Solutionnaire du chapitre 8

1. a) L'angle de premier minimum est

$$a\sin\theta = \lambda$$
$$0,01\times 10^{-3} m \sin\theta = 500\times 10^{-9} m$$
$$\theta = 2,866°$$

La position sur l'écran est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan 2,866° = \frac{y}{200cm}$$
$$y = 10,0cm$$

b) L'angle de deuxième minimum est

$$a\sin\theta = 2\lambda$$
$$0,01\times 10^{-3} m \sin\theta = 2\cdot 500\times 10^{-9} m$$
$$\theta = 5,74°$$

La position sur l'écran est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan 5,74° = \frac{y}{200cm}$$
$$y = 20,1cm$$

2. Si le maximum central a une largeur de 4 cm, c'est que la distance entre le premier minimum et le centre du maximum central est de 2 cm. On a donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{2cm}{500cm}$$
$$\theta = 0,2292°$$

On a donc

$$\begin{aligned} a\sin\theta &= \lambda \\ a\sin 0,2292° &= 560\times 10^{-9}m \\ a &= 0,14mm \end{aligned}$$

3. Si le maximum central a une largeur de 50 cm, c'est que la distance entre le premier minimum et le centre du maximum central est de 25 cm. On a donc

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{L} \\ \tan\theta &= \frac{25cm}{160cm} \\ \theta &= 8,88° \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} a\sin\theta &= 2\lambda \\ 0,01m\sin 8,88° &= \lambda \\ \lambda &= 1,544mm \end{aligned}$$

4. À 0,5 cm du centre du maximum central, l'angle est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{L} \\ \tan\theta &= \frac{0,5cm}{200cm} \\ \theta &= 0,1432° \end{aligned}$$

La valeur de α est donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi \\ &= \frac{0,1\times 10^{-3}m\cdot\sin 0,1432°}{600\times 10^{-9}m}2\pi \\ &= 2,618rad \end{aligned}$$

L'intensité est donc

$$I = I_0\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2$$
$$= I_0\left(\frac{\sin(1,309)}{(1,309)}\right)^2$$
$$= 0,5445 I_0$$

5. Si le maximum central a une largeur de 4 cm, c'est que la distance entre le premier minimum et le centre du maximum central est de 2 cm. On a donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{2cm}{300cm}$$
$$\theta = 0,382°$$

On a donc

$$a\sin\theta = \lambda$$
$$a\sin 0,382° = 450\times10^{-9}m$$
$$a = 6,75\times10^{-5}m$$

Avec la nouvelle longueur d'onde, on a

$$a\sin\theta = \lambda$$
$$6,75\times10^{-5}m\sin\theta = 650\times10^{-9}m$$
$$\theta = 0,5517°$$

La position du premier minimum sur l'écran est alors

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan 0,5517° = \frac{y}{300cm}$$
$$y = 2,889cm$$

La largeur du maximum central est donc deux fois plus grande, donc 5,778 cm.

6. Si le maximum central a une largeur de 10 cm, c'est que la distance entre le premier minimum et le centre du maximum central est de 5 cm. On a donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{5cm}{400cm}$$
$$\theta = 0,716°$$

On a donc

$$\frac{\lambda}{a} = \sin\theta$$
$$= \sin 0,716°$$
$$= 0,0125$$

Au deuxième minimum, on a

$$a\sin\theta = 2\lambda$$
$$\sin\theta = 2\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin\theta = 2\cdot 0,0125$$
$$\sin\theta = 0,02499$$
$$\theta = 1,432°$$

La position du deuxième minimum sur l'écran est alors

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan 1,432° = \frac{y}{400cm}$$
$$y = 10,002cm$$

La distance entre le deuxième minimum et le premier minimum est donc

$$\Delta y = 10,002cm - 5cm - 5,002cm$$

7. Le premier minimum à 20° nous indique que

$$a\sin 20° = \lambda$$
$$\sin 20° = \frac{\lambda}{a}$$

L'angle du deuxième minimum est donc

$$a\sin\theta = 2\lambda$$
$$\sin\theta = 2\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin\theta = 2\sin 20°$$
$$\sin\theta = 0,68404$$
$$\theta = 43,16°$$

Pour le troisième minimum, on a

$$a\sin\theta = 3\lambda$$
$$\sin\theta = 3\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin\theta = 3\sin 20°$$
$$\sin\theta = 1,026$$

Comme il n'y a pas de solution, il n'y a pas de troisième minimum.

