, il faut tellement augmenter la densité que le rayon de l'étoile doit diminuer quand on augmente la masse d'une naine blanche, ce qui est un peu contrintuitif.



commons.wikimedia.org/wiki/File:WhiteDwarf_mass-radius.jpg

La formule donnant le rayon de la naine blanche en fonction de la masse est

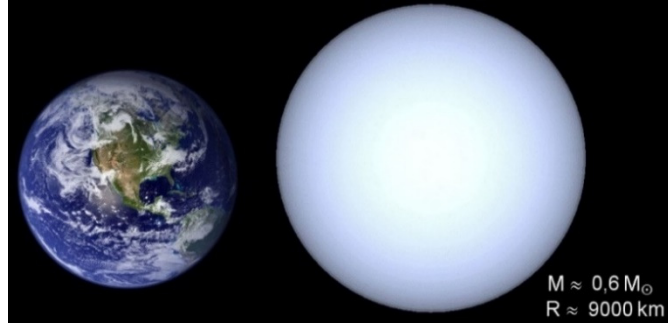
Rayon d'une naine blanche

$$R = 0,0126 R_{\odot} \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{\odot}}{M}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{M}{1,44 M_{\odot}} \right)^{4/3}}$$

(Cette formule est en réalité une approximation, mais elle est quand même assez près de la réalité.)

À l'aide de cette formule, on peut calculer que le rayon d'une naine blanche de $0,6 M_{\odot}$ est d'environ 9000 km.

astrobob.areavoices.com/tag/white-dwarf/



On comprend alors assez vite que la densité des naines blanches est phénoménale. La naine blanche montrée sur la figure a une densité de près de 400 millions de kg/m³. Une cuillère à thé (5 ml) de cette naine blanche aurait donc une masse de 2000 kg !

Luminosité

Le cœur de l'étoile étant très chaud pendant la vie de l'étoile, on s'attend à ce que ce cœur dénudé soit très chaud. Quand la naine blanche devient visible, sa température de surface est de l'ordre de 30 000 K, mais elle diminue rapidement parce que la naine émet du rayonnement. Ce rayonnement rend la naine blanche visible. Toutefois, la luminosité de l'étoile étant déterminée par

$$L = \sigma 4\pi^2 R^2 T^4$$

on comprend que, malgré une température élevée, la luminosité n'est pas si grande à cause de la taille réduite de la naine blanche. Typiquement, la luminosité des naines blanches dans le visible est de $0,001 L_{\odot}$. La faible luminosité des naines blanches rend leur observation très difficile. En fait, aucune naine blanche n'est visible à l'œil nu même si certaines ne sont qu'à quelques années-lumière de nous.

On peut voir la différence de luminosité entre Sirius A et Sirius B dans le visible sur l'image de droite.



outreach.atnf.csiro.au/education/senior/astrophysics/binary_types.html



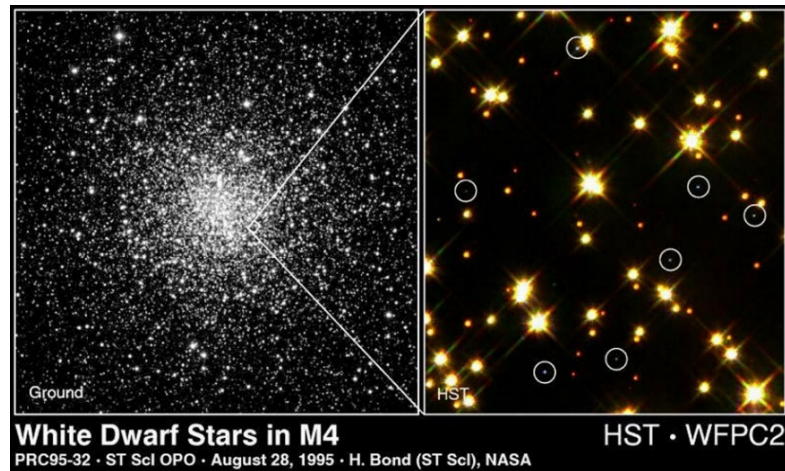
d'onde comme l'ultraviolet et les rayons X.

Remarquez toutefois que le résultat peut être bien différent si on observe à une autre longueur d'onde. Par exemple, Sirius A n'est pas une source importante de rayons X, ce qui fait qu'en rayon X, Sirius B est plus brillante que Sirius A. Pour comprendre pourquoi Sirius B émet autant de rayons X, rappelez-vous que le maximum d'émission du corps noir se déplace vers les petites longueurs d'onde quand la température augmente. La très haute température de la naine blanche amène donc une émission plus intense pour les petites longueurs

Abondance

Bien qu'elles soient difficiles à détecter, on constate qu'il y a beaucoup de naines blanches. Déjà, on en trouve 8 (dont Sirius B et Procyon B) à moins de 20 al de la Terre.

L'image de droite vous montre quelques naines blanches présentes dans l'amas M4.



esahubble.org/images/opo9532a/

En tout, on connaît 144 800 naines blanche (14 janvier 2025)

<https://www.montrealwhitedwarfdatabase.org/tables-and-charts.html>

Champ magnétique

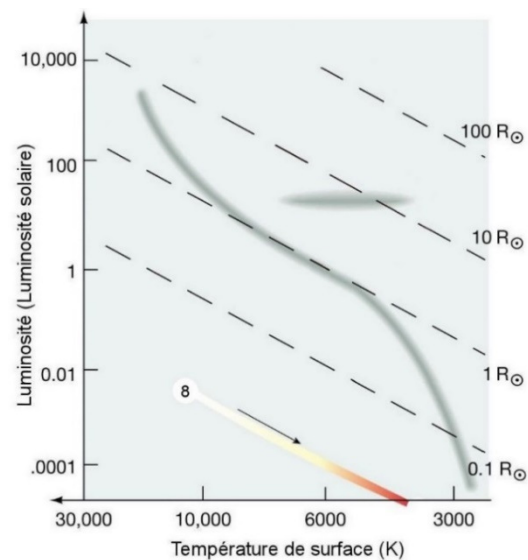
Les mesures par effet Zeeman indiquent que le champ magnétique à la surface des naines blanches est très important. Il peut atteindre 1000 teslas dans certains cas, ce qui est un champ des centaines de millions plus intense que celui à la surface de la Terre.

Les naines noires

Les naines blanches sont lumineuses uniquement parce qu'elles sont chaudes. Toutefois, comme elles n'ont pas de source d'énergie interne, elles se refroidissent. Ainsi, leur température et leur luminosité diminuent lentement, de sorte qu'elle se déplace lentement vers le coin inférieur droit du diagramme HR.

Au bout de 10 milliards d'années, la naine blanche aura tellement refroidi que la radiation émise deviendra trop faible pour qu'on puisse la voir. On obtiendra alors une *naine noire*.

L'univers étant encore trop jeune, aucune naine blanche n'a eu le temps de se refroidir suffisamment pour devenir une naine noire. En fait, il n'y a pratiquement pas de naines blanches qui ont une luminosité inférieure à $3 \times 10^{-5} L_{\odot}$ et une température inférieure à



www2.astro.psu.edu/users/cpalma/astro10/class11.html

4000 K, ce qui correspond à un temps de refroidissement de $9,0 \pm 1,8$ milliard d'années. Ce résultat est assez bien en accord avec l'âge maximal que peut avoir une naine blanche si l'univers a 13,8 milliards d'années.

Masse maximale des naines blanches

Il y a une limite à ce que peut faire la pression de dégénérescence des électrons. Si la masse de l'étoile dépasse $1,44 M_{\odot}$, la force faite par la pression de dégénérescence ne pourra jamais être assez grande pour contrebalancer la force de gravitation. Il est vrai qu'en comprimant le gaz on forcera les électrons à occuper le même endroit, ce qui forcera certains de ceux-ci à avoir des vitesses très importantes et ces électrons feront une pression importante. Toutefois, la vitesse des électrons ne pouvant dépasser la vitesse de la lumière, la pression n'augmentera plus aussi vite quand la compression du gaz devient très grande. Dans ces conditions, la force de pression n'augmente pas assez pour contrer l'augmentation de la force gravitationnelle quand on comprime l'étoile et il y a un effondrement gravitationnel si la masse de la naine dépasse $1,44 M_{\odot}$. Cela semble confirmé par le fait qu'on n'observe aucune naine blanche dont la masse est supérieure à cette valeur critique, appelée la *masse de Chandrasekhar*.

Les étoiles de moins de $8 M_{\odot}$ qui meurent en donnant naissance à une naine blanche n'amènent jamais la formation de naine blanche ayant une masse supérieure à la limite de Chandrasekhar. Il est possible cependant qu'une naine blanche accumule ultérieurement de la masse et dépasse la masse limite. Nous verrons plus loin ce qui arrive dans ce cas.

12.2 LES ÉTOILES À NEUTRONS

Après l'explosion d'une supernova de type II, il ne reste que le cœur effondré de l'étoile massive. Celui-ci s'est transformé en une boule de neutrons durant l'effondrement et c'est la pression de dégénérescence des neutrons qui empêche la contraction gravitationnelle de se poursuivre. Cette boule de neutrons porte le nom d'*étoile à neutrons*. Les physiciens J. Robert Oppenheimer et G.M. Volkoff ont fait la première théorie des étoiles à neutrons en 1939 après que Walter Baade et Fritz Wicky aient proposé leur existence en 1933.

Masse et dimension

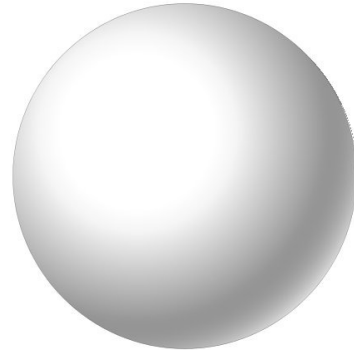
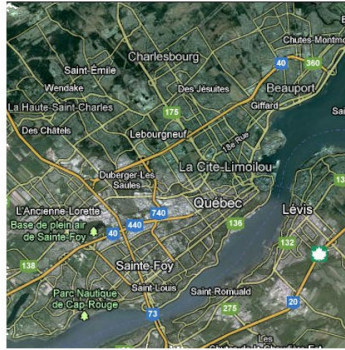
Les étoiles à neutrons ont des masses se situant généralement entre $1,4 M_{\odot}$ et environ $2 M_{\odot}$ et ont un diamètre de quelques dizaines de kilomètres seulement. Tout comme avec les naines blanches, la taille diminue quand la masse de l'étoile à neutrons augmente. Selon un modèle, la relation entre le rayon et la masse d'une étoile à neutrons est

Rayon d'une étoile à neutrons

$$R = 11 \text{ km} \cdot \sqrt[3]{\frac{1,4 M_{\odot}}{M}}$$

(C'est un peu approximatif, on a beaucoup de difficultés à modéliser la structure interne de ces étoiles.)

L'image de droite fait la comparaison entre la taille d'une étoile à neutrons de $1,5 M_{\odot}$ et la ville de Québec.



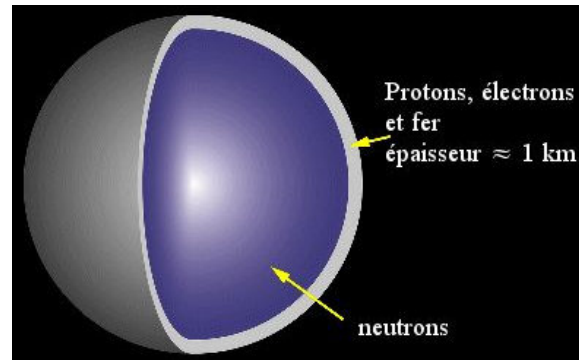
$$M = 1,5 M_{\odot} \quad R \approx 10 \text{ km}$$

On comprend alors que la densité des étoiles à neutrons est vraiment hors du commun. L'étoile à neutrons de la figure a une densité de près de 10^{18} kg/m^3 . Une cuillère à thé (5 ml) de cette étoile à neutrons aurait donc une masse de 5 000 millions de tonnes ! Tous les humains de la Terre occuperaient à peine le quart d'une cuillère à thé si on les compactait avec la même densité.

Structure

Les étoiles à neutrons ne sont pas exclusivement constituées de neutrons. À la surface, on retrouve une couche dont l'épaisseur est de l'ordre de 1 km, dans laquelle il y a des protons et des électrons (dégénérés) et des noyaux atomiques comme du fer.

Quant à l'intérieur, le mystère demeure puisqu'on ne connaît pas très bien ce qui se passe à de telles densités. A-t-on un superfluide de neutrons ? (Un superfluide n'a pas de viscosité. Une fois mis en mouvement, il ne s'arrête jamais.) Y'a-t-il d'autres particules exotiques, comme des hypérons, qui se mêlent aux neutrons ? Ce sont ces incertitudes qui font qu'on ne connaît pas exactement la formule du rayon des étoiles à neutrons en fonction de leur masse.



simple.wikipedia.org/wiki/Neutron_star

Luminosité

Le cœur de l'étoile étant très chaud pendant la vie de l'étoile, on s'attend à ce que ce cœur dénudé soit très chaud. C'est effectivement le cas puisque la température de surface des étoiles à neutrons se situe aux environs de 1 million de kelvins. Toutefois, la taille est si petite que la luminosité de l'étoile à neutrons atteint à peine $0,00001 L_{\odot}$.

Malgré cette faible luminosité, on parvint quand même à en observer. Cette image montre l'étoile à neutrons RX J1856.5-3754, qui est l'étoile à neutrons la plus près de nous, dans la constellation de la Couronne australe. Elle se situe à une distance se situant entre 200 al et 400 al selon les estimations. Sa température de surface est de 434 000 K, sa masse est de $0,9 M_{\odot}$ et son rayon est de 14 km.

On ne détecte pas beaucoup d'étoiles à neutrons ainsi. La plupart des étoiles à neutrons connues ont été découvertes parce qu'elles sont des pulsars.



www.newworldencyclopedia.org/entry/Neutron_star

Les pulsars

La découverte des pulsars

Jocelyn Bell Burnell avait passé deux ans à préparer 2048 antennes radio dans la campagne anglaise. Elle et son directeur de thèse, Anthony Hewish, voulaient explorer les scintillations provoquées par le passage des ondes radio à 81,5 MHz provenant d'objets très lointains à travers le vent solaire.

En juillet 1967, Bell remarqua dans ses données qu'elle captait une source intense toutes les 23 h 56 min et 4 s. Cette période, correspondant au jour sidéral, montrait clairement que cette source d'ondes radio devait se situer dans l'espace et qu'on la captait chaque fois qu'elle passait au-dessus des antennes. En étudiant davantage ce signal provenant de la constellation du Petit Renard, elle constata qu'il consistait en un pulse d'une durée de 0,04 s se répétant toutes les 1,337 302 088 331 secondes. On appela *pulsar* l'objet qui émet ainsi des pulses de radiation de façon si régulière. Ce premier pulsar découvert par Bell porte le joli nom de PSR 1919+21.

Nous pouvons écouter les pulses émis par les pulsars puisqu'on peut convertir les ondes radio reçues en son. Dans l'extrait suivant, vous pouvez entendre les pulses de radiation provenant du pulsar PSR 0329+54, dont la période est de 0,714 52 s.

https://physique.merici.ca/astro/Sons/pulsar_PSR_0329_54.mp3

Cet autre pulsar, PSR 1937+21, est beaucoup plus rapide. Il est le deuxième plus rapide connu. Sa période est de seulement 0,001 557 8 s, ce qui veut dire qu'on entend 642 pulses de radiation par seconde.

https://physique.merici.ca/astro/Sons/B1937_21.mp3

Lors de la découverte du premier signal en 1967, on a exploré plusieurs hypothèses pour en expliquer l'origine. Pendant un temps, on a même envisagé que le signal pourrait provenir d'une civilisation extraterrestre, mais la découverte d'un autre signal de même nature rendait l'hypothèse invraisemblable. En effet, comment deux civilisations distinctes

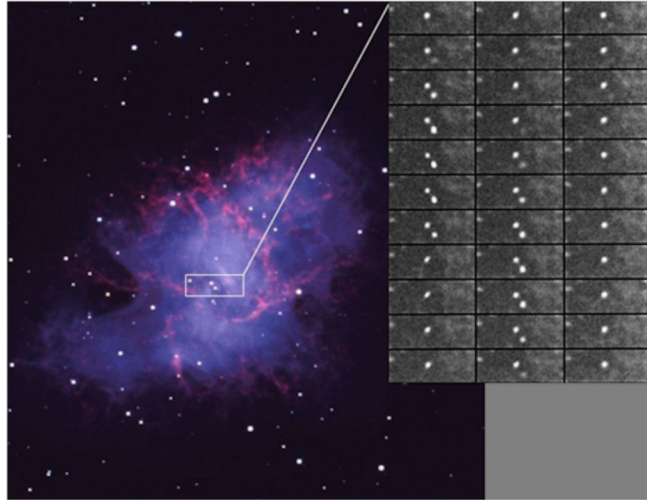
auraient-elles pu en arriver à émettre des signaux de même nature et ayant des fréquences similaires ? L'hypothèse la plus plausible était celle associant les pulsars aux étoiles à neutrons. Cette hypothèse a été assez rapidement (1968) confirmée par la découverte d'un pulsar au centre de la nébuleuse du Crabe, qui est un vestige d'une supernova. Le pulsar se trouvait exactement à l'endroit où devait se trouver l'étoile à neutrons.

Dans cet extrait, on peut entendre les pulses de radiation provenant du pulsar au centre de la nébuleuse du Crabe, dont la période est de 33,5 ms.

https://physique.merici.ca/astro/Sons/pulsar_PSR_B0531_21_crab.mp3

On peut voir sur l'image de droite une suite d'images du pulsar central de la nébuleuse du Crabe. On voit bien le changement d'intensité provoqué par les pulses de radiation.

La période des pulses est si petite avec ce pulsar qu'on ne les avait pas remarqués au départ. Il a fallu prendre des images avec des temps de pose très courts pour qu'on remarque les variations d'intensité.



messier.seds.org/more/m001_pulsar.html

Le mécanisme d'émission

C'est le directeur de thèse de Bell, Anthony Hewish, qui a trouvé l'explication de ce phénomène et qui lui a permis d'obtenir le prix Nobel de 1974 (juste à lui, pas à Jocelyn...). La clé de l'explication des pulsars réside dans la rotation rapide de l'étoile à neutrons, qui est une conséquence de la conservation du moment angulaire. Cette loi de conservation nous dit que le moment cinétique $L = I\omega$, est conservé en l'absence de moment de force externe. Lors de l'effondrement du cœur, il n'y a effectivement pas de force externe, ce qui signifie qu'on doit avoir

$$I\omega = I'\omega'$$

Puisque le moment d'inertie d'une sphère est $\frac{2}{5}MR^2$ et que la vitesse de rotation angulaire est $2\pi/T$, on a

$$\frac{2}{5}MR^2 \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{5}MR'^2 \cdot \frac{2\pi}{T'}$$

En simplifiant, on arrive à

Changement de la période de rotation avec la contraction

$$\frac{R^2}{T} = \frac{R'^2}{T'}$$

On voit donc que la période de rotation doit diminuer si le rayon diminue.

Exemple 12.2.1

Le cœur d'une étoile avait un rayon de 10 000 km et tournait sur lui-même en une semaine avant l'effondrement. Quelle est la période de rotation après l'effondrement, si le cœur a maintenant un rayon de 10 km ?

On a

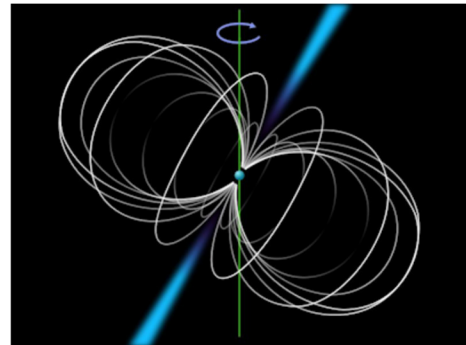
$$\frac{R^2}{T} = \frac{R'^2}{T'}$$

$$\frac{(10^7 \text{ m})^2}{604\,800 \text{ s}} = \frac{(10^4 \text{ m})^2}{T'}$$

$$T' = 0,6048 \text{ s}$$

La rotation devient donc très rapide. Ainsi, les étoiles à neutrons ont très souvent une période de rotation sur elle-même très courte, de l'ordre d'une seconde. Les périodes connues varient entre 0,0014 seconde et 9,4 secondes et la valeur moyenne est de 0,65 s.

Cette rotation rapide, associée à la présence de charges électriques (protons et électrons) en surface de l'étoile à neutrons génère des champs électriques et magnétiques très puissants. L'axe du champ magnétique n'est pas nécessairement aligné avec l'axe de rotation de l'étoile à neutrons sur elle-même comme le montre la figure de droite.



en.wikipedia.org/wiki/Pulsar

Aux pôles magnétiques nord et sud, les champs magnétique et électrique sont très intenses à la surface de l'étoile. Ces champs accélèrent alors les protons et les électrons de la surface, ce qui génère des ondes électromagnétiques. L'émission de ces ondes, d'une puissance entre 10^{27} W et 10^{29} W, se fait cependant dans la direction de l'axe du champ magnétique, représenté par les deux cônes minces en bleu sur la figure. Avec la rotation de l'étoile, les deux cônes bleus tournent aussi et changent constamment de direction.

Il est alors possible qu'un des faisceaux soit directement dirigé, momentanément, vers la Terre. À cause de la rotation de l'étoile, cet alignement sera de courte durée, mais il se fera à chaque rotation. On aura donc un flash lumineux provenant de l'étoile à chaque rotation. L'animation suivante illustre ce mécanisme.

<https://www.youtube.com/watch?v=mXzwtP-KaoI>

On estime qu'environ 20 % des étoiles à neutrons envoient un faisceau vers nous. Les autres étoiles à neutrons font aussi des faisceaux, mais ces derniers ne sont jamais dirigés vers la Terre quand l'étoile à neutrons tourne sur elle-même.

Dans certains cas, il est même possible de voir les deux faisceaux de lumière s'ils sont perpendiculaires à l'axe de rotation de l'étoile.

On comprend alors que certaines étoiles à neutrons tournent à un rythme phénoménal sur elles-mêmes. Le pulsar PSR 1937+21, qu'on a entendu précédemment, tourne si vite sur lui-même qu'à l'équateur sa surface se déplace une vitesse égale à 1/7 de la vitesse de la lumière.

La fin des émissions

L'énergie de cette radiation vient de l'énergie de rotation de l'étoile à neutrons. On observe donc un allongement lent et graduel de la période entre les pulses de radiation. Typiquement, cette période augmente de 10^{-8} seconde par année. Au bout d'une dizaine de millions à une centaine de millions d'années, la rotation devient trop lente et l'émission de radiation dans la direction des pôles magnétiques cesse.

Ainsi, ce ne sont pas toutes les étoiles à neutrons qui sont des pulsars. Beaucoup d'étoiles à neutrons tournent maintenant trop lentement pour émettre des faisceaux de radiation.

Abondance

On connaît actuellement 3748 pulsars (selon www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/, le 12 décembre 2024). La majorité des étoiles à neutrons connues sont des pulsars.

12.3 LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Quand une masse assez importante devient très concentrée, on ne peut pas utiliser la loi de la gravitation de Newton pour déterminer ce qui se passe près de la masse. Quand la gravitation devient trop grande, il faut utiliser les équations de la relativité générale.

Coordonnées r et t

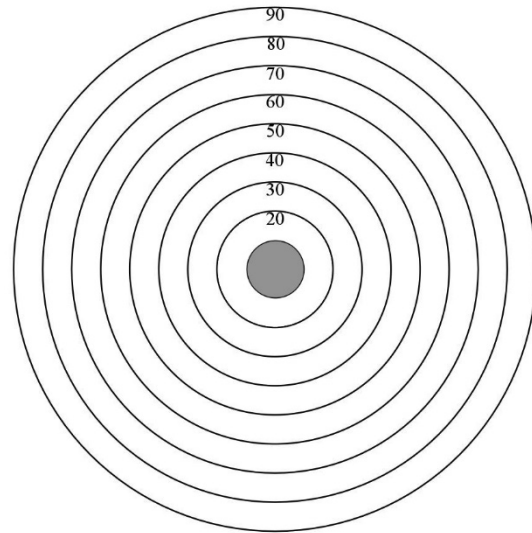
Avant de commencer, il faut dire qu'on va mesurer la position et le temps des événements se produisant autour d'un objet massif avec les coordonnées r et t .

La position r est liée à la distance entre le centre de l'objet massif et l'évènement. Si on est à une certaine distance d'une étoile à neutrons, on trouve r de la façon suivante : on trace une circonférence autour de l'étoile tout en restant à la même distance de l'étoile. Une fois que c'est fait, on divise la valeur de la circonférence par 2π pour trouver la valeur de r . Ça semble compliquer les choses pour rien, mais on va voir qu'il y a des petites complications

quand on mesure les distances dans les directions se dirigeant vers l'étoile ou s'éloignant de l'étoile.

