Formule du champ gravitationnel d'un ellipsoïde et formule de l'aplatissement

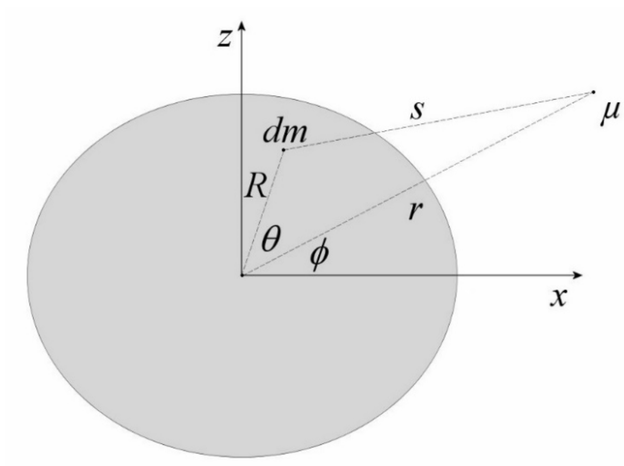
La surface de la Terre est une surface où l'énergie potentielle de l'eau est toujours la même, peu importe sa position à la surface de la Terre. Si ce n'était pas le cas, l'eau se déplacerait pour aller aux endroits où l'énergie est plus basse, ce qui remplirait les endroits où l'énergie est plus basse.

Ici, on va travailler avec l'énergie potentielle apparente, qui se calcule avec le poids apparent.

Le problème, c'est qu'il faut l'énergie potentielle gravitationnelle d'un ellipsoïde pour trouver l'énergie potentielle apparente. Commençons par trouver cette énergie potentielle.

Énergie gravitationnelle d'un ellipsoïde

Trouvons l'énergie gravitationnelle d'une petite masse μ près d'un ellipsoïde.



Puisque l'ellipsoïde est symétrique autour de l'axe de rotation, on peut orienter les axes x et y comme on veut (z est dans la direction de l'axe de rotation de l'ellipsoïde). Pour simplifier, on va placer la masse μ dans le plan xz. La masse μ peut être n'importe où dans ce plan. L'angle ϕ nous indique l'angle de la direction de la masse μ par rapport à l'axe des x.

L'énergie gravitationnelle de la masse μ faite par la masse dm est

$$dU_g = -G\frac{\mu dm}{s}$$

(Sur l'image, la masse dm est dans le plan xz, mais il y a des masses dm en dehors de ce plan.)

Puisque

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$$

On a

$$\begin{aligned} dU_g &= -G\frac{\mu dm}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}} \\ &= -\frac{G\mu}{r}\left(1 + \frac{R^2}{r^2} - \frac{2R}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} dm \end{aligned}$$

On va faire utiliser une série de Taylor

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + \ldots$$

et garder uniquement les termes jusqu'à x^2.

$$\begin{aligned}
dU_g &= -\frac{G\mu}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{2R}{r}\cos\theta\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{2R}{r}\cos\theta\right)^2 + \ldots\right)dm \\
&= -\frac{G\mu}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{2R}{r}\cos\theta\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{2R}{r}\cos\theta\right)^2 + \ldots\right)dm \\
&= -\frac{G\mu}{r}\left(1 - \frac{R^2}{2r^2} + \frac{R}{r}\cos\theta + \frac{3R^2}{2r^2}\cos^2\theta + \ldots\right)dm \\
&= -\frac{G\mu}{r}\left(1 + \frac{R}{r}\cos\theta + \frac{R^2}{2r^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \ldots\right)dm
\end{aligned}$$

(Les grands mathématiciens reconnaitront peut-être que c'est une expansion en polynômes de Legendre de cos θ qui sont 1, cos θ, ½(3cos²θ – 1),…)

L'énergie est donc

$$\begin{aligned}
U_g &= -\frac{G\mu}{r}\int\left(1 + \frac{R}{r}\cos\theta + \frac{R^2}{2r^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \ldots\right)dm \\
&= -\frac{G\mu}{r}\left(\int dm + \int\frac{R}{r}\cos\theta dm + \int\frac{R^2}{2r^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)dm + \ldots\right) \\
&= -\frac{G\mu}{r}\left(\int dm + \frac{1}{r}\int R\cos\theta dm - \frac{1}{2r^2}\int R^2 dm + \frac{3}{2r^2}\int R^2\cos^2\theta dm + \ldots\right)
\end{aligned}$$

On a 4 intégrales à faire.