8. a) On a

$$\frac{d}{a} = \frac{0,2mm}{0,04mm} = 5$$

Ce qui signifie que $m_d = 4$. Le nombre de maximums est donc 2 x 4 + 1 = 9.

b) à 3 cm du centre du maximum central, l'angle est

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{3cm}{240cm}$$
$$\theta = 0,7162°$$

La valeur de $\Delta\phi$ est donc

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{d\sin\theta}{\lambda}2\pi \\ &= \frac{0,2\times 10^{-3}m\cdot\sin 0,7162^\circ}{600\times 10^{-9}m}2\pi \\ &= 26,178rad\end{aligned}$$

La valeur de α est

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi \\ &= \frac{0,04\times 10^{-3}m\cdot\sin 0,7162^\circ}{600\times 10^{-9}m}2\pi \\ &= 5,236rad\end{aligned}$$

L'intensité est donc

$$\begin{aligned}I_{tot} &= 4I_0\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2\cos^2\frac{\Delta\phi}{2} \\ &= 4I_0\left(\frac{\sin\left(\frac{5,236}{2}\right)}{\left(\frac{5,236}{2}\right)}\right)^2\cos^2\frac{26,178}{2} \\ &= 0,1097I_0\end{aligned}$$

c) L'angle du premier maximum d'interférence est

$$\begin{aligned}d\sin\theta &= \lambda \\ \sin\theta &= \frac{\lambda}{d}\end{aligned}$$

La valeur de $\Delta\phi$ est donc

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{d\sin\theta}{\lambda}2\pi \\ &= \frac{d\,\frac{\lambda}{d}}{\lambda}2\pi \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

La valeur de α est

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi \\ &= \frac{a\frac{\lambda}{d}}{\lambda}2\pi \\ &= \frac{a}{d}2\pi \\ &= \frac{0,04mm}{0,2mm}2\pi \\ &= \frac{2\pi}{5}\end{aligned}$$

L'intensité est donc

$$\begin{aligned}I_{tot} &= 4I_0\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2\cos^2\frac{\Delta\phi}{2} \\ &= 4I_0\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right)^2\cos^2\frac{2\pi}{2} \\ &= 3,5I_0\end{aligned}$$

Comme le maximum central a une intensité de 4 I_0, le rapport des intensités est

$$rapport = \frac{3,5I_0}{4I_0} = 0,875$$

L'intensité est donc 87,5% de l'intensité du maximum central d'interférence.

9. a) On remarque que le maximum d'interférence d'ordre 8 est tout près de y = 5 cm. (On peut prendre n'importe quel autre maximum ou minimum). À cette position, l'angle est

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{y}{L} \\ \tan\theta &= \frac{5cm}{200cm} \\ \theta &= 1,432°\end{aligned}$$

Pour le maximum d'ordre 8, on a

$$d\sin\theta = 8\lambda$$
$$d\sin 1,432° = 8\cdot 650\times 10^{-9}m$$
$$d = 2,0806\times 10^{-4}m = 0,20806mm$$

Comme c'est un peu approximatif, on va dire 0,2 mm.

b) On remarque que le minimum d'ordre 1 est tout près de y = 3,2 cm. (On peut prendre n'importe quel autre minimum). À cette position, l'angle est

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{3,2cm}{200cm}$$
$$\theta = 0,9167°$$

Pour le minimum d'ordre 1, on a

$$a\sin\theta = \lambda$$
$$a\sin 0,9167° = 650\times 10^{-9}m$$
$$a = 4,063\times 10^{-5}m = 0,04063mm$$

Comme c'est un peu approximatif, on va dire 0,04 mm.

10. L'angle de premier minimum est

$$\sin\theta = 1,22\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin\theta = 1,22\frac{560\times 10^{-9}m}{0,1\times 10^{-3}m}$$
$$\theta = 0,39145°$$

La distance entre le centre de la tache de diffraction et le premier minimum sur l'écran est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan 0,3914° = \frac{y}{200cm}$$
$$y = 1,366cm$$

11. Si le diamètre du maximum central est de 6 mm, c'est qu'il y a 3 mm entre le centre du maximum central et le premier minimum. On a donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{0,3cm}{180cm}$$
$$\theta = 0,0955°$$

On a donc

$$\sin\theta = 1,22\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin 0,0955° = 1,22\frac{620\times10^{-9}m}{a}$$
$$a = 4,538\times10^{-4}m = 0,4538mm$$

12. Selon le principe de Babinet, la figure de diffraction obtenue avec un cheveu est identique à celle qu'on obtient avec une fente. La largeur du cheveu est la même que celle de la fente qui fait la même figure de diffraction. On va donc traiter ce problème comme un problème de fente.