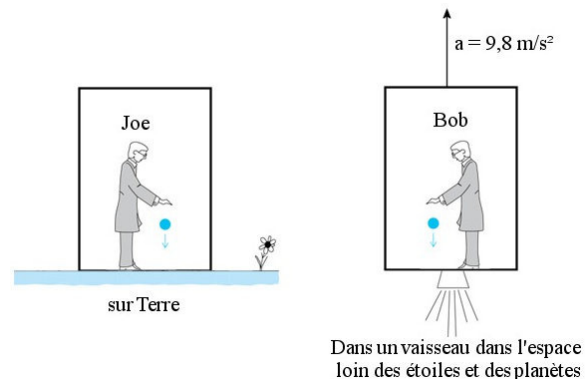
On pourrait donc construire des sphères entourant l'étoile et indiquer en gros, sur chaque sphère, la valeur de r qui correspond à la sphère. La figure de droite montre quelques-unes de ces sphères placées autour d'une étoile à neutrons ayant un r de 10 km. Quelqu'un qui tomberait vers l'étoile verrait ces sphères l'une après l'autre.

Quant au temps t , c'est essentiellement le temps mesuré par un observateur qui est très loin de l'étoile.



Le principe d'équivalence

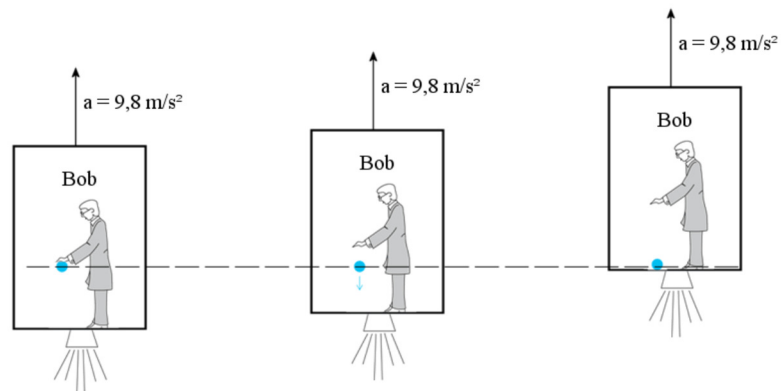
Le point de départ de la relativité générale d'Einstein est le principe d'équivalence. Pour l'illustrer, prenons les deux situations montrées sur la figure. Dans la figure de gauche, Joe est enfermé dans une boîte posée à la surface de la Terre. Dans la figure de droite, Bob, le jumeau identique de Joe, est enfermé dans une boîte dans l'espace loin de toutes masses importantes. Cette boîte accélère dans la direction indiquée avec une accélération de $9,8 \text{ m/s}^2$.



thinkingscifi.wordpress.com/2012/07/21/intelligence-and-imagination/

Selon le principe d'équivalence, tout ce qui se passe dans la boîte est absolument identique pour Bob et Joe. Par exemple, examinons ce qui se produit si Bob et Joe lâchent une balle qu'ils tiennent dans leur main. Quand Joe lâche sa balle, la force de gravitation fait tomber la balle vers le sol avec une accélération de $9,8 \text{ m/s}^2$.

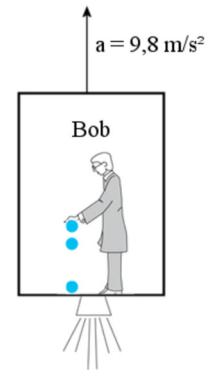
Quand Bob lâche sa balle, il n'y a plus de force sur la balle et elle cesse d'accélérer alors que la boîte de Bob continue d'accélérer vers le haut. Supposons qu'au moment où Bob lâche sa balle, la



vitesse de la boîte est nulle. On a alors le mouvement illustré sur la figure.

Vu de l'intérieur de la boîte, ça donnera l'impression que la balle s'est dirigée vers le sol avec une accélération de $9,8 \text{ m/s}^2$. En fait, le mouvement de la balle que Joe observe est identique au mouvement de la balle observé par Bob.

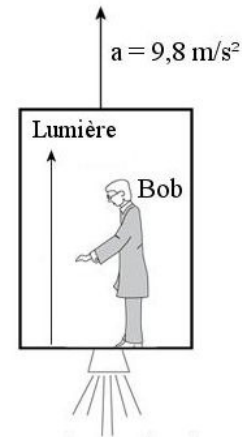
Cela est conforme au principe d'équivalence d'Einstein qui dit que ces deux situations sont impossibles à distinguer pour les observateurs dans les boîtes. Le repère accéléré (Bob) est tout à fait équivalent au repère au repos dans un champ gravitationnel (Joe). Cela signifie qu'il n'y a aucune expérience qui permettrait à Bob ou à Joe de savoir s'ils sont au repos dans un champ gravitationnel ou s'ils sont en train d'accélérer.



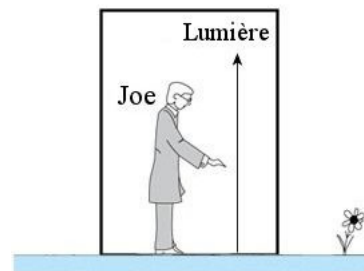
Une expérience avec la lumière

Ce principe a d'étranges conséquences, qu'on peut illustrer simplement en imaginant que Joe et Bob envoient un faisceau lumineux vers le toit de leur boîte en partant du plancher de leur boîte. Commençons par examiner le cas de Bob (celui qui accélère).

Disons, pour simplifier, que le vaisseau de Bob est arrêté quand la lumière part du plancher. La source émet alors une lumière ayant une certaine fréquence. Mais alors, pendant que la lumière monte, le vaisseau de Bob, qui accélère vers le haut, prend de la vitesse, de sorte que quand la lumière arrive au détecteur au plafond, la boîte se déplace vers le haut. Cela signifie que la lumière est captée par un capteur se déplaçant vers le haut et il y a donc de l'effet Doppler. Quand un capteur s'éloigne ainsi de la source, la fréquence captée est plus petite que la fréquence émise. On observe donc une baisse de fréquence de la lumière entre la source et le capteur ou, ce qui est équivalent, une augmentation de la longueur d'onde.



Examinons maintenant la même expérience, mais selon Joe. Lui aussi envoie de la lumière à partir du plancher avec une source et capte la lumière avec un capteur au plafond. Selon le principe d'équivalence, Joe doit obtenir exactement le même résultat que Bob, c'est-à-dire une fréquence plus basse au plafond. Cependant, Joe ne peut invoquer l'effet Doppler pour expliquer cette différence puisque la source et le capteur sont constamment immobiles. Il ne reste qu'une seule solution pour expliquer ce changement de fréquence : la période de l'onde change parce que le temps s'écoule plus lentement au sol qu'au plafond ! Ainsi, une oscillation de l'onde correspond à un temps plus long au plafond, ce qui veut dire que la période augmente. La seule façon d'expliquer un tel changement de période



consiste à avoir un rythme d'écoulement différent entre le bas et le haut de la boîte. La gravitation vient donc modifier le rythme d'écoulement du temps.

La mesure du temps

Imaginons qu'on a installé une horloge sur chacune des sphères qui entoure l'étoile. Il y a une horloge sur la sphère $r = 20$ km (surface de l'étoile à neutrons), une autre sur la sphère $r = 30$ km, une autre sur la sphère $r = 40$ km, et ainsi de suite.

Ce qu'Einstein découvre, c'est que le temps ne s'écoule pas au même rythme sur chaque sphère. Plus on s'approche de l'étoile, plus le temps s'écoule lentement. Supposons que Joe est à $r = 30$ km de l'étoile. Joe mesure alors le temps entre 2 événements avec l'horloge fixée à la sphère $r = 30$ km. On va appeler ce temps $\Delta\tau_{imm}$. Bob, très loin de tout objet massif, mesure aussi le temps entre les événements avec son horloge. On va appeler ce temps Δt . Alors, Bob et Joe n'obtiendront pas le même temps. La relativité donne la formule suivante pour donner le rythme d'écoulement du temps pour un observateur immobile à une distance r de l'étoile.

Mesure du temps

$$\Delta\tau_{imm} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

Dans cette formule, R_s est le rayon de Schwarzschild qui vaut

Rayon de Schwarzschild

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} = 2,953 \text{ km} \cdot \frac{M}{M_\odot}$$

Exemple 12.3.1

Bob, très loin de toutes masses importantes, mesure qu'il s'est écoulé 365 jours sur son horloge. Combien de temps s'est-il écoulé pour Joe s'il est immobile à la surface de la Terre ?

Le rayon de Schwarzschild de la Terre est

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{2GM}{c^2} \\ &= \frac{2 \cdot 6,6743 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,9722 \times 10^{26} \text{ kg}}{\left(299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \\ &= 8,87 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

La formule nous donne donc

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{imm} &= \Delta t \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} \\ &= 31\,536\,000s \sqrt{1 - \frac{0,00887m}{6\,371\,000m}} \\ &= 31\,535\,999,978s\end{aligned}$$

Soit une différence de 0,022 seconde. Il n'y a pas une énorme différence. Il faudra un peu plus de 45 ans pour qu'une horloge dans l'espace ait une avance de 1 seconde par rapport à une horloge à la surface de la Terre.

Un observateur dans l'espace qui examine attentivement les gens à la surface de la Terre aurait l'impression que tout se passe très légèrement au ralenti. Pour les gens sur Terre, tout se passe normalement. Toutefois, en observant la personne dans l'espace, ils auraient l'impression que pour cette personne, tout se passe légèrement en accéléré.

La différence d'écoulement du temps n'est pas énorme près de la surface de la Terre parce que le champ de gravitation de la Terre n'est pas très important. L'effet est plus important si l'objet est très massif et très compact.

Exemple 12.3.2

Bob, très loin d'une étoile, mesure qu'il s'est écoulé 365 jours sur son horloge. Combien de temps s'est-il écoulé pour Joe s'il est à la surface d'une étoile à neutrons de $1,5 M_\odot$ qui est à $r = 10$ km (ce n'est pas exactement ça, mais on va arrondir) ?

Le rayon de Schwarzschild d'une étoile à neutrons de $1,5 M_\odot$ est

$$\begin{aligned}R_s &= \frac{2GM}{c^2} \\ &= \frac{2 \cdot 6,6743 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,5 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg}{\left(299\,792\,458 \frac{m}{s}\right)^2} \\ &= 4430m\end{aligned}$$

(Retenez cette valeur, on l'utilisera souvent dans cette section.)

La formule du temps nous donne donc

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{imm} &= \Delta t \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} \\ &= 365j \cdot \sqrt{1 - \frac{4430m}{10\,000m}} \\ &= 272,4j\end{aligned}$$

Pendant que Bob vieillit de 365 jours, Bob ne vieillit que de 272,4 jours.

Voici maintenant comment on peut voyager dans le futur. Quittez la Terre et approchez-vous d'un objet très massif et très compact (pour pouvoir être assez près du centre de la masse) comme une étoile à neutrons. Disons qu'on va à un endroit où le temps s'écoule 10 fois moins vite que dans l'espace. Alors, il s'écoule 10 ans dans l'espace quand il s'est écoulé 1 an près de l'étoile à neutrons. Vous restez près de l'étoile à neutrons 1 an et revenez ensuite sur Terre. Il s'est alors écoulé 10 ans sur Terre. Vous n'avez vieilli que d'un an alors que tous ceux qui sont restés sur Terre ont vieilli de 10 ans. Évidemment, tout le monde vous admire pour avoir réussi à garder une allure aussi jeune.

Changement de fréquence et de longueur d'onde de la lumière

Comme le temps ne s'écoule pas au même rythme selon la valeur de r , la période de la lumière change en s'éloignant de l'étoile. La lumière est émise à partir d'une source au repos à la position r . Un observateur à cette position mesure que la période de l'onde est T (qui est donc $\Delta\tau_{imm}$ puisque c'est le temps mesuré par un observateur au repos à r). Alors le lien entre la période loin de l'étoile T' et la période de départ T est donné par

$$\Delta\tau_{imm} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

$$T = T' \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

Puisque la fréquence est $f = 1/T$, la relation entre les fréquences est

$$f' = \frac{1}{T'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}}{T} = f \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

On a donc

Changement de fréquence de la lumière

$$f' = f \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

Puisque la vitesse de la lumière est $c = \lambda f$ pour les deux observateurs, on doit avoir

$$\lambda' f' = \lambda f$$

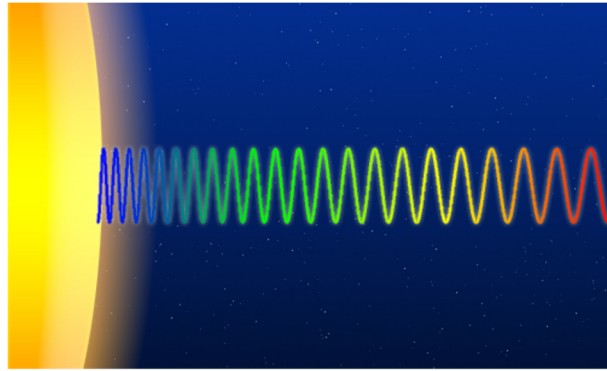
$$\lambda' f \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} = \lambda f$$

En simplifiant, on arrive à

Changement de longueur d'onde de la lumière

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}}$$

On voit donc que la fréquence de la lumière baisse en s'éloignant de l'étoile, ce qui fait augmenter la longueur d'onde. Cet effet n'est pas propre à un objet très massif. Cette baisse de fréquence se fait pour toute onde électromagnétique qui quitte un objet massif. Même les ondes qui quittent la Terre subissent cette baisse de fréquence. Évidemment, la variation de fréquence n'est pas très grande dans ce cas, mais on parvient à la mesurer. La lumière quittant le Soleil subit aussi cette baisse de fréquence avant d'arriver sur Terre. On reçoit donc une lumière avec une longueur d'onde un peu plus grande que la longueur d'onde de la lumière émise. Cela décale un peu les raies spectrales provenant du Soleil.



simple.wikipedia.org/wiki/Gravity

La lumière s'éloignant d'une étoile à neutron subit aussi cet effet, mais l'effet est nettement plus grand.

Exemple 12.3.3

Joe, qui est immobile à la surface d'une étoile à neutrons de $1,5 M_{\odot}$ (qui est à $r = 10 \text{ km}$), envoie de la lumière verte ($\lambda = 550 \text{ nm}$) vers Bob, qui est aussi immobile, mais loin de l'étoile. Quelle est la longueur d'onde de la lumière reçue par Bob ?

La formule de changement de longueur d'onde nous donne donc

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}} \\ &= \frac{550 \text{ nm}}{\sqrt{1 - \frac{4430 \text{ m}}{10\,000 \text{ m}}}} \\ &= 736,9 \text{ nm} \end{aligned}$$

C'est maintenant de la lumière dans l'infrarouge.

La mesure des distances

Supposons maintenant que Joe est sur la sphère $r = 20$ km et qu'il veut installer une corde pour lui permettre de descendre à la surface de l'étoile à neutrons de $1,5 M_{\odot}$ qui est à $r = 10$ km. Joe s'achète donc une corde de 10 km de long, attache un bout à la sphère $r = 20$ km, laisse tomber l'autre bout vers l'étoile et commence à descendre. Quand il arrive au bout de la corde, il a toute une surprise : il est encore loin de la surface de l'étoile à neutrons. Le bout de la corde n'est pas à $r = 10$ km, mais à $r = 11,573$ km ! La corde n'est pas assez longue !

C'est que les distances mesurées en s'éloignant de l'étoile ou en s'approchant de l'étoile (qui portent le nom de *distances radiales*) ne sont pas simplement données par Δr . Selon la relativité, la distance est toujours plus grande que Δr . Si on note la véritable distance mesurée par un observateur à la position r par le symbole σ , on a le lien suivant entre la variation de r et la variation de distance σ .

Mesure des distances radiales

$$d\sigma = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}}$$

Pour trouver la distance radiale totale entre les sphères r_1 et r_2 , il faut additionner toutes les petites distances $d\sigma$ à l'aide d'une intégrale.

$$\sigma = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}}$$

Sans entrer dans les détails, cette intégrale est

Mesure des distances radiales

$$\sigma = R_s \left[\sqrt{x(x-1)} + \ln \left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1} \right) \right]_{x_1}^{x_2} \quad \text{où} \quad x = \frac{r}{R_s}$$

Exemple 12.3.4

Joe veut passer de la sphère à $r = 20$ km à la surface de l'étoile à neutrons de $1,5 M_{\odot}$ qui est à $r = 10$ km. Quelle est la distance qu'il va parcourir ?

On sait que le rayon de Schwarzschild de cette étoile est de 4430 m. Les valeurs initiales et finales de x sont donc

$$x_1 = \frac{20 \text{ km}}{4,430 \text{ km}} = 4,5147$$

$$x_2 = \frac{10\text{km}}{4,430\text{km}} = 2,2573$$

La distance est donc

$$\sigma = 4430\text{m} \cdot \left[\sqrt{x(x-1)} + \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \right]_{4,5147}^{2,2573}$$

La borne supérieure est

$$\sqrt{2,2573 \cdot 1,2573} + \ln(\sqrt{2,2573} + \sqrt{1,2573}) = 2,6493$$

La borne inférieure est

$$\sqrt{4,5147 \cdot 3,5147} + \ln(\sqrt{4,5147} + \sqrt{3,5147}) = 5,3696$$

La distance est donc

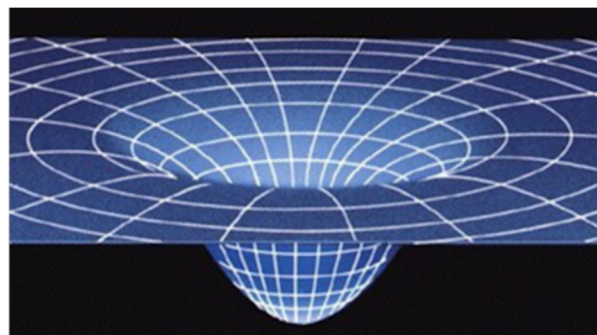
$$\begin{aligned} \sigma &= 4430\text{m} \cdot (2,6493 - 5,3696) \\ &= -12\,051\text{m} \end{aligned}$$

La distance entre les sphères $r = 20\text{ km}$ et $r = 10\text{ km}$ est donc de $12,051\text{ km}$. (L'intégrale est négative, car r diminue en allant vers le centre.)

La courbure de l'espace

Les distances entre les sphères sont donc plus grandes que Δr . On représente souvent l'allongement de distance mesurée près d'une masse par un diagramme montrant une surface courbée par la présence d'une masse. Pour un objet massif sphérique, on obtient alors une figure comme celle de droite.

En allant d'un cercle à l'autre, la distance est plus grande que la différence des rayons parce qu'on va d'un cercle à l'autre en suivant une trajectoire qui descend, ce qui allonge la distance. En choisissant bien la forme, l'augmentation de la distance correspond à ce qu'on a autour de l'étoile. (La forme, à l'extérieur de l'étoile, est identique au graphique de $\sqrt{r}$)



www.ualberta.ca/~pogosyan/teaching/ASTRO_122/lect20/lecture20.html

Cette figure illustre seulement l'allongement des longueurs quand on mesure une distance autour de l'astre. La distance est plus grande que Δr est plus long, car on la mesure en suivant la courbure de la surface.

Cela ne représente pas du tout ce qu'on verrait si on observait l'astre. On ne verrait pas une espèce de creux avec l'astre au fond du trou. Si un objet tombe vers l'astre, il va tomber directement vers l'astre en ligne droite et il ne suivra pas une trajectoire qui le fait descendre dans un trou. Cette figure est uniquement une représentation mathématique montrant que la distance faite par l'objet tombant en ligne droite sur l'astre sera plus grande que Δr .

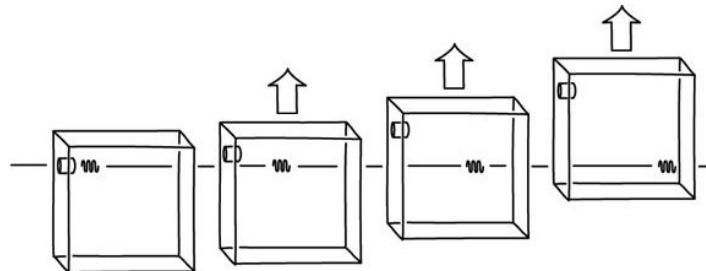
On représente donc cette augmentation de distance par une surface courbée. C'est pour cela qu'on dit que l'objet massif courbe l'espace autour de lui.

Notez que cette courbure dépend en fait des coordonnées qu'on a choisies (r et t) pour décrire la position et le temps des événements. Ces choix sont arbitraires et correspondent rarement à des mesures directes (Δr et Δt ne sont presque jamais la distance et le temps entre les événements pour les observateurs). On pourrait très bien choisir un autre système de coordonnées et cet autre système ne donnerait pas le même lien entre la distance et la variation de coordonnée choisie, donc pas la même courbure. Il y a même des systèmes de coordonnées qui permettent d'avoir une courbure de l'espace nulle. Évidemment, cela amène la question : l'espace est-il réellement courbé ou non ? En fait, c'est l'espace-temps qui est courbé. Selon les coordonnées utilisées, la courbure peut être parfois plus dans l'espace ou parfois plus dans le temps.

La trajectoire de la lumière près d'un astre

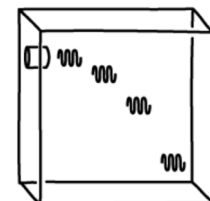
Einstein est arrivé à la conclusion que la lumière est déviée par la présence de masse importante en utilisant le principe d'équivalence. Supposons qu'une source lumineuse envoie de la lumière d'un côté à l'autre d'une boîte qui accélère en partant d'une vitesse initiale nulle. Bob est dans cette boîte, même si on ne l'a pas dessiné.

Le faisceau va en ligne droite pendant que la boîte accélère.



www.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS_0410/chapters/general_relativity_pathway/index.html

Pour Bob, la lumière est partie du haut du mur de gauche de la boîte et est venue frapper le bas du mur de droite de la boîte. Elle a donc suivi la trajectoire montrée sur la figure de droite.

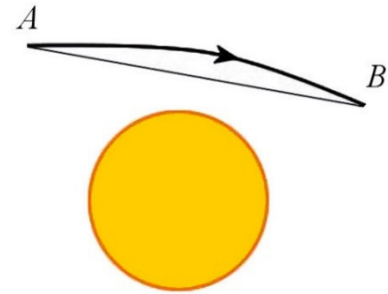


On remarque la déviation de la lumière vers le bas. Selon le principe d'équivalence, Joe, qui n'accélère pas et qui est dans un champ gravitationnel devrait observer la même chose, ce qui montre que le champ gravitationnel dévie la lumière.

Ainsi, en passant près d'une étoile, la lumière va suivre une trajectoire courbe, comme si l'astre attirait la lumière.

Notez que si Joe va mesurer la longueur des deux chemins entre A et B avec sa règle (la trajectoire courbe et la trajectoire en ligne droite), il va trouver que le chemin courbe est plus court que le chemin en ligne droite !

Selon la relativité générale, l'angle de déviation d'un rayon lumineux qui passe près d'un astre est



www.school-for-champions.com/science/gravitation_theories.htm#Uzmzpqh5PAk

Angle de déviation (en radian) de la lumière quand elle passe près d'un astre (si l'angle n'est pas trop grand)

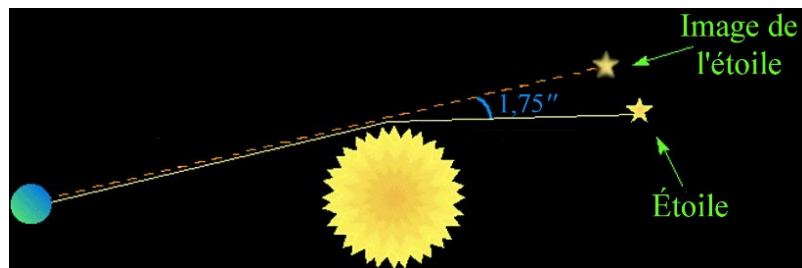
$$\theta_{\text{dév}} = \frac{2R_s}{r_p}$$

où r_p est la plus petite distance qu'il y aura entre le centre de l'astre et le rayon lumineux.