Première intégrale $\int dm$

Cette intégrale est la somme des masses de l'ellipsoïde. Cette somme est évidemment la masse de l'ellipsoïde *M*.

$$\int dm = M$$

Deuxième intégrale $\frac{1}{r}\int R\cos\theta dm$

L'angle θ est l'angle entre le vecteur allant du centre à la masse μ et le vecteur allant du centre à la masse *dm*. Pour trouver le cosinus de cet angle, on va faire le produit scalaire entre les vecteurs.

Les composantes du vecteur allant du centre de l'ellipsoïde à la masse μ sont

$$x_\mu = r\cos\phi \qquad y_\mu = 0 \qquad z_\mu = r\sin\phi$$

Les composantes du vecteur allant du centre de l'ellipsoïde à la masse *dm* sont *x, y* et *z*. Le produit scalaire entre les vecteurs est donc (formule du produit à partir des composantes)

$$xr\cos\phi + zr\sin\phi$$

Ce produit scalaire est aussi (formule du produit avec les grandeurs des vecteurs et l'angle entre les deux vecteurs)

$$Rr\cos\theta$$

En égalant les deux produits vectoriels, on a

$$Rr\cos\theta = xr\cos\phi + zr\sin\phi$$
$$R\cos\theta = x\cos\phi + z\sin\phi$$

On a donc

$$\int R\cos\theta dm = \int \left(x\cos\phi + z\sin\phi\right) dm$$
$$= \cos\phi \int xdm + + \sin\phi \int zdm$$

Or, ces intégrales permettent de trouver le centre de masse de l'ellipse en *x* et en *y*.

$$\frac{1}{M}\int xdm = x_{cm} \qquad \frac{1}{M}\int zdm = z_{cm}$$

Comme ce centre de masse est au centre de l'ellipsoïde, ces intégrales sont nulles. On a donc

$$\int R\cos\theta dm = 0$$

Troisième intégrale $\frac{1}{2r^2}\int R^2 dm$

On va montrer qu'il y a un lien entre les 2 prochaines intégrales et le moment d'inertie de l'ellipsoïde.

Le moment d'inertie de la sphère quand l'axe est dans la direction *z* (direction de l'axe de rotation de la planète) est

$$C = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$$

Le moment d'inertie de la sphère quand l'axe est dans la direction *x* (une des directions perpendiculaires à l'axe de rotation de la planète) est

$$A = \int \left(y^2 + z^2\right) dm$$

Le moment d'inertie de la sphère quand l'axe est dans la direction x (l'autre direction perpendiculaire à l'axe de rotation de la planète) est

$$B = \int \left(x^2 + z^2 \right) dm$$

Si on additionne les moments d'inertie, on a

$$\begin{aligned} A + B + C &= \int \left(x^2 + y^2 \right) dm + \int \left(y^2 + z^2 \right) dm + \int \left(x^2 + z^2 \right) dm \\ &= \int \left(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \right) dm \\ &= \int 2R^2 dm \end{aligned}$$

Pour un ellipsoïde, A et B sont égaux. On a donc

$$\frac{1}{2}(A + B + C) = \int R^2 dm$$
$$\frac{1}{2}(2A + C) = \int R^2 dm$$

La troisième intégrale est donc

$$\frac{1}{2r^2} \int R^2 dm = \frac{1}{4r^2}(2A + C)$$

<u>*Quatrième intégrale*</u> $\frac{3}{2r^2} \int R^2 \cos^2 \theta dm$

Puisque

$$R \cos \theta = x \cos \phi + z \sin \phi$$

on a

$$\int R^2 \cos^2 \theta dm = \cos^2 \phi \int x^2 dm + \sin^2 \phi \int z^2 dm + 2 \sin \phi \cos \phi \int xz dm$$

Il y a 3 parties à cette intégrale.