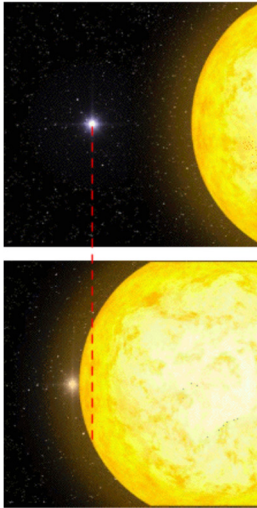
Pour un rayon qui vient juste frôler la surface du Soleil, la valeur de b est égale au rayon du Soleil (en fait, un petit peu plus grand que le rayon du Soleil). L'angle de déviation est alors

$$\begin{aligned}\theta_{\text{dév}} &= \frac{2R_s}{r_p} \\ &= \frac{2 \cdot 2953m}{6,957 \times 10^8 m} \\ &= 8,49 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ &= 1,75''\end{aligned}$$

La déviation n'est donc pas énorme, même pour un rayon passant tout près du Soleil. Cette déviation nous donnerait l'impression que les étoiles qu'on voit près du Soleil vues de la Terre ne seraient pas tout à fait à la bonne place. La lumière a été déviée en passant près du Soleil, ce qui donnera l'impression que la lumière arrive d'une autre direction, en pointiller sur la figure de droite. On verra donc l'image de l'étoile dans une direction un peu différente de celle vers laquelle on verrait l'étoile s'il n'y avait pas de déviation. Dans le cas représenté sur la figure de droite, l'étoile est visible de la Terre alors qu'en réalité elle aurait dû être cachée par le Soleil.



www.astro.cornell.edu/academics/courses/astro201/g_lens_sun.htm



Cela fait que si on observe le Soleil qui vient passer devant une étoile, on notera un changement de position apparente de l'étoile. L'étoile semblera s'éloigner un peu du Soleil quand ce dernier s'approche pour passer devant l'étoile et ce déplacement sera, au maximum, d'à peine 1,75".

Sur la deuxième figure, on peut voir l'étoile même si, en réalité, elle est derrière le Soleil. La déviation de la lumière permet à celle-ci de contourner le Soleil et d'arriver jusqu'à nous.

Reste que cette déviation est assez difficile à observer. Le Soleil est si brillant vu de la Terre que l'observation d'étoiles tout près de sa surface est difficile, à moins de cacher le Soleil. Heureusement, cela se produit quand il y a une éclipse totale de Soleil.

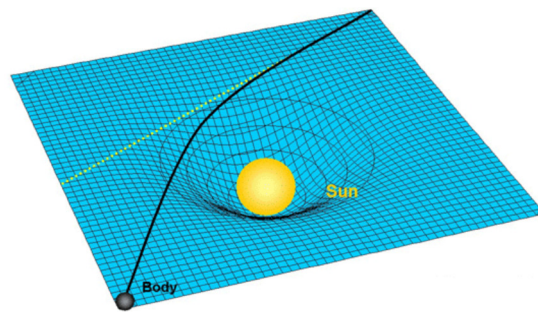
www.cnes.fr/web/CNES-en/5766-time-up-for-general-relativity.php

C'est de cette façon qu'Arthur Eddington a décidé de vérifier la prédiction d'Einstein en 1919. Il a installé un observatoire au sommet d'une montagne aux îles Canaries où on prévoyait une éclipse totale cette année-là. Eddington a photographié l'éclipse pour ensuite tenter de déterminer si la position des étoiles dans cette région du ciel semblait être modifiée par la présence du Soleil. Les résultats d'Eddington ont confirmé les prévisions d'Einstein. C'est la publication de ces résultats qui a rendu Einstein célèbre dans le monde entier.

La trajectoire des objets près d'un astre

La relativité permet également de trouver le mouvement des objets immobiles ou en mouvement près d'une masse importante. L'idée est un peu la même qu'avec la lumière. Il n'y a pas de force en relativité générale, c'est plutôt la déformation de l'espace-temps qui détermine le mouvement. La trajectoire des objets semble courbée, mais c'est parce que c'est une trajectoire en ligne droite dans un espace courbé.

La trajectoire de cet objet est, à chaque endroit de l'espace, une ligne droite. Mais comme l'espace est courbé, cela donne une trajectoire courbe à l'objet.



physics.stackexchange.com/questions/47783/what-is-the-exact-gravitational-force-between-two-masses-including-relativistic

L'énergie

Le principe de conservation de l'énergie est toujours valide en relativité générale. Toutefois, la formule de l'énergie est modifiée par la relativité. L'énergie est maintenant donnée par la formule suivante.

Énergie en relativité générale

$$E = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2$$

Cette formule inclut l'énergie de masse, l'énergie cinétique et l'énergie gravitationnelle. Avec cette formule, on peut trouver la vitesse de l'objet quand il est à la distance r de l'étoile. Cette vitesse est la vitesse mesurée par un observateur immobile à la distance r .

Exemple 12.3.5

Bob laisse tomber un objet vers une étoile à neutrons de $1,5 M_\odot$. L'objet part donc du repos à une distance très grande de l'étoile. À quelle vitesse l'objet va-t-il frapper la surface de l'étoile (qui est à $r = 10$ km) selon Joe qui est immobile à la surface de l'étoile à neutrons (en supposant qu'il puisse survivre à cet endroit) ?

Énergie initiale

Au départ, l'objet est très loin et à une vitesse nulle. L'énergie est donc

$$\begin{aligned} E &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2 \\ &= \left(1 - \frac{R_s}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - 0)^{-\frac{1}{2}} mc^2 \\ &= mc^2 \end{aligned}$$

Énergie à la surface

Quand l'objet arrive à la surface, l'énergie est

$$E' = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2$$

Conservation de l'énergie

$$\begin{aligned} E &= E' \\ mc^2 &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2 \\ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{v^2}{c^2} &= 1 - \frac{R_s}{r} \\
 \frac{v^2}{c^2} &= \frac{R_s}{r} \\
 v &= c \sqrt{\frac{R_s}{r}} \\
 v &= c \cdot \sqrt{\frac{4430m}{10\,000m}} \\
 v &= 0,6656c
 \end{aligned}$$

Le champ gravitationnel

La gravitation générale modifie également la grandeur du champ gravitationnel. Si un observateur immobile à la distance r mesure l'accélération d'un objet qu'il laisse tomber, il obtient la valeur de g à la position r . Cette accélération est

Champ gravitationnel en relativité générale pour un observateur immobile à r

$$g = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{GM}{r^2}$$

Exemple 12.3.6

Quelle est la grandeur du champ gravitationnel à la surface d'une étoile à neutrons de $1,5 M_\odot$ (qui est à $r = 10$ km) ?

Le champ est

$$\begin{aligned}
 g &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{GM}{r^2} \\
 &= \left(1 - \frac{4430m}{10\,000m}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{6,6743 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,5 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg}{(10\,000m)^2} \\
 &= 2,667 \times 10^{12} \frac{N}{kg}
 \end{aligned}$$

Inutile de dire que personne ne pourrait survivre à un tel champ de gravitation.

En orbite circulaire autour de l'astre

On peut être en orbite autour d'une étoile à neutrons. Pour y arriver, la vitesse de l'objet en orbite doit être

Vitesse d'un objet en orbite en relativité générale

$$v = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_s}{r - R_s}}$$

C'est la vitesse que mesure un observateur immobile à une distance r . Sachant que la distance à parcourir est de $2\pi r$, la période de rotation pour l'observateur à la distance r est

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Ce qui donne

$$T_{imm} = \frac{2\sqrt{2}\pi r}{c} \sqrt{\frac{r - R_s}{R_s}}$$

On sait que le lien entre le temps mesuré par un observateur immobile à la position r et un observateur éloigné est

$$\Delta\tau_{imm} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

On a donc

$$T_{loin} \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} = \frac{2\sqrt{2}\pi r}{c} \sqrt{\frac{r - R_s}{R_s}}$$

$$T_{loin} \sqrt{\frac{r - R_s}{r}} = \frac{2\sqrt{2}\pi r}{c} \sqrt{\frac{r - R_s}{R_s}}$$

Ce qui donne

Période orbitale pour un observateur éloigné

$$T_{loin} = \frac{2\pi r}{c} \sqrt{\frac{2r}{R_s}}$$

À partir du temps de l'observateur immobile, on peut également trouver le temps pour la personne dans le vaisseau. Comme le vaisseau en orbite se déplace, le temps s'écoule plus lentement dans le vaisseau. La période orbitale est donc plus petite dans le vaisseau. Cette période est

Période orbitale pour un observateur dans le vaisseau

$$T_{\text{vaisseau}} = \frac{2\pi r}{c} \sqrt{\frac{2r - 3R_s}{R_s}}$$

Exemple 12.3.7

Une sonde est en orbite à une distance égale à $r = 5 R_s$ autour d'une étoile à neutrons de $1,5 M_\odot$.

- a) Quelle est la vitesse de la sonde pour Joe qui est immobile à $r = 5 R_s$?

La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_s}{r - R_s}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_s}{5R_s - R_s}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= 0,3536c \end{aligned}$$

- b) Quelle est la période de rotation de la sonde autour de l'étoile à neutrons selon Bob (qui est loin du trou noir) ?

La période est

$$\begin{aligned} T_{\text{loin}} &= \frac{2\pi r}{c} \sqrt{\frac{2r}{R_s}} \\ &= \frac{2\pi 5R_s}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}} \sqrt{\frac{2 \cdot 5R_s}{R_s}} \\ &= \frac{2\pi 5R_s}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}} \sqrt{10} \\ &= \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 4430m}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}} \sqrt{10} \\ &= 1,467 \times 10^{-3} s \end{aligned}$$

- c) Quelle est la période de rotation de la sonde autour de l'étoile à neutrons selon une horloge qui est dans la sonde ?

La période est

$$\begin{aligned}
 T_{\text{vaisseau}} &= \frac{2\pi r}{c} \sqrt{\frac{2r-3R_s}{R_s}} \\
 &= \frac{2\pi 5R_s}{c} \sqrt{\frac{2 \cdot 5R_s - 3R_s}{R_s}} \\
 &= \frac{2\pi 5R_s}{c} \cdot \sqrt{7} \\
 &= \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 4430m}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}} \cdot \sqrt{7} \\
 &= 1,227 \times 10^{-3} s
 \end{aligned}$$

Les formules précédentes montrent qu'il y a un problème si $r < 1,5 R_s$. En effet, la vitesse du vaisseau ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière. On doit donc avoir

$$\begin{aligned}
 v &< c \\
 \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_s}{r-R_s}} &< c \\
 \sqrt{\frac{R_s}{r-R_s}} &< \sqrt{2} \\
 \frac{R_s}{r-R_s} &< 2 \\
 R_s &< 2r - 2R_s \\
 3R_s &< 2r \\
 \frac{3}{2} R_s &< r
 \end{aligned}$$

On voit également le même problème pour le temps écoulé dans le vaisseau. On a une racine négative si $r < 1,5 R_s$. Tout cela signifie qu'on ne peut pas être en orbite circulaire si $r < 1,5 R_s$.

On pourrait également montrer que les orbites entre $r = 1,5 R_s$ et $r = 3 R_s$ sont instables. La moindre perturbation va faire en sorte que l'objet ira s'écraser sur l'étoile à neutrons ou sera éjecté du système. Les orbites circulaires stables n'existent donc que si $r > 3 R_s$. Donc, la valeur de r de l'orbite circulaire stable la plus près, appelées r_{ISCO} pour *innermost stable circular orbit*, est

Valeur minimale de r des orbites circulaires stables

$$r_{ISCO} = 3R_s$$

12.4 LES TROUS NOIRS

La masse maximale des étoiles à neutrons

Si la masse d'une étoile à neutrons dépasse une certaine masse critique, la force de la pression de dégénérescence des neutrons ne pourra pas contrebalancer la force de gravitation. C'est ce qu'on appelle la *limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*. Les équations de la matière ayant une densité aussi élevée que celle présente dans une étoile à neutrons étant encore incertaines, cette limite n'est pas précisément connue. En tout cas, elle est sûrement supérieure à $2,2 M_{\odot}$ parce que la masse de l'étoile à neutrons la plus grande connue est de $2,35 \pm 0,17 M_{\odot}$. Selon nos connaissances actuelles, la limite devrait se situer entre $2,2 M_{\odot}$ et $2,4 M_{\odot}$. (Petite subtilité ici : cette masse est la masse gravitationnelle qui est inférieure à la masse de la matière. C'est en fait la masse d'une étoile à neutrons constituée de $2,5$ à $2,7 M_{\odot}$ de matière à laquelle on ajoute la masse de l'énergie gravitationnelle de l'étoile. Comme cette énergie est négative, on ajoute une masse négative qui fait diminuer la masse totale de $0,3 M_{\odot}$.)

Si on ajoute de la masse à une étoile à neutron et qu'on dépasse la limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, aucune force connue ne pourra contrebalancer la gravitation (il y en a peut-être une, mais on ne la connaît pas...). Ainsi, il y aura effondrement gravitationnel jusqu'à ce que la matière occupe un volume nul ! Imaginez : $3 M_{\odot}$ ou plus concentrées en 1 seul point sans dimension. On obtient alors un *trou noir* et le point où s'est concentrée la masse s'appelle la *singularité*. (Le nom de « trou noir » aurait été inventé par le physicien Robert Dicke au début des années 60. Cela viendrait d'une comparaison entre le phénomène et le *trou noir de Calcutta*, une prison notoire d'où personne ne sortait vivant. Le nom a ensuite été utilisé pour la première fois par écrit dans *Life* et *Science magazine* en 1963 et son utilisation s'est généralisée quand John Archibald Wheeler l'a adopté en 1967.)

On a souvent l'image que les trous noirs sucent tout ce qu'il y a autour d'eux, comme une grosse balayeuse géante. Il est vrai que les trous noirs attirent les objets autour d'eux, mais c'est uniquement par la force de gravitation et cet effet est exactement le même que n'importe quel autre astre ayant une masse identique. Si on remplace le Soleil par un trou noir de même masse que le Soleil, le mouvement de la Terre restera exactement le même. La Terre continuerait à faire une orbite autour du trou noir avec une période d'un an.

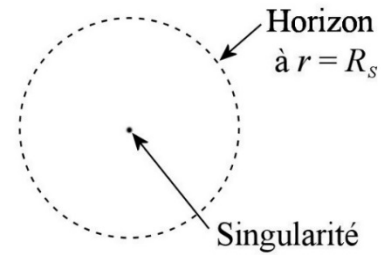
L'horizon

Le trou noir pousse la relativité générale à son extrême limite en concentrant plusieurs masses solaires en un seul point. On note premièrement que les formules obtenues précédemment ne fonctionnent plus si on est trop près la singularité. Par exemple, il y a un sérieux problème avec la formule

$$\Delta\tau_{\text{imm}} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

si on est à une distance inférieure à R_S de la singularité. On arrive alors à la racine d'un nombre négatif, ce qui n'a pas de solution.

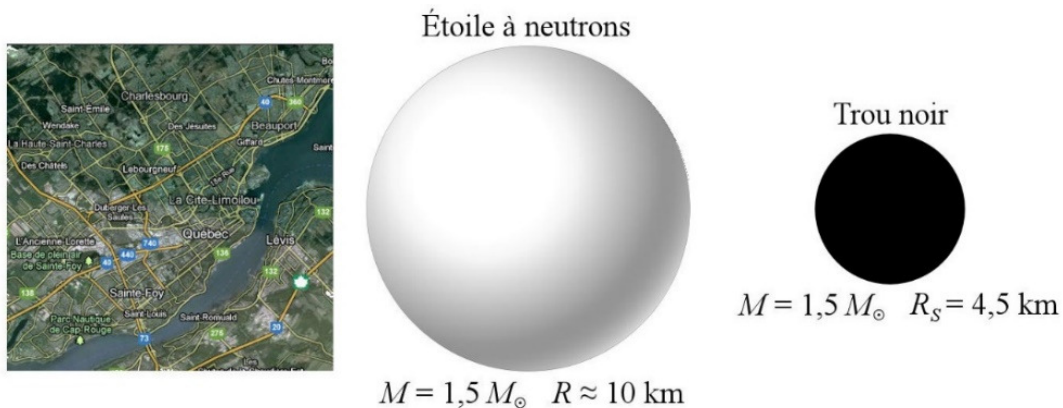
Il en est ainsi parce qu'il y a toute une zone autour de la singularité dont la nature est bien différente de celle du reste de l'espace. Cette zone est à l'intérieur d'une sphère entourant la singularité et dont le rayon r est égal au rayon de Schwarzschild. La frontière entre les deux zones s'appelle l'*horizon des événements* (*event horizon* en anglais) qu'on va appeler simplement *horizon* ici. C'est la zone à l'intérieur de l'horizon qui porte le nom de trou noir.



La relativité prévoit que rien ne peut sortir du trou noir. Tout ce qui se trouve dans cette zone où $r < R_S$ doit nécessairement s'approcher de la singularité. Même un faisceau de lumière dirigé vers l'extérieur ne s'éloigne pas de la singularité si $r < R_S$. Impossible de voir la singularité puisque la lumière ne peut pas la quitter. Puisque la lumière ne peut sortir du trou noir, il est complètement noir, d'où son qualificatif. On pourrait penser qu'il sera alors impossible de détecter les trous noirs puisqu'ils n'émettent pas de lumière. Une question à suivre...

Il ne faut donc pas trop s'approcher d'une singularité. Si vous vous approchez trop d'elle et que vous traversez l'horizon, vous ne pourrez plus jamais en sortir. Encore pire, vous allez inévitablement vous diriger vers la singularité pour vous joindre à elle.

L'image suivante montre que le trou noir n'est pas tellement plus petit qu'une étoile à neutrons de même masse.



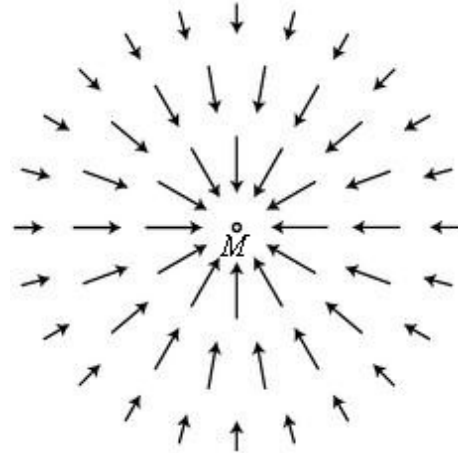
Nous avons dit précédemment qu'on ne connaît pas de force pouvant empêcher l'effondrement gravitationnel d'une étoile à neutrons si la force de pression de dégénérescence des neutrons n'arrive plus à le faire. La comparaison des tailles montre que s'il y a une autre force, il faudra qu'elle apparaisse assez vite, avant que l'étoile à neutrons ait un rayon inférieur au rayon de Schwarzschild, parce qu'une fois que la surface de l'étoile traverse l'horizon, elle doit obligatoirement se diriger vers la singularité. Plus rien ne peut arrêter la contraction de l'étoile une fois que sa taille devient inférieure au rayon de Schwarzschild.

Modèle de la rivière

Pour comprendre un peu pourquoi on ne peut pas sortir de l'horizon, on peut examiner le modèle de la rivière.

Dans ce modèle, on interprète les équations comme étant des équations qui décrivent un espace en mouvement vers l'étoile ou le trou noir. C'est comme si ce mouvement de l'espace créait un courant dirigé vers le centre de l'objet massif. Plus on est près de l'objet massif, plus le courant est rapide.

Prenons une analogie pour illustrer le tout. Vous pouvez voir l'espace comme de l'eau et les objets qui se déplacent dans l'espace comme des poissons dans l'eau. Pendant que le poisson se déplace dans l'eau, l'eau entraîne le poisson dans son mouvement, comme un courant. Le déplacement du poisson sera alors la combinaison du mouvement fait par le déplacement du poisson et du mouvement fait par le courant.



La loi de la relativité qui dit qu'on ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière correspondrait alors à la règle suivante : les poissons ne peuvent pas se déplacer dans l'eau plus rapidement qu'une certaine vitesse limite. Par contre, les lois de la relativité n'empêchent pas l'espace (et donc l'eau dans l'analogie) de se déplacer aussi vite qu'on veut.

Un objet qui part d'une grande distance avec une vitesse nulle et qui tombe vers l'objet massif va simplement suivre ce courant. La vitesse du courant est donc égale à la vitesse qu'aurait cet objet qui tombe.

Si on tente de demeurer en place (donc de rester à la même valeur de r), on va sentir ce courant dirigé vers le centre. C'est ce courant qui nous attire vers l'objet massif. C'est ce courant d'espace-temps vers le centre de la Terre qui nous garde à la surface de la Terre.

La vitesse du courant augmente toujours à mesure qu'on s'approche de l'étoile et la vitesse devient plus grande que la vitesse de la lumière quand on arrive au rayon de Schwarzschild. Comme les objets ne peuvent pas se déplacer plus rapidement que la vitesse de la lumière dans l'espace, les objets ne peuvent pas s'éloigner de la masse centrale. C'est comme un poisson qui tente de nager vers l'extérieur, mais dans un courant qui va plus vite que la vitesse maximale du poisson. Même si le poisson nage à sa vitesse maximale, il est entraîné vers le centre par le courant.

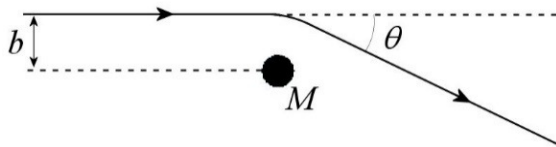
Déviations de la lumière

Le trou noir va également dévier la trajectoire des rayons lumineux. La figure de droite montre à quel point des rayons lumineux peuvent être déviés par un trou noir. On ne parle plus que de quelques fractions de degré.

Il y a même des rayons qui vont disparaître dans le trou noir. Tous les rayons qui ont le paramètre d'impact suivant

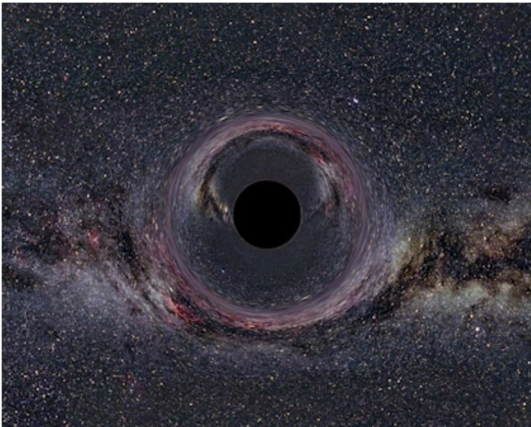
$$b < \frac{\sqrt{27}}{2} R_s$$

finiront leur course dans le trou noir.

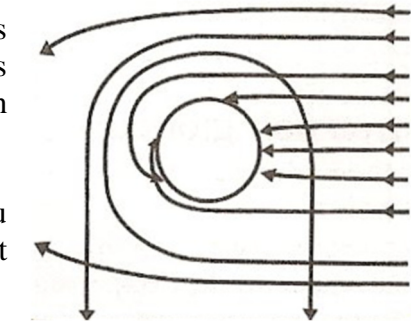


La figure de gauche montre ce qu'est ce paramètre.

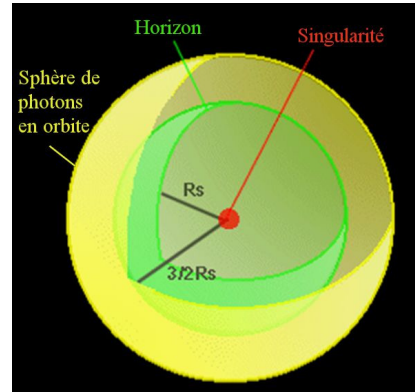
Près du trou noir, la lumière est tellement déviée, qu'on peut même avoir de la lumière en orbite autour de la singularité. La lumière en orbite est toujours à une distance de $r = 1,5 R_s$.



en.wikipedia.org/wiki/General_relativity



Jean-Pierre Luminet, les trous noirs, Éditions du Seuil, 2002



numiano.free.fr/Estars/int_bh.html

Si la présence du Soleil déformait à peine l'image des étoiles derrière lui, le trou noir déformation davantage l'image en arrière-plan. L'image de gauche montre la déformation de l'image d'arrière-plan qu'un trou noir ferait. (Ce n'est pas une vraie photo, c'est une simulation.)

On apprécierait peut-être mieux cet effet si on voyait les déformations faites sur un paysage plus familier. Voici les déformations d'image qu'on aurait si un petit trou noir passait devant nous à la plage. (C'est un trou noir de deux masses terrestres, ayant un rayon de Schwarzschild de 15 mm, à 1 m devant notre visage.) (En fait, ça provient d'un film sur YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=zPv0EBr_TXo)



Le temps dans un trou noir

La formule

$$\Delta\tau_{imm} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

nous dit que le rythme d'écoulement du temps devient très lent près de l'horizon. Exactement à l'horizon, le temps ne s'écoule plus par rapport au temps mesuré par un observateur lointain.

Que se passe-t-il alors à l'intérieur du trou noir ? On est alors un peu embêté parce que la formule n'a plus de solution. Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de temps à l'intérieur de l'horizon. La formule donne des résultats impossibles simplement parce qu'un observateur ne peut pas être immobile si $r < R_s$ (à l'intérieur du trou noir, on doit obligatoirement s'approcher de la singularité). On ne peut donc pas comparer le temps écoulé loin du trou noir et le temps écoulé pour un observateur immobile s'il ne peut pas y avoir d'observateur immobile.

En fait, on peut très bien calculer combien de temps il faudra pour qu'un observateur arrive à la singularité s'il se laisse tomber vers le trou noir (observateur en chute libre). Le calcul est même relativement simple si l'observateur tombe en commençant avec une vitesse nulle à une distance très grande. Dans ce cas, la relativité nous indique que

$$\frac{dr}{d\tau_{cl}} = -c \sqrt{\frac{R_s}{r}}$$

C'est le rythme de changement de r selon le temps mesuré par Joe. (C'est donc le temps pour la personne en chute libre. C'est pour ça qu'on met l'indice cl). Notez que le temps de Joe va au ralenti par rapport à celui de Bob parce que Joe est près du trou noir et aussi parce que Joe se déplace à une vitesse qui devient de plus en plus grande à mesure qu'il s'approche du trou noir.

On peut alors intégrer cette équation pour trouver le temps mesuré par l'observateur (τ) entre deux positions.

$$\begin{aligned} dr &= -c \sqrt{\frac{R_s}{r}} d\tau_{cl} \\ \sqrt{\frac{r}{R_s}} dr &= -c d\tau_{cl} \\ \left. \frac{2r^{3/2}}{3R_s^{1/2}} \right|_{r_A}^{r_B} &= -c\tau_{cl} \end{aligned}$$

Ce qui donne

Temps de chute entre deux positions selon l'observateur qui tombe vers un trou noir (à partir de $r = \infty$ avec $v = 0$)

$$\tau_{cl} = \frac{2R_s}{3c} \left(\left(\frac{r_A}{R_s} \right)^{3/2} - \left(\frac{r_B}{R_s} \right)^{3/2} \right)$$

De là, on peut calculer le temps entre la traversée de l'horizon ($r = R_s$) et l'arrivée à la singularité ($r = 0$) est donc

$$\begin{aligned} \tau_{cl} &= \frac{2R_s}{3c} \left(\left(\frac{R_s}{R_s} \right)^{3/2} - (0)^{3/2} \right) \\ &= \frac{2R_s}{3c} \\ &= \frac{2}{3c} \frac{2GM}{c^2} \\ &= \frac{4GM}{3c^3} \\ &= \frac{4GM_\odot}{3c^3} \frac{M}{M_\odot} \\ &= 6,568 \times 10^{-6} s \frac{M}{M_\odot} \end{aligned}$$

Le temps est donc d'à peine 6,568 μs pour un observateur qui tombe vers un trou noir d'une masse solaire. Le temps n'est pas très long puisque l'observateur a déjà une vitesse presque égale à la vitesse de la lumière juste au-dessus de l'horizon (selon un observateur immobile à cet endroit).

On peut vivre un peu plus longtemps à l'intérieur de l'horizon en se laissant tomber avec une vitesse nulle à partir de l'horizon, mais le temps n'est pas tellement plus long. Dans ce cas, la durée de vie à l'intérieur de l'horizon est

$$\tau = \frac{\pi GM_\odot}{c^3} \frac{M}{M_\odot}$$

On peut montrer que ce temps est le temps le plus long qu'il peut y avoir pour un observateur qui va de l'horizon à la singularité, peu importe ce qu'il fait. En calculant la valeur des constantes, on arrive à la formule suivante.

Temps de vie maximal à l'intérieur de l'horizon

$$\tau = 1,547 \times 10^{-5} s \frac{M}{M_\odot}$$

On pourrait penser que Joe (la personne à l'intérieur de l'horizon) peut allonger le temps en utilisant des rétrofusées pour ralentir sa chute, mais cela fait plutôt diminuer le temps.

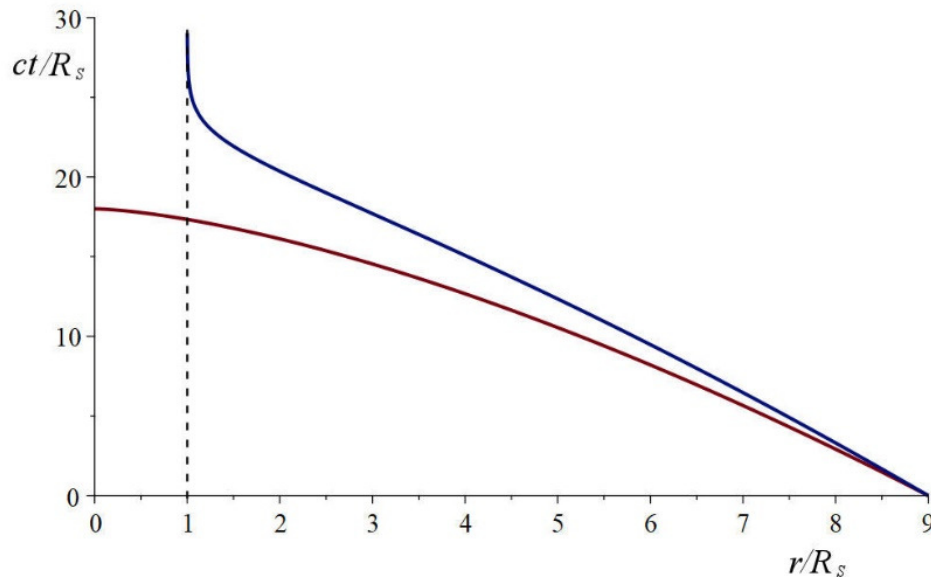
Ça semble contrintuitif parce que si on imagine qu'il a une vitesse presque égale à la vitesse de la lumière vers l'extérieur, il fera presque du sur-place près de l'horizon et le temps de chute pourrait être très long. Toutefois, en faisant ça, Joe se rapproche du comportement de la lumière (en se déplaçant à une vitesse près de la vitesse de la lumière) et cela ralentit l'écoulement du temps puisque le temps ne s'écoule pas pour la lumière (puisque'elle va à la vitesse de la lumière). En fin de compte, le temps donné plus haut est le temps maximal qu'un observateur peut passer à l'intérieur de l'horizon.

Le temps semble très court, mais il pourrait être quand même assez long si la masse du trou noir est importante. Il n'y a pas vraiment de masse maximale pour un trou noir et si, pour une raison quelconque, un trou noir atteignait une masse de $10^{12} M_{\odot}$, Joe pourrait vivre 6 mois à l'intérieur de l'horizon. Évidemment, on ne connaît pas de trou noir aussi massif.

Qu'est-ce que Bob va observer pendant que Joe tombe vers le trou noir ? Si Joe a commencé sa chute avec une vitesse nulle très loin du trou noir, alors le rythme de variation de r en fonction du temps mesuré par Bob est

$$\frac{dr}{dt} = -c \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \sqrt{\frac{R_s}{r}}$$

Sans faire la solution détaillée de cette équation pour trouver r en fonction de t , examinons un graphique de la solution (Joe part de $r = 9 R_s$ avec une vitesse égale à celle qu'il aurait à cet endroit s'il tombait à partir du repos à une grande distance).



La courbe en rouge montre le lien entre la position r et le temps mesuré par Joe (en chute libre). La courbe en bleu montre le lien entre la position r et le temps mesuré par Bob (immobile loin du trou noir). Cette courbe monte soudainement vers le haut à l'horizon, ce qui signifie qu'il faudra un temps infini pour que Joe arrive à l'horizon selon Bob !

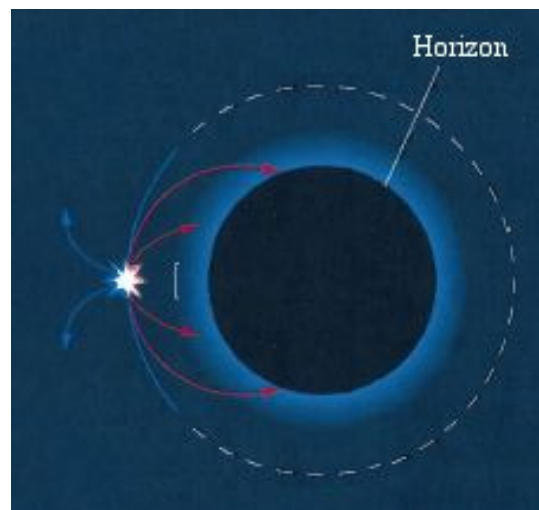
Joe va dans le trou noir

Joe va maintenant aller vers le trou noir par étapes en descendant le long d'une corde. Imaginons encore qu'on a construit des sphères autour du trou noir sur lesquelles on a indiqué en gros la valeur de r de la sphère. Disons que c'est un trou noir de $10 M_{\odot}$. Le rayon de Schwarzschild de ce trou noir est donc à $r = 29,53$ km.

Joe va partir d'une sphère avec un r assez grand et il va aller à des sphères ayant des r des plus en plus petits en descendant le long de la corde. De temps en temps, il s'arrête à une sphère et fait fonctionner une lampe qui émet des flashes de lumière bleue ($\lambda = 450$ nm) à toutes les secondes (selon Joe).

Voici ce que Joe observe.

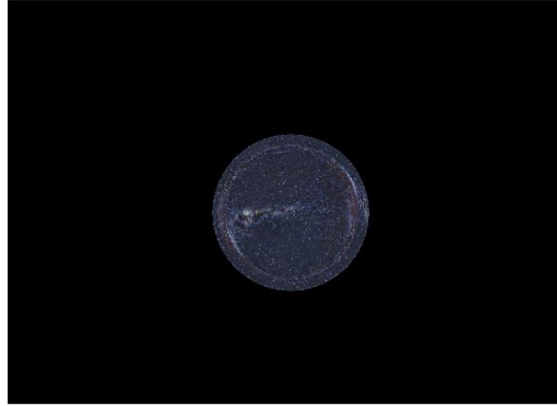
- 1) Joe trouve que la distance à parcourir sur la corde est toujours plus grande que Δr . Plus il est près du trou noir, plus la longueur de corde entre les sphères augmente. Par exemple, pour un trou noir de $10 M_{\odot}$, la longueur de corde entre $r = 50$ km et $r = 40$ km n'est pas de 10 km, mais de 17,23 km.
- 2) Pour Joe, le temps s'écoule normalement. Sa lampe fait toujours des flashes bleus de même puissance toutes les secondes.
- 3) Joe verra peut-être un flash de lumière à $r = 44,295$ km ($1,5 R_S$) s'il y a de la lumière en orbite autour du trou noir.
- 4) Le trou noir lui semble être un gros rond noir vers lequel il se dirige. Cependant, ce rond noir lui semble beaucoup plus gros qu'il est en réalité. Par exemple, le trou noir devrait avoir un diamètre angulaire de 84° quand Joe est à une distance de $1,5 R_S$ de la singularité alors qu'en réalité, il aura un diamètre angulaire de 180° . À cette position les rayons lumineux partant de Joe sont déviés tels qu'illustrés sur la figure. Tous les rayons à l'intérieur de la sphère en pointillé finiront par arriver au trou noir. En optique, la trajectoire de la lumière est la même si on inverse la direction, ce qui signifie que tous les rayons provenant de la zone à l'intérieur de la ligne pointillée proviennent du trou noir. Comme le trou noir est noir, Joe voit du noir pour tous les rayons arrivant de l'intérieur de la zone délimitée par la ligne pointillée. Ainsi, à ce moment, la moitié du champ de vision de Joe (180°) est noir.



physics.uoregon.edu/~jimbrau/astr122/notes/chapter22.html

Encore plus près que $1,5 R_S$, le trou noir a une largeur angulaire supérieure à 180° . Joe a l'impression que le trou noir l'entoure de plus en plus. Plus il s'approche de l'horizon, plus Joe est entouré de noir, de sorte que s'il regarde derrière lui, ce qu'il peut voir du reste de l'univers, incluant ce qui aurait normalement été caché par le trou noir, est concentré dans un cercle de plus en plus petit. L'image montre ce qu'il voit.

jila.colorado.edu/~ajsh/insidebh/schw.html



Tout près de l'horizon, Joe est presque complètement entouré de noir et le reste de l'univers lui apparaît comme un petit point lumineux dans la direction opposée à la singularité.

- 5) Joe sent que la grandeur de champ gravitationnel g est de plus en plus grande. Un humain ne pourrait pas faire grand-chose si g dépasse 100 N/kg (ce qui se produit à $r = 123\,445 R_S$ pour un trou noir de $10 M_\odot$). Imaginons que Joe survive quand même à ces champs très importants. (Joe sent seulement le champ s'il est arrêté ou va à vitesse constante. S'il se laisse tomber, il ne sent plus le champ.)
- 6) Joe sent un rayonnement qui provient du trou noir. Stephen Hawking a découvert qu'un trou noir n'est pas totalement noir. Un faible rayonnement d'origine quantique doit être émis par l'horizon. Ce rayonnement est si faible qu'il est difficilement mesurable loin du trou noir, mais c'est très différent à mesure qu'on s'approche du trou noir. Ce rayonnement correspond au rayonnement émis par un objet dont la température est donnée par

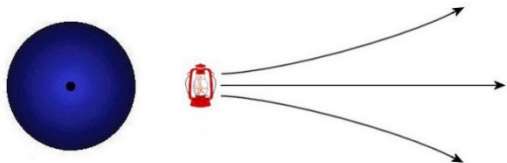
$$T = \frac{hg}{4\pi^2 kc}$$

où k est la constante de Boltzmann ($1,381 \times 10^{-23} \text{ J/kg}$). Très près de l'horizon, g devient énorme (il est infini à l'horizon) et ce rayonnement ferait carrément cuire Joe. Ici, on va imaginer qu'il survive quand même à ce rayonnement. Notez que Joe sent ce rayonnement uniquement s'il n'est pas en chute libre. C'est le cas ici puisque Joe descend le long d'une corde et s'arrête de temps en temps. S'il se laissait tomber, il n'y aurait plus de rayonnement. (Notez que, selon le principe d'équivalence, il doit aussi y avoir un tel rayonnement quand on accélère.)

- 7) Quand Joe traverse l'horizon, Joe est complètement entouré de noir à l'exception d'un petit point dans la direction opposée à la singularité.
- 8) À l'intérieur de l'horizon, il ne peut plus y avoir de corde parce que rien ne peut rester stationnaire à une valeur de r fixe. Tout objet à $r < R_S$ doit obligatoirement se diriger vers la singularité, incluant la corde. On ne pouvait donc pas installer une

- corde immobile à l'intérieur de l'horizon. Comme il n'y a plus de corde, Joe se laisse simplement tomber vers la singularité à partir de l'horizon.
- 9) Comme Joe doit absolument se diriger vers la singularité, il ne peut plus s'arrêter aux sphères (qui ne peuvent plus exister non plus). De toute façon, Bob ne peut plus voir les signaux émis par sa lampe une fois que Joe traverse l'horizon.
 - 10) Joe ne peut jamais voir la singularité, car même la lumière ne peut pas s'éloigner de la singularité.
 - 11) Une fois l'horizon traversé, Joe se dirige inexorablement vers la singularité pour s'y joindre en se faisant écrapoutir. Pour Joe, le temps entre la traversée de l'horizon et l'arrivée à la singularité serait, au mieux, de $155 \mu\text{s}$ avec ce trou noir de $10 M_{\odot}$.

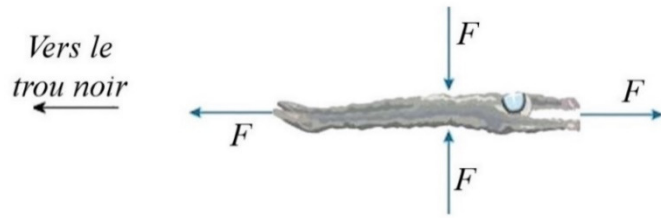
Voici ce que son ami Bob, situé très loin du trou noir, observe.

- 1) Les flashes de la lampe de Joe deviennent de plus en plus espacés à mesure que r diminue parce que le temps s'écoule de plus en plus lentement pour Joe. La durée de chaque flash augmente aussi. Par exemple, quand Joe est à $r = 2 R_s$, le temps entre les flashes est maintenant de 1,41 seconde et les flashes durent 1,41 fois plus longtemps.
 - 2) L'intensité des flashes lumineux de la lampe de Joe diminue à mesure que r diminue. Comme chaque flash dure plus longtemps, l'énergie émise lors de chaque flash est répartie sur un temps de plus en plus long, ce qui a pour effet de diminuer la puissance de la lampe selon Bob. De plus, la déviation de la lumière par le trou noir écarte les faisceaux de lumière les uns des autres davantage qu'avec des rayons en lignes droites, ce qui diminue encore plus l'intensité de la lumière.
- 
- 3) La couleur des flashes change aussi puisque la fréquence de la lumière diminue à mesure que r diminue. Les flashes vont donc passer du bleu, au vert, au jaune à l'orange, au rouge pour finalement passer à l'infrarouge. Ils deviendront alors invisibles pour Bob quand Joe sera à $r < 1,7 R_s$.
 - 4) Pour Bob, Joe semble se déplacer de moins en moins vite sur la corde (la corde est de plus en plus longue entre les sphères et le temps s'écoule de plus en plus lentement). En fait, il verra Joe ralentir de plus en plus jusqu'à sembler geler sur place à l'horizon. En fait, Joe n'atteindra jamais l'horizon selon Bob, car il faut un temps infini selon Bob pour que Joe atteigne l'horizon. Joe s'approche donc de l'horizon de façon asymptotique selon Bob. De toute façon, Bob a beaucoup de difficulté à voir Joe quand il est près de l'horizon, car la lumière qu'il reçoit est très faible et a une très grande longueur d'onde.

Les forces de marée

En fait, Joe ne survivrait pas jusqu'à l'horizon puisqu'il serait soumis, comme n'importe quel objet près d'un astre très massif, à des forces de marées.

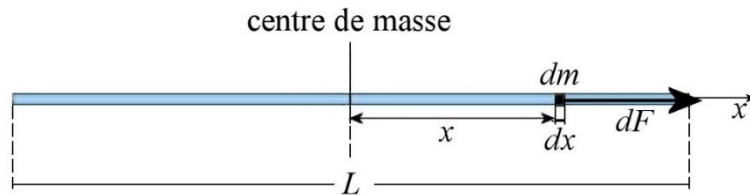
On se rappelle que lorsqu'un objet est près d'une planète ou d'une étoile, il y a des forces de marées qui s'exercent sur l'objet et que ces forces de marées cherchent à étirer l'objet dans la direction radiale et à le compresser dans la direction tangentielle. Comme un trou noir fait un champ gravitationnel autour de lui comme une planète ou une étoile, il y a aussi des forces de marées sur les objets près d'un trou noir. On aurait donc des forces de marées dans les directions montrées sur cette figure près d'un trou noir.



community.emc.com/people/ble/blog/2011/11/06/holographic-principle-to-multiverse-reality

Les forces cherchent à étirer cet humain. Trouvons la force totale que les marées font sur cet humain. Pour y arriver, on va approximer que cet humain est une tige. On va calculer la force sur une petite tranche de la tige.

Selon la formule des forces de marées, la force sur un petit morceau de la tige est



$$dF_{\text{marée}} = \frac{2GM_e (dm) x}{r^3}$$

La masse du petit morceau se trouve avec la masse linéique λ

$$dm = \lambda dx$$

On obtient alors

$$dF_{\text{marée}} = \frac{2GM_e \lambda x dx}{r^3}$$

Si on somme toutes les forces à droite du centre de masse, on a

$$\begin{aligned} F_{\text{marée}} &= \int_0^{L/2} \frac{2GM_e \lambda x dx}{r^3} \\ &= \frac{2GM_e \lambda}{r^3} \int_0^{L/2} x dx \\ &= \frac{2GM_e \lambda}{r^3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{L/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2GM_e \lambda}{r^3} \frac{L^2}{8} \\
 &= \frac{GM_e \lambda L^2}{4r^3}
 \end{aligned}$$

Puisque $\lambda = m/L$, on a

$$F_{\text{marée}} = \frac{GM_e mL}{4r^3}$$

Ouch!

On pourrait dire que la situation devient inconfortable si la force qui tire de chaque côté de votre corps est égale à votre poids sur Terre. (C'est un peu arbitraire comme critère, mais on veut juste une approximation.) L'astronaute commence donc à se sentir mal quand

$$\frac{GM_e mL}{4r^3} > mg$$

En prenant une longueur de 1,80 m pour un humain typique, on arrive à

$$\begin{aligned}
 \frac{6,6743 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot M_e \cdot 1,8\text{m}}{4r^3} &> 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \\
 3,06 \times 10^{-12} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot M_e &> r^3
 \end{aligned}$$

La distance à laquelle l'astronaute se sent mal est la distance minimale pour ne pas souffrir. Cette distance est

$$r_{\text{ouch}} = \sqrt[3]{3,06 \times 10^{-12} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot M_e}$$

Si on veut travailler avec des masses solaires, on a

$$\begin{aligned}
 r_{\text{ouch}} &= \sqrt[3]{3,06 \times 10^{-12} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot M_{\odot} \cdot \left(\frac{M_e}{M_{\odot}} \right)} \\
 &= \sqrt[3]{3,06 \times 10^{-12} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot 2 \times 10^{30} \text{kg} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{M_e}{M_{\odot}} \right)}}
 \end{aligned}$$

Ce qui mène à

$$r_{\text{ouch}} = 1830 \text{km} \cdot \sqrt[3]{\frac{M_e}{M_{\odot}}}$$

Comme le critère de souffrance était un peu arbitraire, on va arrondir pour arriver à

Distance à laquelle les forces de marées d'un trou noir rendent la situation inconfortable

$$r_{ouch} \approx 2000km \cdot \sqrt[3]{\frac{M_e}{M_\odot}}$$

Notez que si on se laissait tomber d'une distance infinie, on arriverait à cette distance seulement 0,15 s avant d'arriver à la singularité. Si on se laissait tomber avec une vitesse nulle à partir de cette distance, on arriverait à la singularité en seulement 0,24 s. On ne souffrirait donc pas très longtemps. (Ces temps ne dépendent pas de la masse du trou noir.)

Tu déchires !

Selon des études, le corps humain déchire si la force dépasse environ 140 000 N. (Je me demande bien comment on a fait ces études...).

L'astronaute déchire donc si

$$\frac{GM_e mL}{4r^3} > 140\,000N$$

Si on fait la solution, on trouve que l'humain déchire approximativement à une distance 6 fois plus petite que r_{ouch} .

Exemple 12.4.1

Joe s'approche d'un trou noir de $2 M_\odot$.

- a) Jusqu'à quelle distance Joe peut-il s'approcher sans trop souffrir ?

La distance est

$$\begin{aligned} r_{ouch} &\approx 2000km \cdot \sqrt[3]{\frac{M_e}{M_\odot}} \\ &\approx 2000km \cdot \sqrt[3]{\frac{2M_\odot}{M_\odot}} \\ &\approx 2000km \cdot \sqrt[3]{2} \\ &\approx 2500km \end{aligned}$$

- b) Jusqu'à quelle distance Joe peut-il s'approcher sans être déchiré par les forces de marée ?

La distance est

$$r_{\text{déchire}} \approx \frac{r_{\text{ouch}}}{6}$$

$$\approx 400 \text{ km}$$

Joe doit donc rester bien loin de l'horizon (qui est à $r = 6 \text{ km}$) s'il ne veut pas souffrir ou mourir déchiré par la force de marée.

Comme les forces cherchent à étirer l'astronaute, on a donné le nom de *spaghettification* à cette mort. (On peut montrer que les forces de marée en relativité conservent le volume de l'objet soumis aux forces de marée. L'objet s'étire dans une direction et se comprime dans les autres directions de telle sorte que son volume reste constant.)

En vous mettant en boule, vous diminuez votre longueur et, ainsi, les forces de marées qui s'exercent sur vous. Ça vous permettrait de vous approcher un peu plus du trou noir, mais pas beaucoup.

12.5 LES TROUS NOIRS EN ROTATION

Ce que nous avons présenté à la section précédente est la version la plus simple d'un trou noir. Il existe d'autres versions qui varient selon les caractéristiques du trou noir, bien qu'il n'y ait pas beaucoup de possibilités. C'est qu'en formant un trou noir, plusieurs des caractéristiques de l'astre qui a formé le trou noir sont effacées. On a montré que seules 3 caractéristiques de la matière restent quand il y a formation d'un trou noir : la masse, la charge électrique et le moment cinétique. On appelle ce théorème le *no hair theorem*.

Le trou noir ayant une charge électrique (*trou noir de Reissner-Nordström* s'il ne tourne pas sur lui-même et *trou noir de Kerr-Newman* s'il tourne sur lui-même) est peut-être intéressant théoriquement, mais on voit mal comment un trou noir chargé pourrait se former naturellement.