La 1re partie est

$$\begin{aligned} \int x^2 dm &= \int \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) dm - \int \left(y^2 + z^2 \right) dm \\ &= \int R^2 dm - \int \left(y^2 + z^2 \right) dm \\ &= \frac{1}{2}(2A + C) - A \\ &= \tfrac{1}{2} C \end{aligned}$$

La 2e partie est

$$\begin{aligned}\int z^2 dm &= \int \left(x^2+y^2+z^2\right) dm - \int \left(x^2+y^2\right) dm \\ &= \int R^2 dm - \int \left(x^2+y^2\right) dm \\ &= \frac{1}{2}(2A+C) - C \\ &= A - \tfrac{1}{2}C\end{aligned}$$

La 3e partie est nulle par symétrie.

$$\int xzdm = 0$$

En effet, les 8 octants de l'ellipsoïde donnent les mêmes valeurs d'intégrales puisqu'ils ont la même forme. Toutefois, il y a 4 octants où xz est positif et 4 octants où xz est négatif.

On a donc

$$\int R^2 \cos^2 \theta dm = \cos^2 \phi \frac{1}{2} C + \sin^2 \phi \left(A - \frac{1}{2} C \right)$$

Puisque

$$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

on a

$$\begin{aligned}\int R^2 \cos^2 \theta dm &= \left(1-\sin^2 \phi\right) \frac{1}{2} C + \sin^2 \phi \left(A - \frac{1}{2} C \right) \\ &= \frac{C}{2} - \frac{C}{2} \sin^2 \phi + A \sin^2 \phi - \frac{C}{2} \sin^2 \phi \\ &= \frac{C}{2} + (A-C) \sin^2 \phi\end{aligned}$$

La 4e intégrale est donc

$$\frac{3}{2r^2} \int R^2 \cos^2 \theta dm = \frac{3}{2r^2} \left(\frac{C}{2} + (A-C) \sin^2 \phi \right)$$

L'énergie

Maintenant qu'on a toutes les valeurs des intégrales, on peut trouver l'énergie gravitationnelle. Sachant que

$$\int dm = M$$

$$\int R\cos\theta dm = 0$$

$$\frac{1}{2r^2}\int R^2 dm = \frac{1}{4r^2}(2A+C)$$

$$\frac{3}{2r^2}\int R^2\cos^2\theta dm = \frac{3}{2r^2}\left(\frac{C}{2}+(A-C)\sin^2\phi\right)$$

on arrive à

$$\begin{aligned}
U_g &= -\frac{G\mu}{r}\left(\int dm + \frac{1}{r}\int R\cos\theta dm - \frac{1}{2r^2}\int R^2 dm + \frac{3}{2r^2}\int R^2\cos^2\theta dm + \ldots\right)\\
&= -\frac{G\mu}{r}\left(M + 0 - \frac{1}{4r^2}(2A+C) + \frac{3}{2r^2}\left(\frac{C}{2}+(A-C)\sin^2\phi\right)+\ldots\right)\\
&= -\frac{G\mu M}{r} + \frac{G\mu}{2r^3}\left(\left(A+\frac{1}{2}C\right) - 3\left(\frac{C}{2}+(A-C)\sin^2\phi\right)\right)+\ldots\\
&= -\frac{G\mu M}{r} + \frac{G\mu}{2r^3}\left(A+\frac{1}{2}C-\frac{3C}{2}-3(A-C)\sin^2\phi\right)+\ldots\\
&= -\frac{G\mu M}{r} + \frac{G\mu}{2r^3}\left(A-C-3(A-C)\sin^2\phi\right)+\ldots\\
&= -\frac{G\mu M}{r} + \frac{G\mu(A-C)}{2r^3}\left(1-3\sin^2\phi\right)+\ldots\\
&= -\frac{G\mu M}{r} + \frac{G\mu(C-A)}{2r^3}\left(3\sin^2\phi-1\right)+\ldots
\end{aligned}$$

On utilise souvent J_2 qui est

$$J_2 = \frac{C-A}{Ma^2}$$

où a est le rayon équatorial de la planète. On a alors

$$\begin{aligned}
U_g &= -\frac{G\mu M}{r} + \frac{G\mu Ma^2 J_2}{2r^3}\left(3\sin^2\phi-1\right)+\ldots\\
&= -\frac{G\mu M}{r}\left(1-\frac{a^2 J_2}{2r^2}\left(3\sin^2\phi-1\right)+\ldots\right)
\end{aligned}$$

Énergie potentielle apparente

On va maintenant trouver l'éne4gie potentielle apparente qui tient compte de la rotation de la planète. Le poids apparent est différent du poids parce que la Terre tourne sur elle-même, ce qui signifie que les objets à la surface accélèrent.