Par contre, un trou noir ayant un moment cinétique (*trou noir de Kerr*) est d'une importance capitale. En effet, on a vu que les étoiles à neutrons ont souvent une rotation très rapide sur elle-même et elles ont donc un moment cinétique important. En s'effondrant, ces étoiles forment nécessairement des trous noirs de Kerr.

Notez que pour un trou noir en rotation, la position r est un peu différente. Si on fait un cercle autour du trou noir et qu'on divise par 2π , on n'obtient pas r , mais R (qui s'appelle la *circonférence réduite*). Avec une petite formule, on peut ensuite obtenir la valeur de r à partir de R .

Le moment cinétique

La rotation du trou noir est décrite par le moment cinétique L du trou noir. Ce moment cinétique a une valeur théorique maximale qui est

$$L_{\max} = \frac{GM^2}{c}$$

Dans les équations, on ne retrouve pas le moment cinétique, mais le rapport suivant.

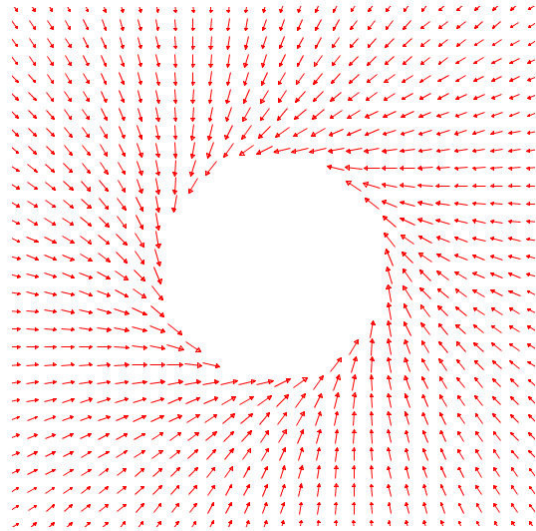
$$a = \frac{L}{L_{\max}}$$

Les trous noirs qui tournent sur eux-mêmes sont donc caractérisés par une valeur de a se situant donc entre 0 et 1.

Le modèle de la rivière

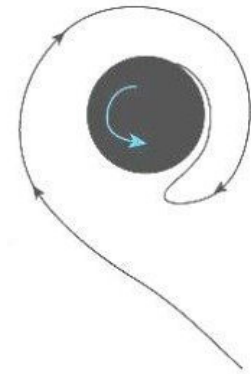
On peut avoir une bonne intuition de ce qui se passe avec un trou noir qui tourne avec le modèle de la rivière. (Le modèle de la rivière ne donne pas une représentation exacte pour un trou noir qui tourne, mais c'est suffisant pour ce qu'on veut faire ici.) On se rappelle que dans ce modèle, l'espace-temps crée comme une sorte de courant qui entraîne les objets autour de lui. Dans le cas du trou noir qui ne tourne pas sur lui-même, le courant est dirigé directement vers la singularité et la vitesse du courant augmente à mesure qu'on s'approche du trou noir. À l'intérieur de l'horizon, la vitesse du courant est plus grande que la vitesse de la lumière.

Avec un trou noir qui tourne, la vitesse du courant augmente à mesure qu'on s'approche de la singularité, mais le courant est aussi entraîné par la rotation du trou noir de sorte que le courant a maintenant une vitesse tangentielle dans la direction de la rotation du trou noir. Si on reprend l'analogie des poissons, c'est comme si l'eau tournait autour du centre entraînant avec elle les poissons qui s'y trouvent.

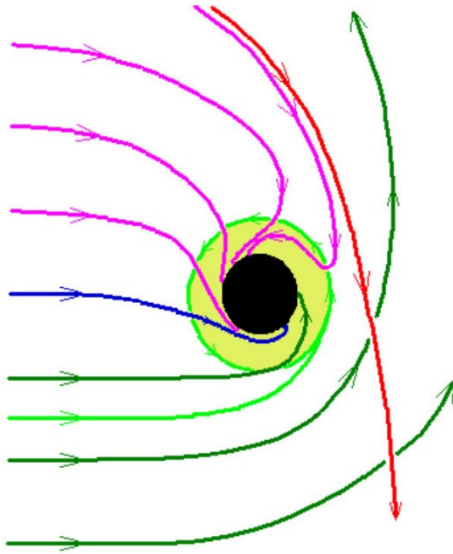


Ainsi, si Joe tombe avec une vitesse initiale très petite à partir d'une très grande distance, il va suivre ce courant et aura alors la trajectoire montrée sur la figure de gauche. Ceci est la trajectoire vue par un observateur lointain (Bob). Selon Bob, Joe n'atteint jamais l'horizon. Par contre, le temps n'est pas infini pour Joe. Par exemple, le temps mesuré par Joe pour passer de $r = 9 R_S$ à la singularité est un peu plus petit que le temps qu'il fallait pour passer de $r = 9 R_S$ à la singularité d'un trou noir qui ne tourne pas sur lui-même.

Sur la figure de droite, un objet s'approche du trou noir en faisant une rotation dans le sens opposé de la rotation du trou noir. Le courant amène même l'objet à changer la direction de sa rotation.



www.zamandayolculuk.com/cetinbal/clasmecrelativity.htm



L'image de gauche montre la trajectoire des rayons lumineux, aussi entraînés par le courant, près d'un trou noir en rotation. Le rayon vert pâle qui arrive dans le sens de la rotation échappe tout juste à la capture. Le rayon rouge qui arrive dans le sens contraire de la rotation échappe tout juste à la capture lui aussi.

www.engr.mun.ca/~ggeorge/astron/blackholes.html

La limite statique et les horizons

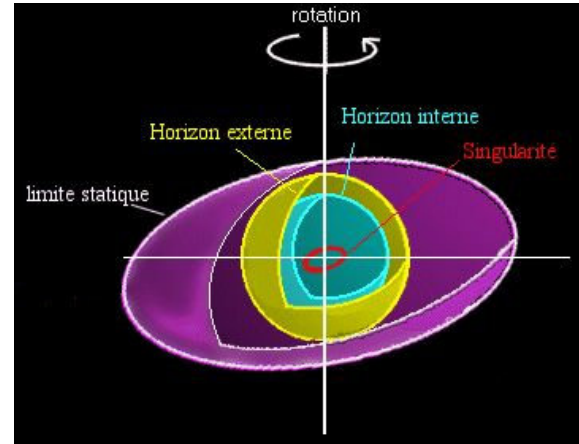
À $r = R_S$ (dans le plan équatorial), la vitesse tangentielle du courant est égale à la vitesse de la lumière. À cet endroit, un objet allant à la vitesse de la lumière dans la direction opposée à la direction du courant pourrait rester sur place. C'est la *limite statique*.

Si $r < R_S$, l'espace tourne plus vite que la lumière autour du trou noir. Cela veut dire que vous devez absolument tourner autour du trou noir dans le même sens que la rotation du trou noir à l'intérieur de la limite statique. Vous devriez aller plus vite que la lumière dans l'espace pour tourner autour du trou noir dans le sens opposé à sa rotation, ce qui est impossible. Ici, c'est comme si l'eau tournait autour du centre plus vite que la vitesse maximale des poissons. Un poisson ne peut donc pas tourner dans le sens opposé parce que le courant l'entraîne à une vitesse plus grande que sa vitesse maximale. Même en nageant à sa vitesse maximale, le poisson ne peut pas annuler la vitesse du courant fait par la rotation de l'eau.

On pourrait penser que la limite statique est aussi l'horizon puisqu'elle se situe à $r = R_S$. Toutefois, la rotation du trou noir fait en sorte que la valeur de r de l'horizon diminue. L'horizon des événements d'un trou noir en rotation se situe entre $r = R_S$ (si $a = 0$) et $r = \frac{1}{2} R_S$ (si $a = 1$) selon le moment cinétique. Plus le trou noir tourne vite sur lui-même, plus la valeur de r est petite. Cet horizon des événements joue exactement le même rôle

que l'horizon du trou noir qui ne tourne pas : une fois que vous avez traversé cet horizon, vous devez nécessairement vous approcher de la singularité et vous ne pouvez plus sortir du trou noir. La composante de la vitesse du courant vers le centre est plus grande que la vitesse de la lumière.

Il y a cependant une différence majeure pour les trous noirs en rotation. Il y a maintenant un autre horizon, appelé l'*horizon de Cauchy*. (On appelle parfois l'horizon des événements l'*horizon externe* et l'horizon de Cauchy l'*horizon interne*.) Quand vous traversez l'horizon interne, vous n'êtes plus obligé de vous approcher de la singularité. Vous pourriez donc vous déplacer librement à l'intérieur de l'horizon interne et y vivre très longtemps (si les forces de marée ne vous ont pas déchiré) et être en orbite autour de la singularité. Toutefois, vous êtes pris à jamais à l'intérieur de l'horizon interne. L'horizon de Cauchy d'un trou noir en rotation se situe entre $r = 0$ (si $a = 0$) et $r = \frac{1}{2} R_S$ (si $a = 1$) selon le moment cinétique.



www.daviddarling.info/encyclopedia/K/Kerr_black_hole.html

Finalement, la singularité n'est plus un point, elle est maintenant un anneau.

On peut trouver les valeurs de r des 2 horizons (horizons des événements HE et horizon de Cauchy HC) avec la formule suivante.

Valeur de r des horizons d'un trou noir en rotation

$$r_{HE} = \frac{1}{2} R_S \left(1 + \sqrt{1 - a^2} \right)$$

$$r_{HC} = \frac{1}{2} R_S \left(1 - \sqrt{1 - a^2} \right)$$

Exemple 12.5.1

Quelles sont les valeurs de r des horizons d'un trou noir ayant $a = 0,5$?

L'horizon des événements (horizon externe) est à

$$\begin{aligned} r_{HE} &= \frac{1}{2} R_S \left(1 + \sqrt{1 - a^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} R_S \left(1 + \sqrt{1 - 0,5^2} \right) \\ &= 0,933 R_S \end{aligned}$$

L'horizon de Cauchy (horizon interne) est à

$$r_{HC} = \frac{1}{2} R_S \left(1 - \sqrt{1 - a^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} R_s \left(1 - \sqrt{1 - 0,5^2} \right) \\
 &= 0,067 R_s
 \end{aligned}$$

Plus le trou noir tourne vite, plus l'horizon externe s'approche de la singularité et plus l'horizon interne s'en éloigne. À partir d'une certaine vitesse de rotation, ces deux horizons se rejoignent et disparaissent. On obtient alors ce qu'on appelle une *singularité nue*, qui n'a plus d'horizon. On pourrait voir cette singularité et s'en approcher autant qu'on veut sans danger (à l'exception des forces de marée), sans rester prisonnier. Cependant, pour que cela puisse se produire, il faut que $a > 1$ et cela est théoriquement impossible.

En orbite circulaire autour du trou noir en rotation

On peut être en orbite circulaire autour du trou noir en rotation à condition de ne pas être trop près. Tout comme pour les trous noirs sans rotation, il y a une valeur minimale de r pour que l'orbite soit stable. Pour le trou noir qui ne tourne pas sur lui-même, cette limite était à $r = 3 R_s$. Pour le trou noir qui tourne sur lui-même, cette limite dépend de votre sens de rotation autour du trou noir. La valeur de r de l'orbite stable la plus près diminue si on tourne sur l'orbite dans le même sens que la rotation du trou noir sur lui-même et elle augmente si on tourne sur l'orbite dans le sens contraire de la rotation du trou noir sur lui-même.

Par exemple, pour un trou noir qui a $a = 0,5$, la valeur minimale de r est de $2,212 R_s$ si l'objet en orbite va dans le même sens que la rotation du trou noir sur lui-même et de $3,723 R_s$ si l'objet en orbite va dans le sens contraire de la rotation du trou noir sur lui-même. Pour un trou noir qui a $a = 0,98$, la valeur minimale de r est de $0,823 R_s$ si l'objet en orbite va dans le même sens que la rotation du trou noir sur lui-même et de $4,471 R_s$ si l'objet en orbite va dans le sens contraire de la rotation du trou noir sur lui-même.

12.6 LA FORMATION DES TROUS NOIRS STELLAIRES

La mort des étoiles de plus de $25 M_\odot$

On a vu que la mort des étoiles de plus de $8 M_\odot$ mène à la formation d'une étoile à neutrons. Cependant, la situation est différente pour les étoiles de plus de $25 M_\odot$. Le produit final risque d'être un trou noir. (Notez qu'il y a encore beaucoup d'incertitude concernant les étapes finales de la vie de ces étoiles.)

Les simulations montrent que l'énergie cinétique de l'explosion diminue à mesure que la masse de l'étoile augmente. Cela voudrait dire que l'énergie de l'explosion est moins importante pour les étoiles massives. Ainsi, quand le cœur d'une étoile ayant une masse supérieure à $20 M_\odot$ s'effondre, l'explosion n'est pas assez puissante et une partie de la matière de l'étoile retombe vers le centre, ce qui fait augmenter la masse de l'étoile à neutrons. Au-delà d'environ $25 M_\odot$, la masse qui retombe fait en sorte que la masse du

cœur dépasse la masse limite d'une étoile à neutrons et l'étoile à neutrons devient un trou noir. Les étoiles de $30 M_{\odot}$ sont celles qui forment les plus gros trous noirs (près de $9 M_{\odot}$). Ces étoiles de $30 M_{\odot}$ sont celles qui ont, juste avant l'effondrement du cœur, la masse la plus importante. Elles ont perdu $18 M_{\odot}$ pendant leur vie et il ne reste que $12 M_{\odot}$ lors de l'effondrement. Sur ces $12 M_{\odot}$, $9 M_{\odot}$ finissent dans le trou noir.

Au-delà de $30 M_{\odot}$, la masse du cadavre diminue. Ces étoiles perdent tellement de masse dans les derniers stades de leur vie qu'elles ont des masses relativement faibles quand elles arrivent à l'effondrement du cœur. Le problème, c'est qu'on ne sait pas vraiment l'importance de la perte de masse. Ainsi, une étoile de $50 M_{\odot}$ pourrait avoir une masse qui se situe entre 4 et $8 M_{\odot}$ lors de l'effondrement. Si la masse est de $4 M_{\odot}$, la supernova est plutôt forte et il reste une étoile à neutrons de $1,5 M_{\odot}$. Si la masse est de $8 M_{\odot}$, la supernova serait plutôt faible et presque toute l'étoile finirait en trou noir. Une étoile de $100 M_{\odot}$ en début de vie pourrait avoir une masse qui se situe entre 6 et $10 M_{\odot}$ quand le cœur de l'étoile s'effondre. Selon la masse restante, on obtient alors un trou noir dont la masse se situe entre 5 et $6 M_{\odot}$.

Il y a de la matière qui retombe vers le trou noir pour presque toutes les étoiles qui ont une masse supérieure à $20 M_{\odot}$. Si la matière qui tombe vers le centre suit une trajectoire en ligne droite vers le trou noir, il n'y a pas de rayonnement émis. Alors, on n'a rien de plus que la supernova (qui était peut-être assez faible).

Cependant, la situation est bien différente si la rotation de l'étoile sur elle-même est assez grande. Dans ce cas, la matière qui retombe va plutôt former un disque de matière en rotation qu'on appelle un *disque d'accrétion*. L'interaction entre les particules du disque d'accrétion fait lentement perdre de l'énergie à la matière en rotation de sorte que l'orbite de la matière en orbite se rapproche lentement du trou noir pour finalement tomber dans ce dernier. L'énergie perdue est transférée en chaleur dans le disque et la matière formant le disque d'accrétion devient donc de plus en plus chaude à mesure qu'elle s'approche du centre. Si la température augmente suffisamment, le disque devient lumineux. Même en étant très lumineux, on a peu de chance de voir ce disque parce qu'il ne dure que quelques minutes et parce qu'il est probablement caché par la matière éjectée par la supernova.



en.wikipedia.org/wiki/Accretion_disk

Le disque est souvent accompagné de jets perpendiculaires au disque. Ces jets sont formés de rayons gamma et de matière éjectée à haute vitesse et on ne comprend pas encore très bien tous les mécanismes qui mènent à la formation de ces jets. En tournant autour du trou



noir, le champ magnétique du disque s'enroule et forme un genre de tube le long de l'axe de rotation. C'est le long de ce tube qu'il y a une forte émission de radiation et de particules. Ces jets se forment souvent quand il y a beaucoup de matière qui arrive en même temps dans le trou noir, ce qui est le cas ici.

www.nasa.gov/feature/goddard/2019/hubble-studies-gamma-ray-burst-with-highest-energy-ever-seen

L'énergie émise par ces jets peut atteindre 10^{47} J. C'est 10 fois plus d'énergie que pour les supernovas. Ils font partie des phénomènes les plus énergétiques connus qu'on appelle les *hypervovas*. L'énergie vient de l'énergie de rotation du trou noir, qui est énorme, et de l'énergie perdue par la matière qui tombe dans le trou noir, qui est aussi phénoménale.

Calculons l'énergie perdue par la matière qui tombe dans le trou noir. On va faire le calcul de cette énergie perdue pour de la matière en orbite autour d'un trou noir qui ne tourne pas pour illustrer (c'est plus facile). Dans le disque d'accrétion, le rayon de l'orbite de la matière diminue jusqu'à ce que la matière atteigne l'orbite circulaire stable la plus près du trou noir. Cette orbite est entre $3R_S$ pour un trou noir qui n'a pas de rotation. Quand la matière arrive à l'orbite stable la plus près, il n'y a pas d'orbite stable et la matière tombe rapidement dans le trou noir.

Initialement, on va dire que la matière est loin du trou noir et sa vitesse est très faible. L'énergie initiale est donc

$$\begin{aligned} E &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2 \\ &= \left(1 - \frac{R_s}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{0}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2 \\ &= mc^2 \end{aligned}$$

À l'orbite circulaire stable la plus près (à $r = 3R_S$), la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_s}{r - R_s}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_s}{3R_s - R_s}} \\ &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

L'énergie en orbite est donc

$$\begin{aligned} E' &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2 \\ &= \left(1 - \frac{R_s}{3R_s}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\frac{c^2}{4}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2 \\ &= 0,9428mc^2 \end{aligned}$$

L'énergie perdue est donc égale à $0,0572mc^2$. Pour un morceau de 1 kg, cela représente quand même $5,147 \times 10^{15}$ J. (Cela fournirait de l'énergie à une maison québécoise moyenne pendant environ 50 000 ans. Pas mal pour un seul kilogramme.)

Comme le trou noir est en rotation et que le disque d'accrétion tourne dans le même sens que la rotation du trou noir sur lui-même, l'énergie libérée sera encore plus grande (puisque le bord interne du disque est plus près du trou noir). Le tableau suivant montre l'énergie perdue par la matière en rotation pour différente valeur de a .

a	Énergie perdue
0	$0,057mc^2$
0,5	$0,082mc^2$
0,8	$0,121mc^2$
0,9	$0,155mc^2$
0,95	$0,190mc^2$
0,99	$0,264mc^2$
1	$0,423mc^2$

L'énergie perdue peut donc atteindre $0,423mc^2$! Une masse solaire qui tombe dans un trou noir pourrait donc fournir jusqu'à $7,6 \times 10^{46}$ J.

Il y a donc une énergie considérable dans les jets. Comme les jets ne durent pas tellement longtemps (seulement quelques minutes), l'énergie est émise en peu de temps et la puissance est énorme. Si ce jet pointe vers la Terre, on recevra une bonne quantité de rayons gamma. On détecte alors un *sursaut de rayons gamma*. Puisque la puissance est gigantesque et que l'énergie est concentrée en un mince faisceau, la luminosité des rayons gamma reçus est phénoménale. La luminosité du sursaut est si grande qu'on peut les voir jusqu'à des dizaines de milliards d'années-lumière (si le faisceau pointe vers nous).

Les particules émises par les jets forment une petite partie des rayons cosmiques qui frappent la Terre. Cependant, certaines de ces particules ont beaucoup plus d'énergie que les autres rayons cosmiques (qui sont émis majoritairement par les restes de supernova). Certaines ont des énergies pouvant atteindre 10^{21} eV (une centaine de joules), ce qui est vraiment beaucoup pour un simple proton. (On ne peut pas avoir une énergie plus grande que cela. Au-delà de cette énergie, les collisions entre le proton et les photons présents dans l'univers mènent à la création de pions qui font perdre de l'énergie au proton.) Une bonne partie de tous les rayons cosmiques à très haute énergie qui frappent la Terre viennent d'hypernova.

Il ne faudrait pas qu'il y ait une telle hypernova trop près de la Terre. Si le faisceau de particules est dirigé vers nous, on estime que les dommages à la couche d'ozone seront trop importants si le sursaut de rayons gamma est à moins de 6500 al de la Terre. Cette distance est relativement grande, mais heureusement, les hypernovas ne sont pas très fréquentes. Certains estiment (avec beaucoup d'incertitude) qu'un sursaut à moins de 6500 al dirigé vers la Terre pourrait se produire, en moyenne, une fois par 500 millions d'années.

(Notez que les faisceaux de pulsars pourraient également mettre en danger la vie sur Terre, mais il faudrait que le pulsar soit à moins de 0,3 al de la Terre. Comme cette distance est beaucoup plus petite que la distance moyenne entre les étoiles dans notre voisinage, la probabilité que cela se produise est très faible.)

Des petits trous noirs possibles ?

La pression de dégénérescence des neutrons n'étant plus capable de contrebalancer la force de gravitation pour des masses supérieures à environ 2 à 3 $M_{\odot}$, on devrait s'attendre à ce que la masse minimale des trous noirs soit de 2 à 3 $M_{\odot}$. Il n'est toutefois pas exclu qu'on puisse former des trous noirs de masse inférieure. En théorie, la Terre devient un trou noir si on la comprime jusqu'à ce que son rayon devienne inférieur à son rayon de Schwarzschild, qui est de 8,87 mm ! Toutefois, comme on ne connaît pas de mécanisme pouvant comprimer la Terre ou d'autres astres de moins de 2 à 3 $M_{\odot}$ à ce point, on voit mal comment ils pourraient finir en trou noir.

Il se pourrait que des trous noirs de masses inférieures à 2 à 3 $M_{\odot}$ se soient formés lors de la naissance de l'univers, mais cela reste purement hypothétique pour l'instant.

On entend parfois des gens dire qu'ils craignent qu'un de ces mini trous noirs se forme dans les accélérateurs de particules et engloutissent la Terre. Effectivement, certaines théories prévoient qu'on pourrait peut-être former des trous noirs microscopiques dans des collisions de particules à haute énergie. Ces trous noirs microscopiques grandiraient ensuite en accumulant de la matière jusqu'à absorber la Terre au complet. N'ayez aucune crainte. Les accélérateurs de particules actuels et tous ceux qui viendront dans le futur ne pourront jamais amener la destruction de la Terre. La Terre est constamment bombardée de particules ayant des énergies bien supérieures à celle qu'on peut obtenir avec les accélérateurs et il ne s'est jamais formé de trous noirs lors des collisions entre ces particules et l'atmosphère. De nombreux astres sont constamment bombardés par de telles particules et on n'a jamais observé d'astres engloutis par un trou noir.

12.7 LES SYSTÈMES D'ÉTOILES DOUBLES AVEC DES CADAVRES STELLAIRES

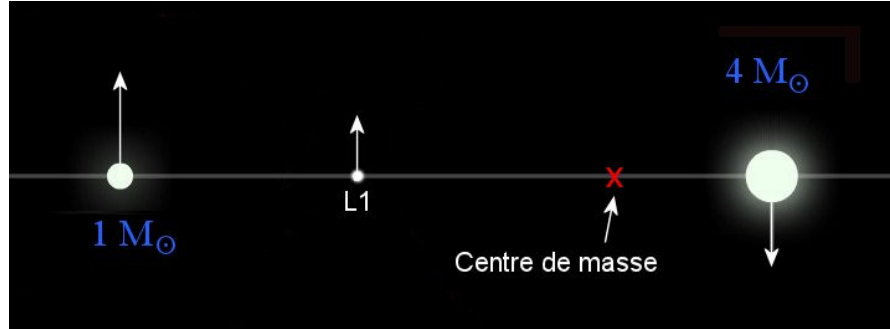
La majorité des étoiles font partie de systèmes d'étoiles multiples. La plupart du temps, chaque étoile du système fait sa vie sans trop influencer la vie de l'autre. Cependant, chaque étoile peut fortement modifier la vie de l'autre étoile si elles sont très rapprochées l'une de l'autre parce que les étoiles peuvent alors s'échanger de la masse.

Les lobes de Roche

Imaginons un système formé d'une étoile de 1 $M_{\odot}$ et d'une autre de 4 $M_{\odot}$. Évidemment, l'étoile de 4 $M_{\odot}$ arrivera à la fin de sa vie sur la séquence principale en premier et

commencera sa phase de géante rouge puis de supergéante rouge. Ce gonflement de l'étoile peut amener la surface de l'étoile mourante à s'approcher un peu trop de l'autre étoile.