Le poids apparent d'un objet de masse μ qui suit la rotation de la Terre est

$$\vec{P}_{app} = \vec{P} - \mu\vec{a}$$

Puisque l'accélération est $a = -\omega^2 x\vec{i}$, on a

$$\vec{P}_{app} = \vec{P} + \mu\omega^2 x\vec{i}$$

Ce poids apparent peut être obtenu à partir de l'énergie potentielle suivante.

$$\begin{aligned} U_{app} &= U_g - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 \\ &= U_g - \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 \cos^2\phi \end{aligned}$$

L'énergie potentielle apparente est donc

$$U_{app} = -\frac{G\mu M}{r} + \frac{G\mu M a^2 J_2}{2r^3}\left(3\sin^2\phi - 1\right) - \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 \cos^2\phi$$

L'aplatissement

La surface de la Terre a une énergie potentielle constante. L'énergie potentielle à l'équateur doit donc être égale à l'énergie potentielle aux pôles.

À l'équateur ($\phi = 0°$, $r = a$), l'énergie est

$$\begin{aligned} U_{0°} &= -\frac{G\mu M}{a} + \frac{G\mu M a^2 J_2}{2a^3}\left(3\sin^2 0° - 1\right) - \frac{1}{2}\mu\omega^2 a^2 \cos^2 0° \\ &= -\frac{G\mu M}{a} - \frac{G\mu M J_2}{2a} - \frac{1}{2}\mu\omega^2 a^2 \end{aligned}$$

Aux pôles ($\phi = 90°$, $r = b$), l'énergie est

$$\begin{aligned} U_{90°} &= -\frac{G\mu M}{b} + \frac{G\mu M a^2 J_2}{2b^3}\left(3\sin^2 90° - 1\right) - \frac{1}{2}\mu\omega^2 b^2 \cos^2 90° \\ &= -\frac{G\mu M}{b} + \frac{G\mu M a^2 J_2}{b^3} \end{aligned}$$

Comme les 2 énergies doivent être égale, on a

$$\begin{aligned} -\frac{G\mu M}{a} - \frac{G\mu M J_2}{2a} - \frac{1}{2}\mu\omega^2 a^2 &= -\frac{G\mu M}{b} + \frac{G\mu M a^2 J_2}{b^3} \\ -\frac{1}{a} - \frac{J_2}{2a} - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^3}{GM} &= -\frac{1}{b} + \frac{a^2 J_2}{b^3} \end{aligned}$$

$$1+\frac{J_2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2a^3}{GM}=\frac{a}{b}-\frac{a^3J_2}{b^3}$$

Puisque l'aplatissement est

$$f=\frac{a-b}{a}$$

on a

$$\begin{aligned} af &= a-b \\ b &= a-af \\ b &= a(1-f) \end{aligned}$$

L'équation devient alors

$$1+\frac{J_2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2a^3}{GM}=\frac{a}{a(1-f)}-\frac{a^3J_2}{a^3(1-f)^3}$$

$$1+\frac{J_2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2a^3}{GM}=\frac{1}{1-f}-\frac{J_2}{(1-f)^3}$$

Comme f est petit (c'est ce qu'on suppose ici), on a

$$\frac{1}{1-f}\approx 1+f \qquad \frac{1}{(1-f)^3}\approx 1+3f$$

On a alors

$$1+\frac{J_2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2a^3}{GM}=1+f-J_2(1+3f)$$

$$\frac{J_2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2a^3}{GM}=f-J_2-3J_2f$$

$$\frac{3J_2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2a^3}{GM}=f-3J_2f$$