On va commencer par montrer qu'entre les deux étoiles, il y a un point d'équilibre, qu'on appelle le point de Lagrange 1 (L1) (il y en a 5 en tout, mais les autres n'ont pas d'importance ici.). Imaginons qu'il y a un objet à cet endroit.



www.kcvs.ca/martin/astro/au/unit4/103/chp10_3.htm

À L1, la somme des deux forces de gravitation est égale à la force centripète.

$$-F_{g1} + F_{g2} = m \frac{4\pi^2 x}{T^2}$$

Dans cette formule, x est la distance entre le centre de masse (axe de rotation) et L1. Avec cette équation, on peut trouver la position de L1. Avec des masses de $1 M_\odot$ et $4 M_\odot$, le point d'équilibre L1 est à 36,19 % de la distance entre les étoiles, plus près de l'étoile moins massive. Si vous voulez voir comment on calcule cette position, vous pouvez consulter ce document.

<https://physique.merici.ca/astro/calculpositionL1.pdf>

Ainsi, si on place un objet à la position L1, alors l'objet peut être en orbite circulaire stable autour du centre de masse puisque la somme des forces est égale à la force centripète.

Si on place un objet à droite de L1 sur la figure, la force de gravitation vers la droite sera plus grande, alors qu'un aurait besoin de moins de force centripète vers la droite. On a alors

$$-F_{g1} + F_{g2} > m \frac{4\pi^2 x}{T^2}$$

Cet excès de force vers la droite, donc vers l'étoile plus massive, amène l'objet à tomber vers l'étoile de droite.

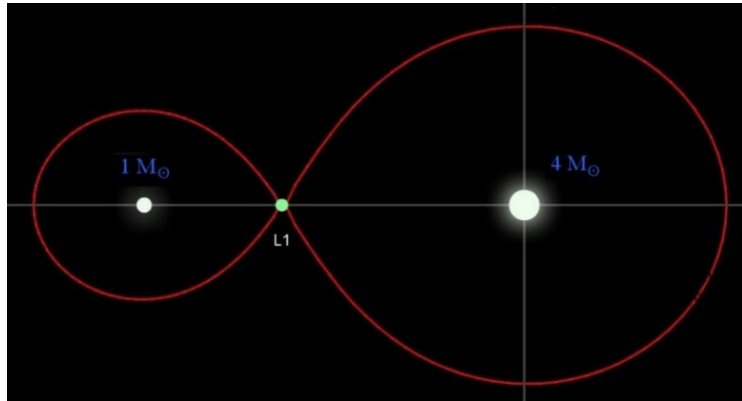
Si on place un objet à gauche de L1 sur la figure, la force de gravitation vers la gauche sera plus grande, alors qu'un aurait besoin de plus de force centripète vers la droite. On a alors

$$-F_{g1} + F_{g2} < m \frac{4\pi^2 x}{T^2}$$

Cet excès de force vers la gauche, donc vers l'étoile moins massive, amène l'objet à tomber vers l'étoile de gauche.

Le point de Lagrange 1 est donc le point séparant les zones où la gravité de chaque étoile domine. Il ne faut pas que la surface d'une des étoiles traverse ce point, sinon le gaz de l'étoile ira tomber sur l'autre étoile.

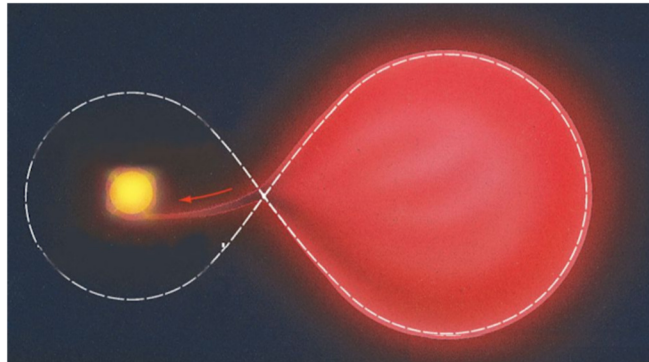
On peut même tracer la forme (figure de droite) qu'auront les étoiles si leur surface atteint L1. Ces formes sont appelées les *lobes de Roche*.



www.kcvs.ca/martin/astro/au/unit4/103/chp10_3.htm

Le transfert de masse

Dans notre exemple, l'étoile de $4 M_{\odot}$ meurt en premier. Si les étoiles sont assez près l'une de l'autre, elle va alors peut-être gonfler jusqu'à ce que la surface atteigne le lobe de Roche. Si l'étoile continue à gonfler, de la matière sera alors transférée à l'autre étoile.



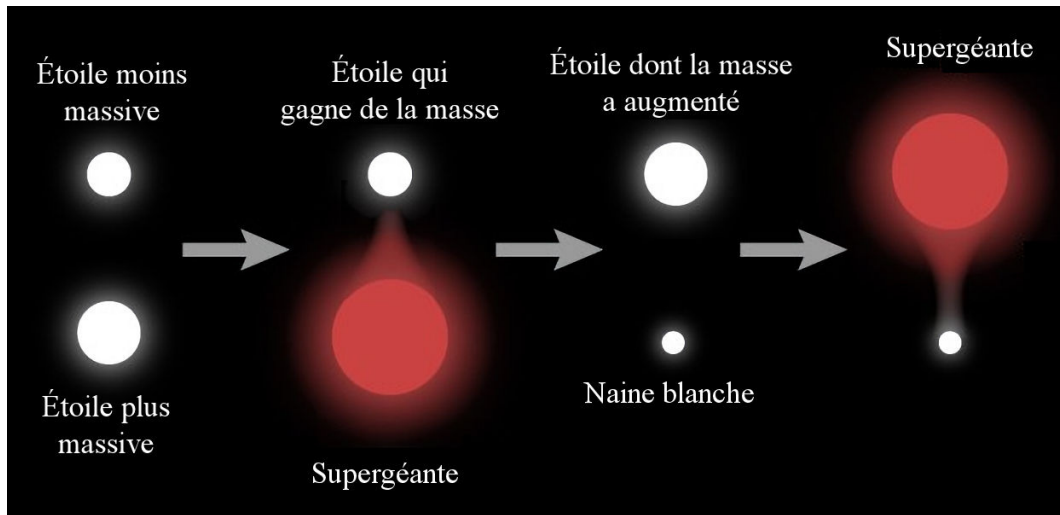
physics.uoregon.edu/~jimbrau/ast122/notes/chapter20.html

Typiquement, les taux de transfert de masse se situent entre $10^{-11} M_{\odot}$ par année et $10^{-7} M_{\odot}$ par année quand cela se produit. Ça semble peu, mais c'est 1000 à 10 millions de fois plus élevées que la perte de masse du Soleil par le vent solaire. Cela fait bien sûr augmenter la masse de l'étoile qui reçoit de la matière, ce qui peut la faire changer de type d'étoile. Par exemple, elle pourrait passer de G2 ($1 M_{\odot}$) à F5 ($1,4 M_{\odot}$).

Les étoiles Algol A et B sont actuellement dans une telle phase. Algol B transfère de la masse à l'étoile Algol A. Mais le transfert de masse entre ces étoiles très près l'une de l'autre (6,2 % de la distance Terre-Soleil) a été si important que l'étoile qui était initialement la moins massive est devenue l'étoile la plus massive du système. Elle a maintenant une masse $3,59 M_{\odot}$ alors que l'autre étoile, qui était plus massive au départ puisqu'elle est devenue supergéante rouge en premier, n'a plus qu'une masse de $0,79 M_{\odot}$. En passant, ces étoiles s'éclipsent à tour de rôle durant leur révolution autour du centre de masse de sorte que la magnitude totale des étoiles baisse pendant 10 heures, en passant de 2,1 à 3,4, tous les 2,86736 jours.

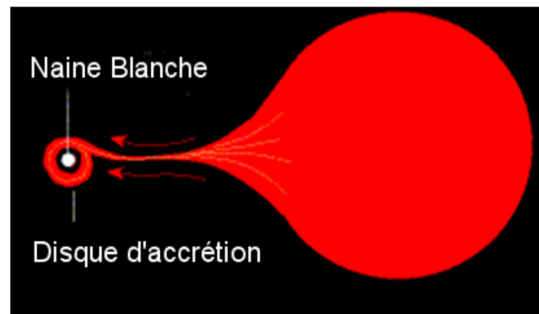
La nova

Il se pourrait que l'étoile la plus massive, qui va mourir en premier, devienne une naine blanche. Puis, la deuxième étoile arrive à la fin de sa vie et se met à gonfler à son tour jusqu'à ce que sa surface atteigne, peut-être, le lobe de Roche. Il y aura alors un transfert de masse vers la naine blanche.



courses.lumenlearning.com/suny-astronomy/chapter/the-evolution-of-binary-star-systems/

La matière tourne autour de la naine blanche avant d'arriver sur sa surface, ce qui forme un disque d'accrétion autour de la naine blanche. On a vu que la matière en rotation dans un tel disque perd de l'énergie et que cette énergie chauffe le disque. Si la température augmente suffisamment, le disque devient lumineux. Le disque d'accrétion peut même devenir plus lumineux que la naine blanche.

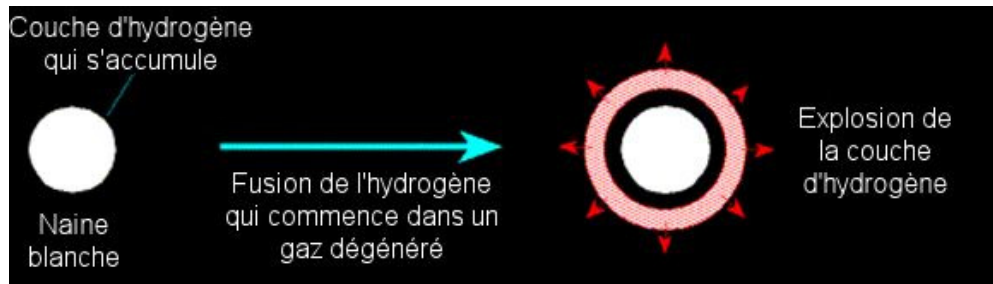


csep10.phys.utk.edu/ast162/lect/supernovae/type1.html

La matière du disque finit par se déposer sur la naine blanche. Comme ce sont les couches supérieures de l'étoile mourante qui sont transférées et que ces couches sont composées d'hydrogène, il se forme une couche d'hydrogène à la surface de la naine blanche.

Comme la gravitation à la surface de la naine blanche est très importante, l'hydrogène qui s'accumule à la surface de la naine blanche est fortement comprimé et a une densité très élevée, au point de devenir un gaz dégénéré. Plus il s'accumule d'hydrogène, plus la température de la couche augmente, jusqu'à ce que la température soit suffisante pour que la fusion de l'hydrogène puisse se faire. Cela se produit quand il s'est accumulé 10^{-5} à $10^{-4} M_{\odot}$ d'hydrogène à la surface de la naine blanche. Plus la naine blanche est massive, moins il faut d'hydrogène pour déclencher la fusion. Comme ce gaz est dégénéré, la chaleur générée par la fusion n'augmente pas la pression même si la température augmente. Et plus la température augmente, plus la fusion est rapide. On aura donc une fusion qui s'emballe, de sorte que l'hydrogène de la couche fusionne très rapidement dans une réaction

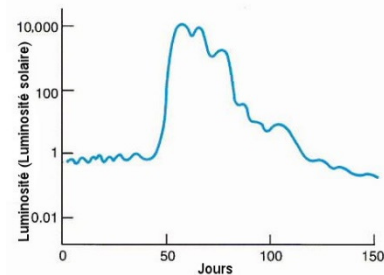
explosive. La réaction explosive libère beaucoup d'énergie (environ 10^{38} J, soit environ la même énergie que celle émise par le Soleil en 1000 ans) en très peu de temps et la luminosité de la naine blanche augmente soudainement pour atteindre 10 000 à 100 000 $L_{\odot}$ et parfois même jusqu'à 1 000 000 $L_{\odot}$. La fusion explosive provoque alors l'expulsion d'environ 10 % de la couche d'hydrogène.



csep10.phys.utk.edu/astr162/lect/novae/novae.html

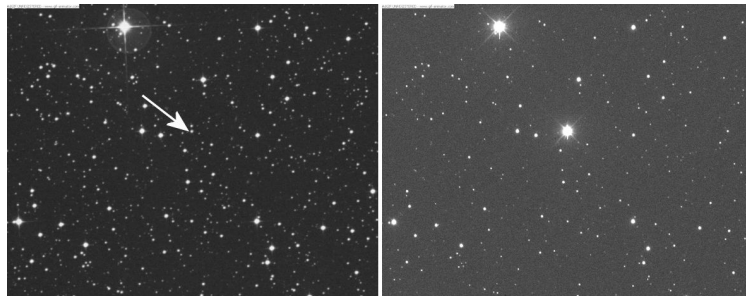
La fusion se stabilise un peu par la suite. La fusion se fait par cycle CNO dans la couche qui devient convective. La température élevée de la couche et la convection augmentent énormément l'épaisseur de la couche d'hydrogène de sorte que la naine blanche a maintenant un diamètre d'environ $4 R_{\odot}$, ce qui est nettement plus que le rayon de la naine blanche avant le démarrage de la fusion qui, rappelons-le, était comparable au diamètre de la Terre. Ce gonflement fait que la naine blanche ressemble alors beaucoup à une étoile bleue sur la branche horizontale. La luminosité étant presque égale à la limite d'Eddington, il y a beaucoup de perte de masse pendant cette période. En arrivant au bout des réserves d'hydrogène au bout d'une période variant de quelques mois à un an, la fusion s'arrête. La luminosité et la taille de la naine blanche redescendent alors à ce qu'elles étaient avant l'explosion.

On obtient alors une *nova*, un terme signifiant *nouvelle étoile*. On lui a donné ce nom parce que, la plupart du temps, on voit apparaître une nouvelle étoile dans le ciel quand l'explosion se produit. En fait, il n'y a pas de nouvelle étoile. C'est simplement un système d'étoiles auparavant invisible à l'œil nu, qui devient assez lumineux pour qu'on puisse le voir lorsque l'explosion se produit, ce qui donne l'impression qu'il y a une nouvelle étoile. Il y a de 2 à 3 novas chaque année dans notre ciel. Voici un graphique typique de la variation de luminosité d'un système d'étoile quand il y a une nova.



www.pas.rochester.edu/~afrank/A105/LectureXII/LectureXII.html

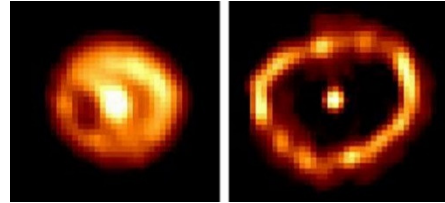
L'image de droite vous montre la nova T de la boussole (T pyxidis), avant et après l'explosion visible à partir du 15 avril 2011.



c176.photobucket.com/user/walcom77/media/T_Pyx_animation_April_15_2011.gif.html

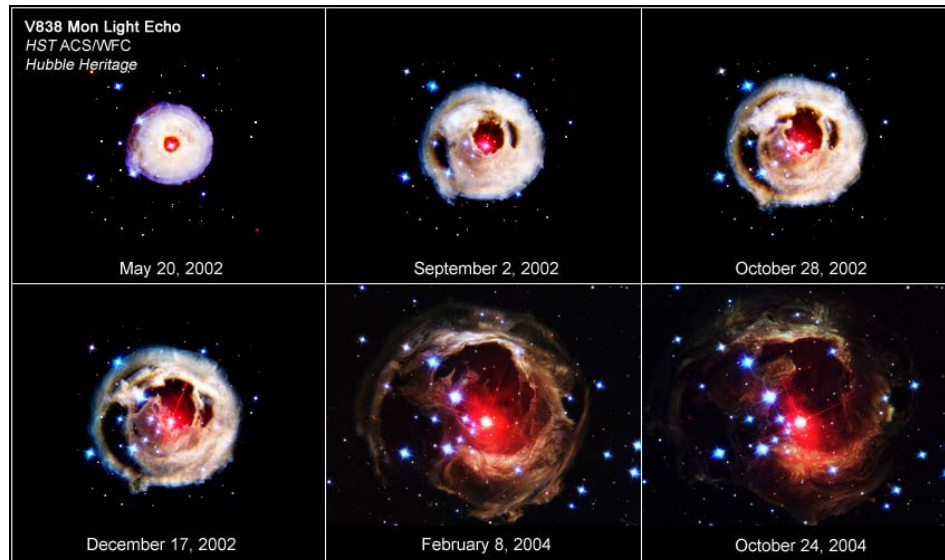
L'explosion peut se répéter plusieurs fois si la naine blanche continue de recevoir de la matière de l'autre étoile. Le temps entre les explosions dépend de la distance entre les étoiles (le taux de transfert de masse est plus important si les étoiles sont près l'une de l'autre), du rythme de perte de masse de l'étoile qui accompagne la naine blanche et de la masse de la naine blanche (la quantité d'hydrogène requise pour déclencher une explosion est plus basse si la masse de la naine blanche est plus grande). Généralement, le temps entre les explosions est de plusieurs dizaines de milliers d'années, mais il est de seulement quelques décennies dans certains cas (on parle d'une *nova récurrente*). C'est le cas de T de la boussole qui a explosé en 2011, 1966, 1944, 1920, 1902 et 1890.

L'image de droite vous montre la nova Cygni 1992. L'explosion fut visible à partir de la Terre le 19 février 1992. On peut voir les images de la nova 15 et 22 mois après l'explosion. Le rayon de la couche éjectée sur la deuxième image est d'environ 1000 UA. Cette nova est à 10 400 al de la Terre.



beta.hubblesite.org/newscenter/releases/1994-06/contents/images/a

Il est possible que les transformations de V838 de la licorne (V838 Monocerotis) montrées sur la figure suivante soient dues à une explosion d'une couche d'hydrogène sur une naine blanche, mais les variations de luminosité en fonction du temps sont un peu différentes de ce qu'on a habituellement, ce qui laisse des doutes sur l'origine de l'explosion.



hubblesite.org/contents/media/images/2005/02/1643-Image.html

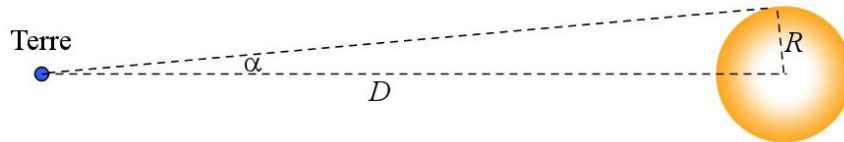
Distance des novas

L'éjection de matière dans toutes les directions par une nova permet de déterminer la distance de la nova. Comme, il y a deux façons de déterminer la vitesse de la matière éjectée et qu'une de ces façons dépend de la distance, on peut déterminer la distance de la nova quand on combine ces deux façons.

La première façon consiste à mesurer la vitesse à l'aide de l'effet Doppler pour la matière qui se dirige directement vers nous.



L'autre façon consiste à mesurer le rayon angulaire de la sphère de matière éjectée.



On a alors

$$\alpha_{(rad)} = \frac{R}{D}$$

On mesure ensuite à quel rythme change l'angle α . Ce rythme correspond au taux de variation de l'angle et est donc $d\alpha/dt$, qu'on notera ω . On obtient ce taux en mesurant l'angle à un certain moment et en le mesurant encore quelques années plus tard. On peut alors observer que l'angle a augmenté et on donnera souvent la mesure du taux en seconde d'arc par année. Ce taux est

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{(rad)}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{D} \right) \\ \omega_{(rad/s)} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{D} \right) \end{aligned}$$

Puisque c'est R qui change avec le temps, on peut sortir D de la dérivée, et on a

$$\omega_{(rad/s)} = \frac{1}{D} \frac{dR}{dt}$$

Or, dR/dt est le taux de variation du rayon, qui est simplement la vitesse de la matière. C'est cette vitesse qu'on a mesurée avec l'effet Doppler. On a donc

$$\omega_{(rad/s)} = \frac{1}{D} v$$

Ce qui nous donne

Distance des novas

$$D = \frac{v}{\omega_{(rad/s)}}$$

La seule difficulté consiste à transformer ω , qui est donnée en secondes d'arc par année, en radians par seconde.

Exemple 12.7.1

Le rythme d'expansion de la sphère de matière éjectée par la nova GK de Persée (GK Persei) est de $0,5''/\text{an}$. Les mesures avec l'effet Doppler nous indiquent que la vitesse de la matière éjectée est de 1100 km/s . Quelle est la distance de cette nova ?

Transformons premièrement les unités de ω . On a

$$\begin{aligned}\omega &= 0,5'' / \text{an} \\ &= \left(\frac{0,5}{3600} \right) \frac{^\circ}{\text{an}} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \cdot \frac{1 \text{ an}}{365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \\ &= 7,6814 \times 10^{-14} \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

La distance est donc

$$\begin{aligned}D &= \frac{v}{\omega_{(\text{rad/s})}} \\ &= \frac{1100 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{7,6814 \times 10^{-14} \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \\ &= 1,432 \times 10^{19} \text{ m} \\ &= 1513 \text{ al}\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser cette technique avec les nébuleuses planétaires, à condition de pouvoir mesurer la vitesse angulaire d'expansion, ce qui n'est pas toujours facile.

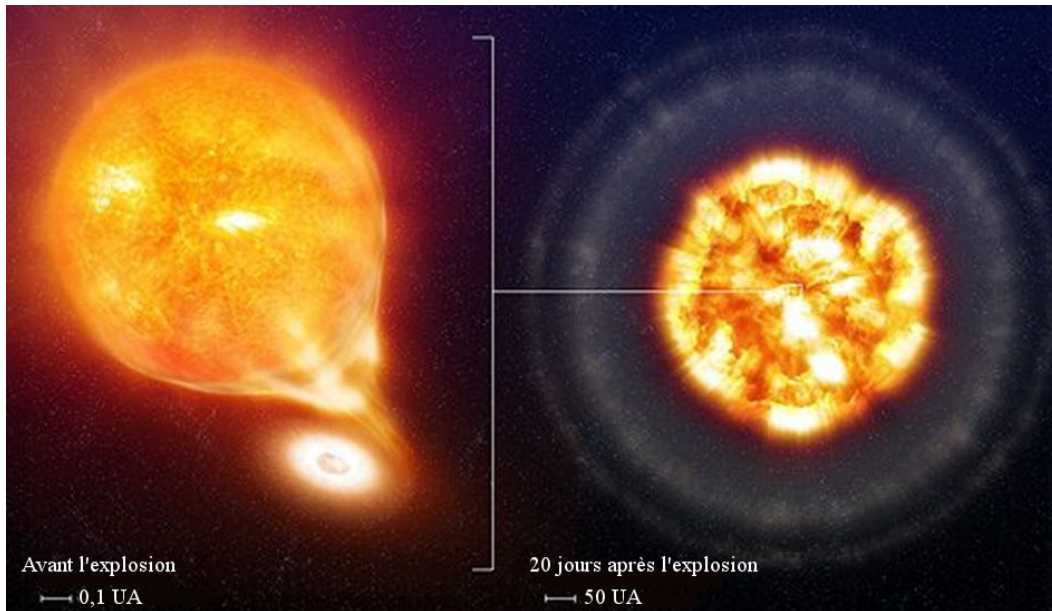
La supernova de type Ia

Le résultat peut être bien différent si la naine blanche a une masse plus élevée. Dans ce cas, la matière qui forme la naine blanche (souvent du carbone et de l'oxygène) est plus compacte (le rayon de la naine blanche diminue à mesure que la masse augmente) et plus chaude (puisqu'elle a été comprimée).

Si la naine blanche, composée de carbone et d'oxygène, accumule de la masse, alors la densité et la température vont augmenter et il se pourrait alors qu'on atteigne les conditions nécessaires pour que la fusion nucléaire du carbone et de l'oxygène se fasse.

Le démarrage de la fusion nucléaire dans la naine blanche est alors catastrophique. Cette fusion commence dans de la matière hautement dégénérée, ce qui veut dire qu'il n'y a rien pour contrôler cette fusion. La fusion se fait dans tout le volume de la naine blanche en environ 3 secondes. C'est une véritable explosion de l'étoile.

On a alors une *supernova de type Ia*. (C'est une supernova de type I, car il n'y a pas de raies spectrales de l'hydrogène dans le spectre. C'est ce qu'on a ici puisqu'il n'y a pas beaucoup d'hydrogène dans une naine blanche.) Hoyle et Fowler ont été les premiers à proposer ce modèle pour les supernovas de type Ia en 1960.



astrobob.areavoices.com/2011/01/24/new-bright-supernova-in-a-galaxy-near-the-little-dipper/

Cette explosion (qui libère environ 10^{44} J) a une luminosité visuelle d'environ 5,5 milliard de fois celle du Soleil. Puisque cette explosion se produit presque toujours dans les mêmes conditions, on obtient presque toujours la même luminosité. Dans presque tous les cas, on obtient la magnitude visuelle suivante.

Magnitude visuelle absolue d'une supernova de type Ia

$$M = -19,6 \pm 0,2$$

Exemple 12.7.2

Quelle serait la magnitude visuelle d'une supernova de type Ia qui exploserait à une distance de 3300 al de la Terre ?

Avec une magnitude visuelle absolue de -19,6, on trouve la magnitude visuelle apparente avec

$$M = m + 5 \log \left(\frac{32,62 \text{ al}}{D} \right)$$

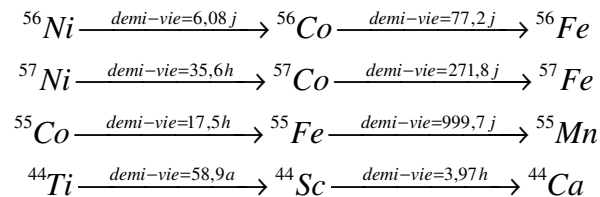
$$-19,6 = m + 5 \log \left(\frac{32,62 \text{ al}}{3300 \text{ al}} \right)$$

$$m = -9,57$$

Cette magnitude ferait de cette étoile un objet extrêmement lumineux dans le ciel.

La température monte tellement lors de l'explosion qu'on va atteindre la température de fusion du silicium qui formera une bonne quantité de nickel 56. On n'obtient pas du fer ici parce que la fusion se fait trop rapidement pour que le processus de capture électronique ait le temps de transformer des protons en neutrons dans les noyaux. Le nombre de protons et de neutrons reste donc les mêmes pendant toute la fusion et les chaînes de fusion du silicium se terminent au nickel 56 dans ces conditions.

Lors de l'explosion, la naine blanche est complètement dispersée et il ne reste plus d'étoile après l'explosion. La fusion a produit une grande variété d'isotopes (dont environ $0,5 M_{\odot}$ de nickel 56) et l'explosion les a propulsés dans l'espace. Beaucoup de ces isotopes sont radioactifs ce qui fait en sorte qu'au bout d'un certain temps la luminosité de la supernova vient essentiellement de l'énergie produite par la radioactivité de ces noyaux. Les principales désintégrations sont



Il faut dire qu'il y a encore beaucoup d'incertitudes concernant les supernovas de type Ia parce qu'on n'arrive pas très bien à les modéliser. Premièrement, on ne sait pas vraiment d'où vient la masse qui arrive sur la naine blanche. Si elle provient d'une étoile géante en fin de vie, alors pourquoi ne parvient-on jamais à voir cette étoile sur les images faites avant l'explosion ? De plus, cette étoile devrait survivre à l'explosion de sa voisine (en perdant toutefois une partie de ses couches externes), mais on n'est jamais arrivé à identifier avec certitude une de ces étoiles dans les restes de supernova. Il devait aussi y avoir toute une série d'effets observables générés par l'interaction entre le souffle de l'explosion et l'étoile. Pourtant, on n'observe aucun de ces effets. Peut-être qu'il y a un mécanisme qui retarde l'explosion de la naine blanche de sorte qu'elle se produit après la mort de l'étoile qui donnait de la masse. Peut-être que l'étoile qui donne de la masse n'est pas une étoile en fin de vie, mais une autre naine blanche moins massive qui s'approche assez près pour donner de la masse. Deuxièmement, les simulations d'explosion ne permettent pas d'obtenir des résultats en accord avec les observations. La simulation d'une fusion explosive dans une naine blanche de carbone et d'oxygène (qui se produit quand la masse de la naine blanche est entre $1,2 M_{\odot}$ et $1,3 M_{\odot}$) produit trop de nickel et laisse une partie de la naine blanche qui ne fusionne pas. On arrive à faire mieux en ayant une détonation initiale dans une couche d'hélium (qui se produit quand la masse de la naine blanche est entre $1 M_{\odot}$ et $1,1 M_{\odot}$) qui entraîne presque aussitôt la détonation du carbone et de l'oxygène. (La couche d'hélium vient de la matière transférée par l'autre étoile.) Aucun modèle publié jusqu'à ce jour n'arrive à expliquer toutes les observations. Il y a sûrement plusieurs scénarios possibles et on devrait en savoir plus avec les futures observations de ces supernovas.

Quelques explosions de supernovas de type Ia célèbres visibles à partir de la Terre

La supernova de 1604 : SN1604, la supernova de Kepler

Cette explosion, visible à partir de la surface de la Terre en 1604, a atteint une magnitude maximale de -2,5. Elle est distante de 20 000 al. Aujourd'hui, on ne voit plus grand-chose à l'endroit où s'est produite cette explosion, du moins en visible. C'est un peu plus évident en rayons X et en infrarouge. Le diamètre des vestiges de l'explosion est maintenant de 14 al.

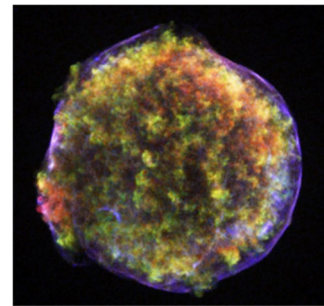
(L'image est une composition des images en visible, rayons X et infrarouge. Cela ne correspond pas du tout à ce qu'on verrait avec nos yeux si on était près de l'endroit où s'est produite l'explosion.)



www.compadre.org/informal/index.cfm?Issue=27

La supernova de 1572 : la supernova de Tycho Brahe

Le 11 novembre 1572 apparaissait une nouvelle étoile très brillante dans la constellation de Cassiopée. Elle a atteint une magnitude maximale de -3,5, ce qui faisait d'elle l'objet le plus brillant du ciel après le Soleil et la Lune. Les vestiges de cette explosion sont distants d'environ 9000 al, et ont un diamètre de 20 al. La vitesse de la matière éjectée est entre 21,5 et 27 millions de km/h, la plus grande vitesse mesurée pour un vestige de supernova. (L'image est encore une fois une composition d'image à plusieurs longueurs d'onde.)



en.wikipedia.org/wiki/SN_1572

La supernova de 1006 : SN1006

Cette supernova est apparue dans le ciel de la Terre le 30 avril 1006 pour atteindre une magnitude maximale de -7,5. Située à 7200 al, elle était suffisamment brillante pour faire des ombres ou pour pouvoir lire un manuscrit la nuit grâce à sa lumière. (L'image est encore une fois une composition d'image à plusieurs longueurs d'onde. En visible, elle est pratiquement invisible.)



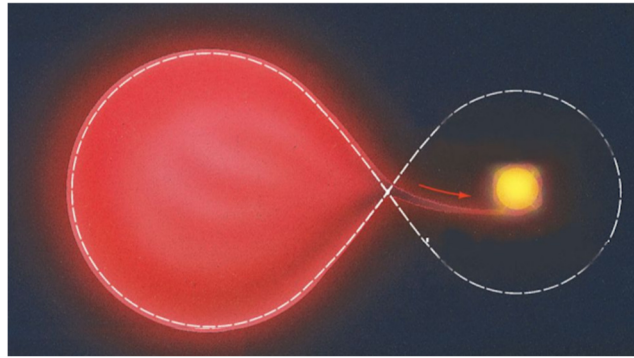
en.wikipedia.org/wiki/SN_1006

Fréquence des supernovas

On estime qu'il y a 2 à 3 supernovas par siècle dans notre galaxie. Cela inclut les supernovas causées par l'effondrement du cœur de fer et celles causées par l'explosion d'une naine blanche. Cela veut dire qu'il y aurait, en moyenne, 2 explosions de supernova à moins de 300 al de la Terre par millions d'années.

Le transfert de masse à une étoile à neutrons

On pourrait avoir un système d'étoiles multiples avec une ou plusieurs étoiles de plus de $8 M_{\odot}$. Encore une fois, l'étoile la plus massive mourra en premier en transférant, si la surface atteint le lobe de Roche, une partie de sa masse à l'autre étoile.



physics.uoregon.edu/~jimbrau/ast122/notes/chapter20.html

Supposons maintenant que cette étoile qui meurt en premier est suffisamment massive pour laisser derrière elle une étoile à neutrons.

Quand la deuxième étoile meurt, il peut y avoir à nouveau un transfert de masse, mais cette fois, la matière va s'accumuler sur l'étoile à neutrons. La matière qui arrive sur l'étoile à neutrons fait diminuer la période de rotation par conservation du moment cinétique. On pense que c'est ainsi que se forment des pulsars ayant de très courtes périodes de quelques millisecondes.

De l'hydrogène s'accumule alors à la surface de l'étoile à neutrons et il arrivera un moment où il y aura une fusion explosive de cet hydrogène dégénéré. L'explosion libère beaucoup d'énergie, principalement dans le domaine des rayons X. Cette explosion porte le nom de *sursauter X*. L'intensité du rayonnement monte en à peine une dizaine de secondes pour redescendre pendant environ une minute. L'explosion se répète typiquement quelques jours plus tard. Un sursauter X est donc assez similaire à une nova (explosion d'hydrogène à la surface d'une naine blanche), mais le processus se répète avec une plus courte période parce que la gravitation plus intense à la surface de l'étoile à neutron comprime et chauffe davantage l'hydrogène (on atteint donc la température de fusion plus rapidement).

Une étoile à neutrons qui accompagne une supernova

Si l'étoile qui accompagne l'étoile à neutrons est une étoile de plus de $8 M_{\odot}$, elle finira sa vie en explosion de supernova. Si les compagnons sont très près l'une de l'autre, il se produit plusieurs phénomènes.

Premièrement, la supernova sera un peu particulière. En gonflant, l'étoile perd ses couches externes puisque le lobe de Roche est trop petit. Quand l'étoile explose, il n'y a plus de couches d'hydrogène et d'hélium, ce qui donne un spectre particulier à la supernova.

Deuxièmement, lors de l'explosion de la supernova, l'étoile à neutrons reçoit beaucoup de matière en quelques dizaines de secondes. La matière qui arrive forme alors un disque d'accrétion et des jets de matière et de rayons gamma.

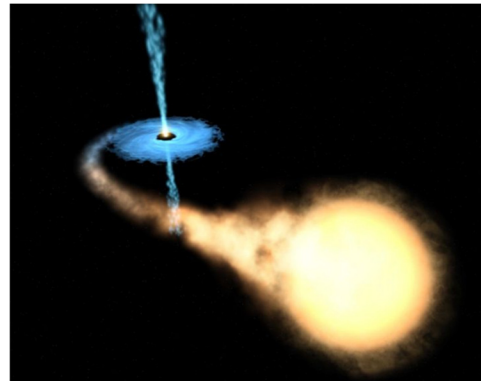
Si l'étoile à neutrons a initialement une masse près de la valeur maximale pour la masse d'une étoile à neutrons, il est possible alors que l'arrivée de matière fasse en sorte que la masse de l'étoile à neutrons dépasse la valeur maximale et que l'étoile à neutrons devienne un trou noir. Dans ce cas, l'émission de rayonnement gamma le long des jets devient beaucoup plus grande. (Il y a encore des jets même si le trou noir ne fait pas de champ magnétique parce que le champ de l'étoile à neutrons reste figé dans le disque). Le trou noir devient alors une hypernova. La situation est très similaire à celle obtenue lors de l'effondrement d'une étoile très massive en rotation, sauf que la matière provient de l'étoile voisine. Encore une fois, les jets ne durent que quelques minutes et on observe un sursaut de rayon gamma uniquement si la Terre est dans la direction d'un des jets.

Le transfert de masse à un trou noir

Dans un système d'étoiles double avec des étoiles de plus de $8 M_{\odot}$, il se pourrait que l'étoile qui meurt en premier soit suffisamment massive pour laisser derrière elle un trou noir.

Plus tard, l'autre étoile arrive en fin de vie et il se pourrait que cette étoile commence à transférer de la matière vers le trou noir. La matière se met alors à tourner autour du trou noir en formant un disque d'accrétion chauffé par l'énergie perdue par la matière. Dans ce cas, le disque peut exister pendant très longtemps et il ne sera pas caché par de la matière éjectée.

faculty.etsu.edu/ignace/blackholes.html



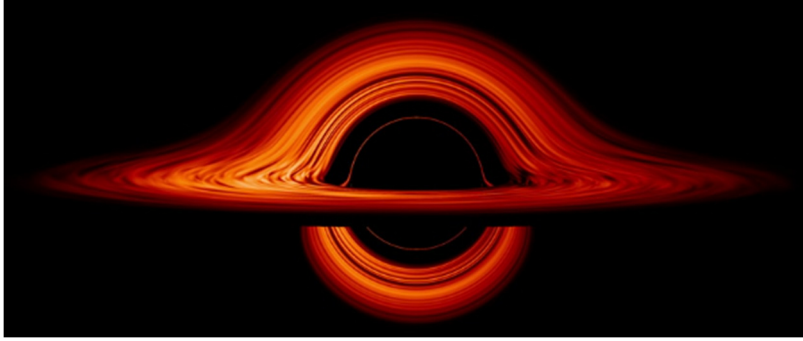
Comme le disque est relativement petit, on ne pourrait pas le distinguer sur une image, mais on pourrait détecter le rayonnement émis par ce disque puisqu'il est chaud. Il est même très chaud puisque l'énergie perdue par la matière en orbite est énorme. Sur le bord intérieur du disque d'accrétion, la température est approximativement

Température du bord interne du disque d'accrétion

$$T = 2\,000\,000\,K \cdot \left(\frac{10M_{\odot}}{M} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Pour un trou noir de $5 M_{\odot}$, on arrive à une température de près de $2\,400\,000\,K$. À cette température, le disque d'accrétion devient très lumineux avec un maximum d'émission dans les rayons X. On pourrait donc détecter de tel disque puisqu'il serait une source intense de rayons X avec un spectre très particulier.

Notez que si on parvenait à voir le disque directement, on ne verrait pas un simple disque d'accrétion en rotation autour du trou noir. Comme le trou noir dévie la lumière, l'image du disque est complètement déformée.



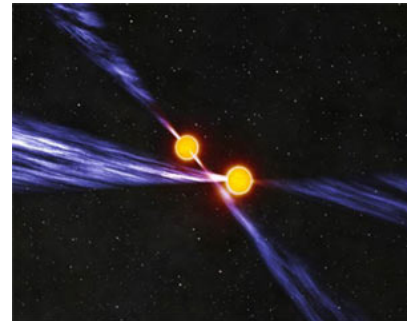
Cette image provient d'une animation dans laquelle l'angle de vue change.

<https://svs.gsfc.nasa.gov/13326>

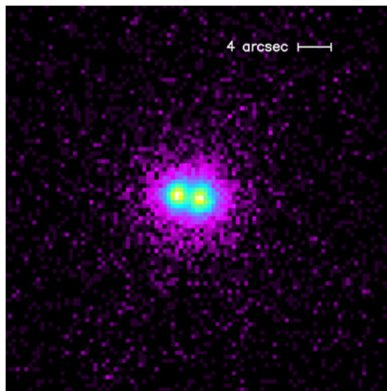
Au-dessus du trou noir, on voit le dessus du disque d'accrétion alors qu'en dessous du trou noir, on voit le dessous du disque d'accrétion. On voit également qu'un côté du disque est plus lumineux que l'autre. La lumière est amplifiée du côté où la matière se dirige vers nous.

Les systèmes doubles de cadavres

Une fois que les deux étoiles sont mortes, on obtient un système double formé de deux cadavres. Par exemple, on peut obtenir un système double d'étoiles à neutrons, qui peuvent être toutes les deux des pulsars. Voici une illustration d'un système formé de deux pulsars (à droite).



outreach.atnf.csiro.au/education/everyone/radio-astronomy/



Cette image, en rayons X, montre d'ailleurs un véritable système d'étoile à neutrons double. Ce système est dans l'amas M15.

image.gsfc.nasa.gov/docs/features/news/25sep01.html

On pourrait penser qu'il ne se passera plus rien avec les 2 cadavres du système double. Ils vont simplement tourner l'un autour de l'autre pour l'éternité. C'est souvent le cas, mais pas toujours. Il pourrait arriver que les deux cadavres fusionnent s'ils sont trop près l'un de l'autre. Cela se produit parce que les objets en orbite émettent des ondes gravitationnelles.

Les ondes gravitationnelles

La relativité générale prévoit que les étoiles doubles perdent de l'énergie gravitationnelle sous forme d'onde gravitationnelle en tournant l'une autour de l'autre. Cela se traduira par un rapprochement des deux étoiles et une diminution de la période de rotation du système. Dès 1975, on a effectivement montré que la période d'un système binaire formé de deux étoiles à neutrons diminuait au rythme prévu par la théorie de la relativité d'Einstein. Finalement, des ondes gravitationnelles furent directement observées en 2015.

Avec la relativité générale, on peut montrer que, pour deux objets distants d'une distance r tournant autour de leur centre de masse en suivant une orbite circulaire, la puissance émise sous forme d'onde gravitationnelle est

Puissance émise sous forme d'onde gravitationnelle

$$P = \frac{32G^4 M_A^2 M_B^2 (M_A + M_B)}{5c^5 r^5}$$

Cette puissance est généralement très basse. La Terre en orbite autour du Soleil ne perd qu'environ 200 joules par seconde par émission d'ondes gravitationnelles. Comparée à l'énergie mécanique de la Terre, cette perte est négligeable. Toutefois, la puissance émise peut devenir significative pour 2 objets massifs très près l'un de l'autre.

Exemple 12.7.3

Le pulsar binaire PSR B1913+16 est formé de deux étoiles à neutrons ayant des masses de $1,378 M_\odot$ et $1,441 M_\odot$. La distance entre les deux pulsars est $1,95 \times 10^9$ m (c'est seulement 0,013 UA).

- a) Quelle est la période de rotation de ce système ?

La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_{tot}}} \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(1,95 \times 10^9 \text{ m})^3}{6,6743 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot (2,7402 \times 10^{30} \text{ kg} + 2,8654 \times 10^{30} \text{ kg})}} \\ &= 27972 \text{ s} = 7,77 \text{ h} \end{aligned}$$

- b) Quelle est la puissance émise sous forme d'onde gravitationnelle ?

La puissance est

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{32G^4 M_A^2 M_B^2 (M_A + M_B)}{5c^5 r^5} \\
 &= \frac{32 \cdot \left(6,6743 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\right)^4 \cdot \left(2,7402 \times 10^{30} \text{ kg}\right)^2 \cdot \left(2,8654 \times 10^{30} \text{ kg}\right)^2 \cdot 5,6056 \times 10^{30} \text{ kg}}{5 \cdot \left(299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^5 \cdot \left(1,95 \times 10^9 \text{ m}\right)^5} \\
 &= 6,4280 \times 10^{23} \text{ W}
 \end{aligned}$$

En perdant ainsi de l'énergie gravitationnelle, les deux objets se rapprochent l'un de l'autre en tournant de plus en plus rapidement, ce qui augmente encore plus la puissance des ondes gravitationnelles. Ultiment, les deux objets fusionneront pour ne former qu'un seul objet. Le temps qu'il faudra pour que les objets fusionnent est donné par

Temps nécessaire pour que les objets fusionnent

$$t = \frac{5c^5 r^4}{256G^3 M_A M_B (M_A + M_B)}$$

Exemple 12.7.4

Le pulsar binaire PSR B1913+16 est formé de deux étoiles à neutrons ayant des masses de $1,378 M_\odot$ et $1,441 M_\odot$. La distance entre les deux pulsars est $1,95 \times 10^9 \text{ m}$ (c'est seulement 0,013 UA). Combien faudrait-il de temps pour que les deux étoiles s'écrasent l'une sur l'autre à cause de l'énergie perdue par émission d'ondes gravitationnelles ?

Le temps est

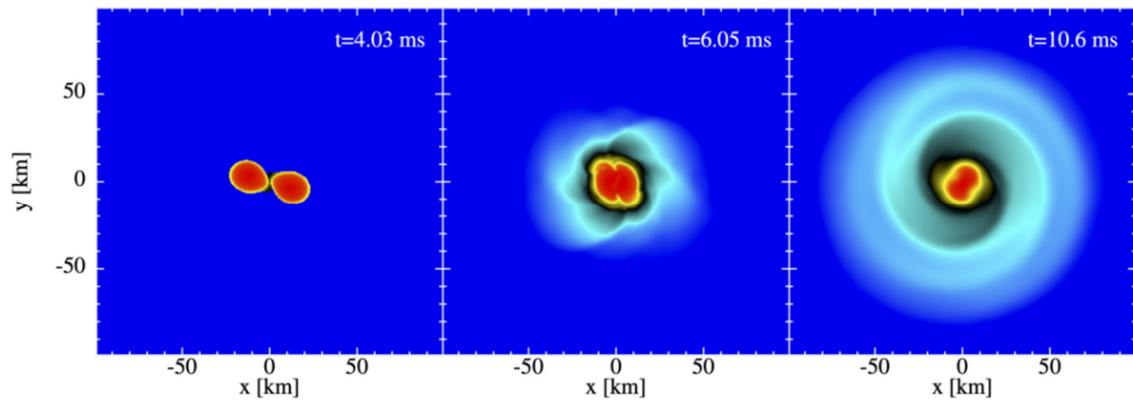
$$\begin{aligned}
 t &= \frac{5c^5 r^4}{256G^3 M_A M_B (M_A + M_B)} \\
 &= \frac{5 \cdot \left(299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^5 \cdot \left(1,95 \times 10^9 \text{ m}\right)^4}{256 \cdot \left(6,6743 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\right)^3 \cdot 2,7402 \times 10^{30} \text{ kg} \cdot 2,8654 \times 10^{30} \text{ kg} \cdot 5,6056 \times 10^{30} \text{ kg}} \\
 &= 5,2260 \times 10^{16} \text{ s} \\
 &= 1,656 \text{ Ga}
 \end{aligned}$$

Les fusions d'étoiles

Le temps pour arriver à la fusion est assez long, mais c'est un temps plus petit que l'âge de l'univers. Cela est un signe que de telles fusions peuvent se produire à l'occasion. Dans les derniers moments avant la fusion, la puissance émise sous forme d'ondes gravitationnelles devient très importante (r est petit dans la formule de la puissance). C'est à ce moment que

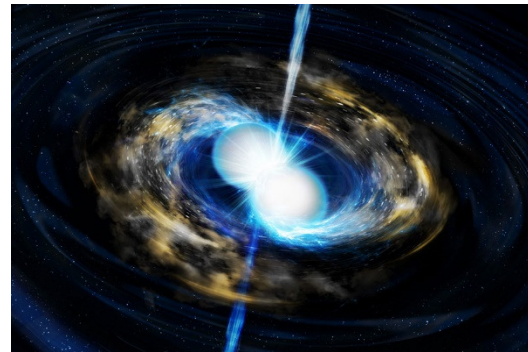
la puissance est assez grande pour qu'on puisse détecter les ondes sur Terre. On observe alors les derniers moments du système double.

La figure suivante montre une simulation des derniers moments d'un système formé de deux étoiles à neutron de $1,3 M_{\odot}$.



arxiv.org/pdf/2208.14026.pdf

La collision finale de deux étoiles à neutrons est celle qui libère le plus d'énergie. Le produit final de la collision est un trou noir ou une étoile à neutron et un peu de matière éjectée lors de la collision (environ $0,01 M_{\odot}$). Cette matière éjectée à environ 20 % de la vitesse de la lumière est composée d'une multitude de noyaux atomiques riches en neutrons qui se sont formés lors de la collision. Lors de la collision, beaucoup de neutrinos et de rayons gamma sont émis (ce sont les *sursauts de rayon gamma courts*). Puis, la désintégration radioactive de ces éléments trop riches en neutrons produit de la lumière pendant un certain temps après la fusion. La luminosité en visible est environ 1000 fois celle d'une nova et c'est pour cela qu'on appelle ce phénomène une *kilonova*.



www.nao.ac.jp/en/news/science/2022/20221027-cfca.html

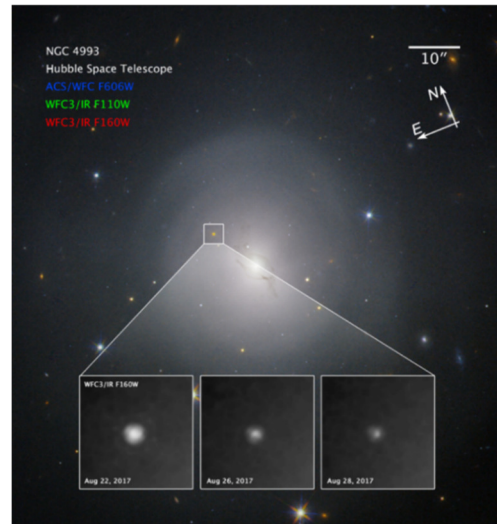
Le 17 août 2017, on a même examiné une telle fusion sous plusieurs angles. À 12 h 41 min 4 s (heure de Londres), les 3 détecteurs d'ondes gravitationnelles (1 en Louisiane, 1 en Italie et un autre dans l'état de Washington) captent un signal. À 12 h 41 min 6 s, le *Gamma Ray Burst Monitor* du télescope spatial Fermi détecte un sursaut de rayons gamma. (La fusion d'étoiles à neutrons crée aussi une intense émission de rayons gamma. C'est probablement le phénomène ayant la plus grande puissance de tout l'univers.) C'était la première fois qu'on avait cette association entre une onde gravitationnelle et un sursaut de rayons gamma. En combinant les données des 3 détecteurs, on localise, vers 18 h, la source dans une région du ciel et on estime la distance à 120 Mal. Cette région comporte plusieurs objets, mais un étudiant au doctorat parvient à localiser, à 1 h du matin, la contrepartie visible de la source d'onde gravitationnelle et de rayons gamma dans la galaxie NGC 4993. C'était aussi la première fois qu'on associait une image

en visible et une source d'onde gravitationnelle. Tout cela est le résultat de la fusion d'une étoile à neutrons d'environ $1,45 M_{\odot}$ avec une autre d'environ $1,25 M_{\odot}$.