Comme J_2 est aussi petit, J_2f est beaucoup plus petit que f. On peut donc négliger le dernier terme pour arriver à

$$\frac{3J_2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2a^3}{GM}=f$$

C'est une formule qui permet de calculer l'aplatissement en tenant compte de la rotation et du changement de gravitation causé par la déformation. Voyons ce qu'on obtient pour la Terre. Pour la Terre on a

$$GM = 3{,}9860044 \times 10^{14}\ \tfrac{Nm^2}{kg}$$
$$a = 6\,378\,137 m$$
$$J_2 = 0{,}0010826265$$

Selon cette formule, l'aplatissement de la Terre est

$$\begin{aligned}
f &= \frac{3J_2}{2} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^3}{GM} \\
&= \frac{3}{2}\cdot 0{,}0010826265 + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2\pi}{86164s}\right)^2 (6\,378\,137m)^3}{3{,}9860044\times 10^{14}\ \tfrac{Nm^2}{kg}} \\
&= 0{,}001624 + 0{,}001731 \\
&= 0{,}003355
\end{aligned}$$

C'est très près du véritable aplatissement qui est de 0,00334.

Ellipsoïde de densité uniforme

Pour un ellipsoïde de densité uniforme, les moments d'inertie sont

$$C = \frac{2}{5} M a^2$$
$$A = \frac{1}{2} M \left(a^2 + b^2\right)$$

où *a* est le rayon équatorial et *b* est le rayon polaire de la planète. (Preuve plus loin.) Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
C - A &= \frac{2}{5} M a^2 - \frac{1}{5} M \left(a^2 + b^2\right) \\
&= \frac{1}{5} M \left(a^2 - b^2\right)
\end{aligned}$$

La valeur de J_2 est donc

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{C - A}{Ma^2} \\
&= \frac{a^2 - b^2}{5a^2}
\end{aligned}$$

Puisque

$$b = a(1 - f)$$

on a

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \frac{a^2 - a^2 (1-f)^2}{5a^2} \\
&= \frac{a^2 - a^2 (1-2f)}{5a^2} \\
&= \frac{1-(1-2f)}{5} \\
&= \frac{2f}{5}
\end{aligned}
$$

La formule de l'aplatissement devient alors

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{3J_2}{2} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^3}{GM} \\
f &= \frac{3}{5} f + \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^3}{GM} \\
\frac{2}{5} f &= \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a^3}{GM} \\
f &= \frac{5}{4}\frac{\omega^2 a^3}{GM}
\end{aligned}
$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{5}{4}\frac{\omega^2 a^3}{GM} \\
&= \frac{5}{4}\frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3}{G\frac{4}{3}\pi a^3 \rho} \\
&= \frac{15}{4}\frac{\pi}{G\rho T^2}
\end{aligned}
$$

Moment d'inertie d'un ellipsoïde

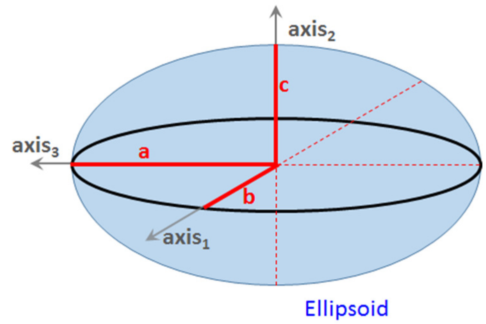
Il reste à démontrer que les moments d'inertie sont donnés par

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{2}{5} M a^2 \\
A &= \frac{1}{2} M \left(a^2 + b^2\right)
\end{aligned}
$$

Pour bien suivre cette intégrale en 3 dimensions, il est nécessaire d'avoir fait un cours de calcul avancé

On va même trouver le moment d'inertie d'un ellipsoïde qui a 3 axes différents *a, b* et *c*. Le moment est

$$I_z = \iiint \rho\left(x^2 + y^2\right) dxdydz$$
$$= \rho \iiint \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$$



www.vcalc.com/wiki/MichaelBartmess/Moment+of+Inertia+-+Ellipsoid+%28axis_1+or+axis_2%29

Il faut intégrer sur tout le volume de l'ellipsoïde. Avec un tel ellipsoïde, les bornes sont un peu compliquées. On va donc faire les changements de variables suivants pour simplifier.

$$u = \frac{x}{a} \qquad v = \frac{y}{b} \qquad w = \frac{z}{c}$$

On a alors

$$I_z = \rho \iiint \left(a^2u^2 + b^2v^2\right)|J|\, dudvdw$$

Le jacobien de la transformation de variable est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Le déterminant du jacobien est

$$|J| = abc$$

L'intégrale est maintenant

$$I_z = \rho \iiint \left(a^2u^2 + b^2v^2\right) abcdudvdw$$
$$= \rho abc \iiint \left(a^2u^2 + b^2v^2\right) dudvdw$$

Avec ces changements de variables, le volume d'intégration est maintenant une sphère de rayon 1 dans l'espace *uvw*. On va utiliser les coordonnées sphériques pour la calculer. Ces coordonnées sont

$$u = r\cos\theta\sin\phi$$
$$v = r\sin\theta\sin\phi$$
$$w = r\cos\phi$$

L'intégrale devient alors

$$
\begin{aligned}
I_z &= \rho abc\iiint\left(a^2r^2\cos^2\theta\sin^2\phi+b^2r^2\sin^2\theta\sin^2\phi\right)r^2\sin\phi d\phi d\theta dr\\
&= \rho abc\iiint\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)r^4\sin^3\phi d\phi d\theta dr
\end{aligned}
$$

La première intégrale donne

$$
\begin{aligned}
I_z &= \rho abc\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)r^4\sin^3\phi d\phi d\theta dr\\
&= \rho abc\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)r^4\int_0^{\pi}\sin^3\phi d\phi d\theta dr\\
&= \rho abc\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)r^4\left[-\cos\phi+\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi} d\theta dr\\
&= \rho abc\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)r^4\left[\left(-\cos\pi+\frac{\cos^3\pi}{3}\right)-\left(-\cos 0+\frac{\cos^3 0}{3}\right)\right]d\theta dr\\
&= \rho abc\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)r^4\left[\left(1+\frac{-1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]d\theta dr\\
&= \rho abc\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)r^4\left[\frac{4}{3}\right]d\theta dr\\
&= \frac{4}{3}\rho abc\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)r^4 d\theta dr
\end{aligned}
$$

La 2^{e} intégrale donne

$$
\begin{aligned}
I_z &= \frac{4}{3}\rho abc\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)r^4 d\theta dr\\
&= \frac{4}{3}\rho abc\int_0^1 r^4\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\right)d\theta dr\\
&= \frac{4}{3}\rho abc\int_0^1 r^4\left[a^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)+b^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\right]_0^{2\pi} dr\\
&= \frac{4}{3}\rho abc\int_0^1 r^4\left[\left(a^2\left(\frac{2\pi}{2}+0\right)+b^2\left(\frac{2\pi}{2}-0\right)\right)-\left(a^2(0)+b^2(0)-\right)\right]dr\\
&= \frac{4}{3}\rho abc\int_0^1 r^4\left[\left(a^2\pi+b^2\pi\right)\right]dr\\
&= \frac{4}{3}\rho abc\pi\left(a^2+b^2\right)\int_0^1 r^4 dr
\end{aligned}
$$

La troisième intégrale donne

$$
\begin{aligned}
I_z &= \frac{4}{3}\rho abc\pi\left(a^2+b^2\right)\int_0^1 r^4 dr \\
&= \frac{4}{3}\rho abc\pi\left(a^2+b^2\right)\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{3}\rho abc\pi\left(a^2+b^2\right)\left[\frac{1}{5}-0\right] \\
&= \frac{4}{3}\rho abc\pi\left(a^2+b^2\right)\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

Comme le volume de l'ellipsoïde est

$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

on a

$$
\begin{aligned}
I_z &= \rho\left(\frac{4}{3}abc\pi\right)\left(a^2+b^2\right)\frac{1}{5} \\
&= \rho V\left(a^2+b^2\right)\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

Finalement, puisque la masse est

$$M = \rho V$$

On arrive à

$$I_z = M\left(a^2+b^2\right)\frac{1}{5}$$

C'est le moment d'inertie qu'on a utilisé précédemment.