Les fusions d'étoiles à neutrons sont assez rares (environ 1000 fois moins fréquents que les supernovas).

Évidemment, d'autres objets peuvent fusionner, comme deux naines blanches, ou une étoile à neutrons avec un trou noir par exemple. Il y a aussi de l'énergie libérée dans ces fusions, mais pas autant que ce qu'on obtient avec deux étoiles à neutrons.

hubblesite.org/contents/media/images/2017/41/4078-Image.html?news=true



Les fusions d'étoiles à neutrons sont également une source de rayons cosmiques. Ici aussi, les particules peuvent atteindre la limite de l'énergie possible pour les rayons cosmiques de 10^{21} eV. Encore une fois, il ne faudrait pas que la fusion se fasse trop près de la Terre. On estime qu'on pourrait avoir une extinction massive si la distance est inférieure à 200 pc. Certains estiment (avec beaucoup d'incertitude) que cela pourrait se produire une fois par 500 millions d'années.

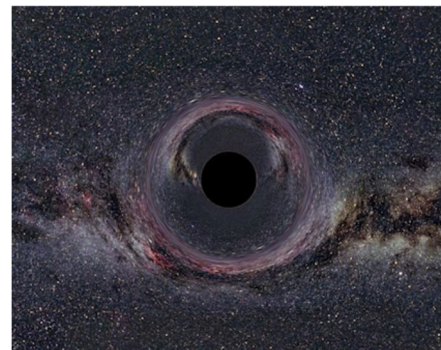
12.8 LA DÉTECTION DES TROUS NOIRS

L'observation directe des trous noirs est impossible puisqu'ils n'émettent pas de rayonnement, mais on arrive à en détecter par diverses techniques.

Les microlentilles gravitationnelles

On peut détecter des trous noirs par la déformation de l'image d'arrière-plan générée par la déviation de la lumière. Cet effet est appelé *microlentille gravitationnelle*. On ne voit pas le trou noir, mais on peut voir les déformations de l'image en arrière-plan que sa présence entraîne. Le film suivant montre la déformation de l'image d'une galaxie lointaine qu'on aurait si un trou noir passait, pas trop loin de la Terre, entre nous et cette galaxie.

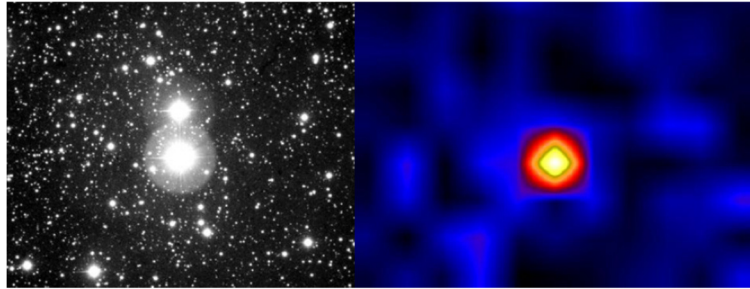
<https://www.youtube.com/watch?v=2-My9CCHyBw>



En janvier 2022, on annonçait la première détection claire d'un trou noir par cet effet de microlentille. C'est un trou noir de $7,1 \pm 1,3 M_{\odot}$ situé à une distance de 5150 al.

Le rayonnement X du disque d'accrétion

La façon la plus évidente de détecter un trou noir consiste à observer le spectre très particulier des rayons X émis par le disque d'accrétion des trous noirs dans un système double. On connaît d'ailleurs quelques sources de rayons X ayant ce spectre. Cygnus X-1 en est une.



www.greatdreams.com/constellations/cygnus-x-3.htm et en.wikipedia.org/wiki/Cygnus_X-1

À gauche, vous pouvez voir Cygnus X-1 en lumière visible, alors qu'à droite on a la même région du ciel en rayons X. De toute évidence, il y a une source très intense de rayons X à cet endroit (qui correspond à l'étoile du bas sur l'image de gauche). Aujourd'hui, on est pratiquement certain que Cygnus X-1 est un trou noir de $14 M_{\odot}$ à $16 M_{\odot}$ qui provient de la mort d'une étoile de plus de $40 M_{\odot}$ qui se serait produite il y a 5 millions d'années. L'étoile qui accompagne le trou noir (portant le joli nom de HDE 226868) et qui transfère de la masse au trou noir est une étoile de type O ayant une masse entre $20 M_{\odot}$ et $40 M_{\odot}$. Les deux astres, situés à 6000 al de la Terre, tournent autour du centre de masse du système avec une période de 5,6 jours. Le disque d'accrétion du trou noir s'étend jusqu'à une distance de $350 R_s$ du trou noir, soit environ 15 000 km.

On devine comment va finir le système de Cygnus X-1. La deuxième étoile va mourir à son tour pour former une étoile à neutrons ou un trou noir. On pourrait alors avoir un système double de trou noir.

Pour certains systèmes, le transfert de matière est souvent interrompu et l'émission du disque est occasionnelle. Cela se produit souvent dans les systèmes où la masse du compagnon du trou noir est faible (moins de $3 M_{\odot}$). Il y a du rayonnement pendant quelques jours ou quelques semaines, puis tout s'arrête pendant quelques mois ou quelques années. On découvre ainsi 1 à 2 nouvelles sources par année quand le disque d'accrétion redevient actif. Pour d'autres systèmes, le transfert ne s'arrête pas et l'émission est continue. Ce sont souvent des systèmes où la masse du compagnon du trou noir est importante (plus de $10 M_{\odot}$).

Les ondes gravitationnelles

Depuis 2015, on peut détecter les ondes gravitationnelles. Si un système double formé d'une étoile à neutrons et d'un trou noir ou de deux trous noirs fusionnait, on pourrait le détecter. On pourrait alors connaître les caractéristiques du trou noir formé par la fusion des 2 objets. Par exemple, on a détecté la fusion de 2 trous noirs ayant des masses autour de $30 M_{\odot}$ le 14 septembre 2015.

Les trous noirs connus

Il y a une vingtaine de trous noirs provenant de la mort d'étoiles dont on a mesuré la masse et une cinquantaine d'autres candidats dont on n'a pas encore mesuré la masse (et qui pourrait donc être des étoiles à neutrons). Le plus près est à 1500 al de la Terre.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_trous_noirs (Dans la section trous noirs stellaires.) (Les astronomes parlent de trous noirs si on connaît la masse et de candidat au statut de trou noir si on ne connaît pas la masse. Pour les théoriciens, ce sont tous des candidats au statut de trou noir.)

Tous les trous noirs stellaires connus ont des masses se situant entre $3 M_{\odot}$ et $35 M_{\odot}$.

Selon des simulations, il devrait y avoir entre 100 millions et 1 milliard de trous noirs dans notre galaxie. La masse maximale serait d'environ $50 M_{\odot}$, mais il est possible que quelques-unes des premières étoiles aient pu former des trous noirs d'environ $150 M_{\odot}$.

Le moment cinétique des trous noirs connus

Le moment cinétique des trous noirs connus est relativement élevé. La limite théorique est $a = 1$, mais des calculs un peu plus poussés qui tiennent compte des processus d'émission montre que la valeur maximale de a d'un trou noir est de 0,998 (c'est la limite de Thorne).

Il est possible d'évaluer la valeur de a d'un trou noir à partir du spectre d'émission du disque. On est parvenu à le faire pour 20 trous noirs. Certains ont des valeurs assez basses (6 ou 7 ont un a inférieur à 0,5, mais les incertitudes sont plutôt grandes quand a est petit) et d'autres atteignent pratiquement la valeur maximale (5 ont des a supérieurs à 0,95). C'est le cas de Cygnus X-1 qui a $a = 0,97 \pm 0,02$.

Les valeurs de a sont, en général, assez grandes. Toutefois, cela pourrait être simplement dû au fait que le bord intérieur du disque d'accrétion autour d'un trou noir qui a un a élevée est plus près du trou noir. Cela rend le disque d'accrétion plus lumineux et plus facilement détectable. Comme on détecte plus facilement les trous noirs ayant un a élevé, il est normal qu'ils semblent plus nombreux.

Reste qu'il y a quand même des trous noirs qui ont une valeur de a près du maximum et on peut se demander comment ils ont atteint un moment cinétique si élevé. Tout comme pour les étoiles à neutrons, la matière du disque d'accrétion qui tombe dans le trou noir fait augmenter le moment cinétique. En partant d'un trou noir qui ne tourne pas sur lui-même, on arrive à un trou noir qui a la valeur maximale du moment cinétique quand sa masse est multipliée par $\sqrt{6} \approx 2,4$ par l'ajout de matière provenant du disque d'accrétion. Ce mécanisme peut donc faire augmenter la valeur de a jusqu'à une valeur près de 1.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Rayon d'une naine blanche

$$R = 0,0126 R_{\odot} \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{\odot}}{M}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{M}{1,44 M_{\odot}}\right)^{4/3}}$$

Rayon d'une étoile à neutron

$$R = 11 \text{ km} \cdot \sqrt[3]{\frac{1,4 M_{\odot}}{M}}$$

Changement de la période de rotation avec la contraction

$$\frac{R^2}{T} = \frac{R'^2}{T'}$$

Mesure du temps

$$\Delta \tau_{\text{imm}} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

Rayon de Schwarzschild

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} = 2,953 \text{ km} \cdot \frac{M}{M_{\odot}}$$

Changement de fréquence de la lumière

$$f' = f \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

Changement de longueur d'onde de la lumière

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}}$$

Mesure des distances radiales

$$d\sigma = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}}$$

$$\sigma = R_s \left[\sqrt{x(x-1)} + \ln \left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1} \right) \right]_{x_1}^{x_2} \quad \text{où} \quad x = \frac{r}{R_s}$$

Angle de déviation (en radian) de la lumière quand elle passe près d'un astre (si l'angle n'est pas trop grand)

$$\theta_{\text{dév}} = \frac{2R_s}{r_p}$$

Énergie en relativité générale

$$E = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} mc^2$$

Champ gravitationnel en relativité générale pour un observateur immobile à r

$$g = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{GM}{r^2}$$

Vitesse d'un objet en orbite en relativité générale

$$v = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_s}{r - R_s}}$$

Période orbitale pour un observateur éloigné

$$T_{\text{loin}} = \frac{2\pi r}{c} \sqrt{\frac{2r}{R_s}}$$

Période orbitale pour un observateur dans le vaisseau

$$T_{\text{vaisseau}} = \frac{2\pi r}{c} \sqrt{\frac{2r - 3R_s}{R_s}}$$

Valeur minimale de r des orbites circulaires stables

$$r_{\text{ISCO}} = 3R_s$$

Temps de chute entre deux positions selon l'observateur qui tombe vers un trou noir (à partir de $r = \infty$ avec $v = 0$)

$$\tau_{\text{cl}} = \frac{2R_s}{3c} \left(\left(\frac{r_A}{R_s} \right)^{3/2} - \left(\frac{r_B}{R_s} \right)^{3/2} \right)$$

Temps de vie maximal à l'intérieur de l'horizon

$$\tau = 1,547 \times 10^{-5} s \frac{M}{M_{\odot}}$$

Distance à laquelle les forces de marées d'un trou noir rendent la situation inconfortable

$$r_{ouch} \approx 2000 km \cdot \sqrt[3]{\frac{M_e}{M_\odot}}$$

Valeur de r des horizons d'un trou noir en rotation

$$r_{HE} = \frac{1}{2} R_s \left(1 + \sqrt{1 - a^2} \right)$$

$$r_{HC} = \frac{1}{2} R_s \left(1 - \sqrt{1 - a^2} \right)$$

Distance des novas

$$D = \frac{v}{\omega_{(rad/s)}}$$

Magnitude visuelle absolue d'une supernova de type Ia

$$M = -19,6 \pm 0,2$$

Température du bord interne du disque d'accrétion

$$T = 2\,000\,000 K \cdot \left(\frac{10 M_\odot}{M} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Puissance émise sous forme d'onde gravitationnelle

$$P = \frac{32 G^4 M_A^2 M_B^2 (M_A + M_B)}{5 c^5 r^5}$$

Temps nécessaire pour que les objets fusionnent

$$t = \frac{5 c^5 r^4}{256 G^3 M_A M_B (M_A + M_B)}$$

EXERCICES

12.1 Les naines blanches

1. Quel est le rayon d'une naine blanche ayant une masse de $0,6 M_\odot$?

2. Considérons une naine blanche ayant une masse de $0,8 M_{\odot}$ et une température de surface de 30 000 K.
 - a) Quelle est la luminosité de cette naine blanche ?
 - b) Quelle est la grandeur du champ gravitationnel à la surface de cette naine blanche ?

12.2 Les étoiles à neutrons

3. Considérons une étoile à neutrons ayant une masse de $2 M_{\odot}$.
 - a) Quel est le rayon de cette étoile ?
 - b) Quelle est la densité moyenne de cette étoile ?
 - c) Quelle est la luminosité de cette étoile si la température de surface est de 1 000 000 K ?
4. Que serait la période de rotation de la Terre ($R = 6371$ km) si elle devenait une étoile à neutrons ayant un rayon de 15 mm ?

12.3 La relativité générale

5. Quel est le rayon de Schwarzschild de la Lune ? ($M = 7,346 \times 10^{24}$ kg)
6. Considérons une étoile à neutrons ayant une masse de $2 M_{\odot}$.
 - a) Quelle est la grandeur du champ gravitationnel à la surface de cette étoile à neutrons ?
 - b) En utilisant la formule de l'énergie en relativité, trouvez la vitesse de libération à la surface de l'étoile à neutron.
7. Adrienne est très loin d'une étoile à neutrons de $2 M_{\odot}$ et il y a une source lumineuse à la surface de l'étoile qui émet de la lumière bleue ($\lambda = 450$ nm) vers Adrienne.
 - a) Quelle est la longueur d'onde de la lumière reçue par Adrienne ?
 - b) Quel est le décalage spectral δ ?
8. Yannick est au repos à une distance $r = 20$ km d'une étoile à neutron de $2 M_{\odot}$, il y a une sonde en orbite circulaire autour de l'étoile à neutron à $r = 20$ km et Adrienne est très loin de l'étoile.
 - a) Quelle est la vitesse de la sonde selon Yannick ?

- b) Combien de temps faut-il pour faire le tour de l'étoile selon une horloge dans la sonde ?
 - c) Combien de temps faut-il pour que la sonde fasse le tour de l'étoile selon Adrienne ?
 - d) Quel est le rayon de la plus petite orbite circulaire stable que la sonde pourrait suivre ?
9. Adrienne est initialement très loin d'une étoile à neutron de $2 M_{\odot}$. Elle se laisse tomber en chute libre vers l'étoile sans vitesse initiale. Combien de temps faudrait-il à Adrienne pour passer de $r = 10\,000$ km à la surface de l'étoile à neutron (selon le temps mesuré par Adrienne) ?
10. Quel est l'angle de déviation pour un rayon lumineux qui frôle la surface de Sirius ? (La masse de Sirius est de $2,19 M_{\odot}$ et son rayon est de $1,73 R_{\odot}$.)

12.4 Les trous noirs

11. Adrienne est très loin d'un trou noir alors que Yannick est immobile à $r = 8$ km près d'un trou noir de $1 M_{\odot}$. Combien de temps s'écoule-t-il pour Adrienne s'il s'écoule un an pour Yannick ?
12. Yannick est près d'un trou noir de $1 M_{\odot}$ et il se déplace de la distance $r = 6$ km à $r = 5$ km. Quelle est la distance parcourue selon Yannick ?
13. Yannick s'approche d'un trou noir de $20 M_{\odot}$.
- a) Jusqu'à quelle distance peut-il s'approcher sans souffrir ?
 - b) Jusqu'à quelle distance peut-il s'approcher sans être spaghettifié ?
 - c) Ces distances correspondent à combien de fois le rayon Schwarzschild ?
14. Quelle devrait être la masse minimale d'un trou noir pour que l'on puisse atteindre l'horizon sans souffrir ? Autrement dit, quelle est la masse minimale pour laquelle la distance à laquelle on souffre est plus petite que le rayon de Schwarzschild ?
15. Adrienne tombe vers un trou noir de $100 M_{\odot}$. Quel est le temps maximum qui peut s'écouler entre le moment où Adrienne traverse l'horizon et le moment où Adrienne atteint la singularité, tel que mesuré par Adrienne ?

12.5 Les trous noirs en rotation

16. Quelles sont les valeurs de r de l'horizon des événements et de l'horizon de Cauchy d'un trou noir de $5 M_{\odot}$ qui a un moment cinétique de 60 % de la valeur maximale.

12.7 Les systèmes d'étoiles doubles avec des cadavres stellaires

17. L'intensité lumineuse d'une naine blanche devient 10 000 fois plus grande quand elle devient une nova. De combien la magnitude change-t-elle lors de l'explosion ?
18. Sachant que l'énergie émise lors d'une nova est de 10^{38} J et que la fusion de l'hydrogène libère $6,4 \times 10^{14}$ J par kilogramme d'hydrogène, combien d'hydrogène fusionne lors d'une explosion de nova. Donnez votre réponse en masse terrestre.
19. En juin 1918, on a pu observer une explosion de la nova V603 de la constellation de l'aigle. En juin 1926, la sphère de matière éjectée entourant la naine blanche avait un diamètre angulaire de $16''$. Avec l'effet Doppler, on a mesuré que la matière avait été éjectée avec une vitesse de 1700 km/s. À quelle distance est cette nova ?
20. Une supernova de type Ia atteint une magnitude visuelle maximale de 8,9. Quelle est la distance de la supernova ?
21. Jusqu'à quelle distance peut-on voir les supernovas de type Ia à l'œil nu ?
22. Nous allons vérifier si la fusion nucléaire peut effectivement disperser la naine blanche. Pour ce faire, l'énergie libérée par la fusion nucléaire additionnée à l'énergie potentielle gravitationnelle de la naine blanche doit donner une énergie totale positive. Pour calculer l'énergie gravitationnelle, on va supposer que la naine blanche est uniforme. Pour l'énergie nucléaire, on va fusionner du carbone en nickel selon la réaction $14 {}_6^{12}\text{C} \rightarrow 3 {}_{28}^{56}\text{Ni}$ en utilisant la table des masses atomiques à l'adresse suivante : <https://physique.merici.ca/ondes/masseatomique.pdf>
On va considérer une naine blanche de $1 M_{\odot}$ ayant un rayon de 5500 km entièrement composée de carbone 12.
- Quelle est l'énergie gravitationnelle ?
 - Quelle est l'énergie libérée par la fusion ?
 - A-t-on assez d'énergie pour disperser l'étoile ?

23. Un disque de matière est en rotation autour d'un trou noir de $25 M_{\odot}$. Quelle est la température du bord interne du disque de matière ?
24. La Terre tourne autour du Soleil. On va supposer que l'orbite est circulaire (la distance entre la Terre et le Soleil est 149 600 000 km, la masse du Soleil est $1,9885 \times 10^{30}$ kg et la masse de la Terre est $5,9722 \times 10^{24}$ kg).
- Quelle est la puissance émise sous forme d'ondes gravitationnelles par le système Terre-Soleil ?
 - Dans combien de temps la Terre va-t-elle tomber sur le Soleil suite à l'émission d'ondes gravitationnelles ?
25. Deux étoiles à neutrons tournent autour de leur centre de masse avec une période de 10 heures. La masse des étoiles est de $2 M_{\odot}$ et $3 M_{\odot}$. On va supposer que les orbites sont circulaires.
- Quelle est la distance entre les étoiles ?
 - Quelle est la puissance émise sous forme d'ondes gravitationnelles ?
 - Dans combien de temps les étoiles à neutrons vont-elles fusionner suite à l'émission d'ondes gravitationnelles ?

Défi

(Question plus difficile que les questions qu'il y aura à l'examen.)

26. Une personne est initialement au repos à une distance r_0 d'un trou noir et se laisse tomber vers le trou noir. Selon la relativité, le lien entre la position r et le temps mesuré par la personne qui tombe est

$$t = \frac{1}{2} \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_s}} (\sin \eta + \eta) \quad \text{où} \quad \eta = \arccos \left(\frac{2r}{r_0} - 1 \right)$$

On va supposer ici que la personne commence son mouvement à partir d'une distance égale à $r_0 = 1000 R_s$ et qu'elle tombe vers un trou noir ayant une masse de $5 M_{\odot}$.

- Combien faudra-t-il de temps pour que la personne arrive à $r = 50 R_s$?
- Combien faudra-t-il de temps pour que la personne passe de $r = 1 R_s$ à $r = 0 R_s$ (donc le temps entre la traversée de l'horizon et l'arrivée à la singularité) ?
- Montrez que le temps de chute total est donné par

$$t_{chute} = \frac{\pi R_s}{2 c} \left(\frac{r_0}{R_s} \right)^{3/2}$$

Le temps de chute mesuré par une personne loin du trou noir est

$$t = \frac{R_s}{c} \left(\ln \left| \frac{\xi + \tan \frac{\eta}{2}}{\xi - \tan \frac{\eta}{2}} \right| + \xi \left(\eta + \frac{r_0}{2R_s} (\sin \eta + \eta) \right) \right)$$

où $\eta = \arccos \left(\frac{2r}{r_0} - 1 \right)$ et $\xi = \sqrt{\frac{r_0}{R_s} - 1}$

- d) Combien faudra-t-il de temps pour que la personne arrive à $r = 50 R_s$?
 e) Combien faudra-t-il de temps pour que la personne arrive à $r = 1 R_s$?

RÉPONSES

12.1 Les naines blanches

1. $0,0124 R_\odot$
 2. a) $0,073 L_\odot$ b) $2,440 \times 10^6 \text{ N/kg}$ c) 102 m

12.2 Les étoiles à neutrons

3. a) $9,767 \text{ km}$ b) $1,019 \times 10^{18} \text{ kg/m}^3$ c) $0,1777 L_\odot$
 4. $4,79 \times 10^{-13} \text{ s}$

12.3 La relativité générale

5. $0,1091 \text{ mm}$
 6. a) $4,426 \times 10^{12} \text{ N/kg}$ b) $2,331 \times 10^8 \text{ m/s}$
 7. a) $715,7 \text{ nm}$ b) $1,590$
 8. a) $137\,255 \text{ km/s}$ b) $0,8142 \text{ ms}$ c) $1,091 \text{ ms}$ d) $17,718 \text{ km}$
 9. $0,915 \text{ s}$
 10. $2,21''$
 11. $1,259 \text{ an}$

12.4 Les trous noirs

12. 1474 m
 13. a) 5429 km b) 905 km c) $19,9$ fois et $15,3$ fois le rayon de Schwarzschild
 14. $17\,626 M_\odot$
 15. $1,547 \text{ ms}$

12.5 Les trous noirs en rotation

16. $13,2885 \text{ km}$ et $1,4765 \text{ km}$

12.7 Les systèmes d'étoiles doubles avec des cadavres stellaires

- 17. Elle baisse de 10
- 18. 2,6 % de la masse de la Terre
- 19. 1170 al
- 20. 16,3 Mal
- 21. 4,3 Mal
- 22. a) $-2,879 \times 10^{43} \text{ J}$ b) $1,846 \times 10^{44} \text{ J}$ c) Oui
- 23. 1 590 541 K
- 24. a) 196,3 W b) $1,069 \times 10^{23} \text{ ans}$
- 25. a) $2,7929 \times 10^9 \text{ m}$ b) $1,727 \times 10^{24} \text{ W}$ d) 1,30 milliard d'années

Défi

- 26. a) 2,433 s b) 32,8 ms d) 2,436 s e) ∞