L'angle du premier minimum est

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{0,065m}{9,67m}$$
$$\theta = 0,3851°$$

On trouve alors la largeur du cheveu avec

$$a\sin\theta = \lambda$$
$$a\sin 0,3851° = 523\times10^{-9}m$$
$$a = 7,78\times10^{-5}m$$
$$a = 77,8\mu m$$

13. L'angle critique est

$$\sin\theta_c = 1,22\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin\theta_c = 1,22\frac{550\times10^{-9}m/1,33}{3\times10^{-3}m}$$
$$\theta_c = 0,009635°$$

La distance est donc

$$\theta_c(rad) = \frac{d}{L}$$
$$1,6817\times10^{-4}rad = \frac{0,02m}{L}$$
$$L = 118,9m$$

14. L'angle critique est

$$\sin\theta_c = 1,22\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin\theta_c = 1,22\frac{550\times10^{-9}m}{0,25m}$$
$$\theta_c = 1,538\times10^{-4}\,°$$

On a donc

$$\theta_c(rad) = \frac{d}{L}$$
$$2,684\times10^{-6}rad = \frac{d}{200\,000m}$$
$$d = 0,5368m$$

15. L'angle est

$$\begin{aligned}\theta_c(rad) &= \frac{d}{L}\\ &= \frac{8\times10^{7}km}{4,73\times10^{13}km}\\ &= 1,691\times10^{-6}rad\end{aligned}$$

On a donc

$$\sin\theta_c = 1,22\frac{\lambda}{a}$$

$$\sin 1,691\times 10^{-4} rad = 1,22\frac{550\times 10^{-9} m}{a}$$

$$a = 0,3967m$$

16. L'intensité est

$$I = I_0\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

À un maximum (ou un minimum), on doit avoir $dI/d\alpha = 0$. Ainsi, on doit avoir

$$\frac{dI}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(I_0\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right) = 0$$

$$I_0 2\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}}\right)\left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{2}}{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right) = 0$$

Il y a deux possibilités pour que cette dérivée soit nulle. Première possibilité : le premier terme entre parenthèses est nul.

$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}} = 0$$

La solution de cette équation est

$$\frac{\alpha}{2} = M\pi$$

où M = 1, 2, 3,,,. On reconnait cette solution : elle correspond au minimum d'intensité.

Deuxième possibilité : le deuxième terme entre parenthèses est nul.

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{2}}{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = 0$$

La solution mène à

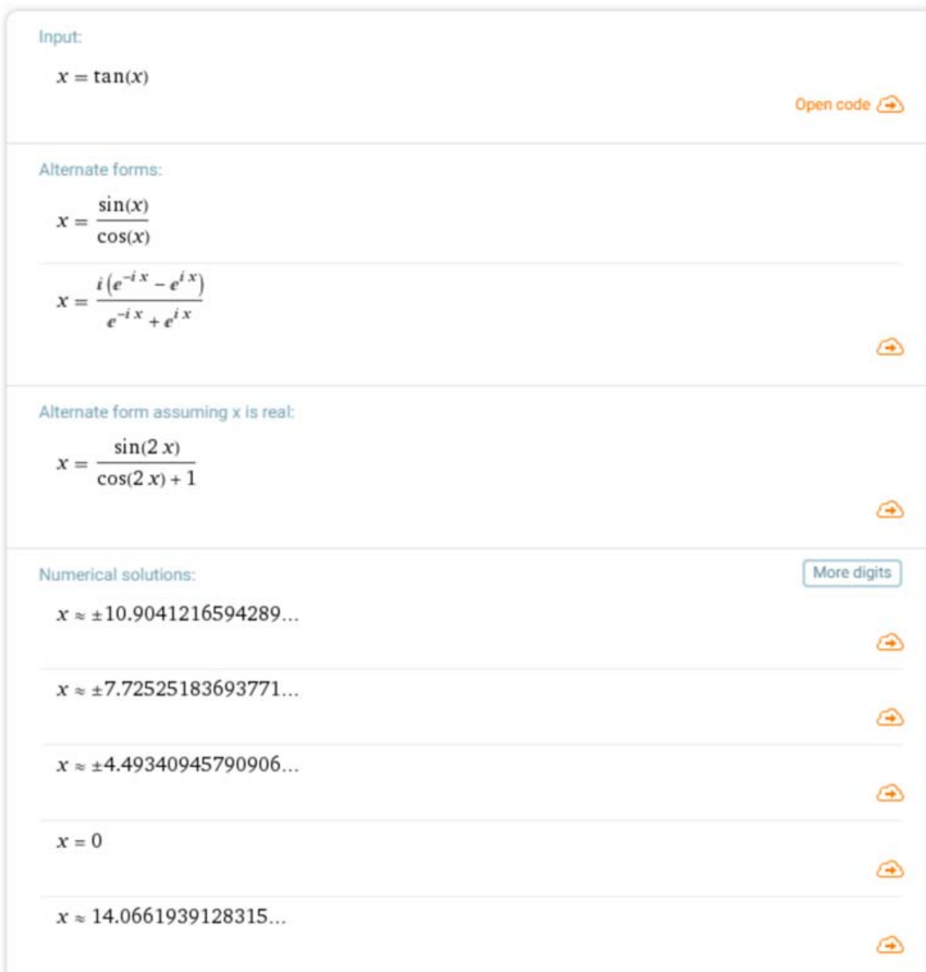
$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Cette équation n'est pas facile à résoudre. On peut, entre autres, la résoudre avec un logiciel comme Maple ou le site donné.

Voici la solution selon le site.



Input:

$x = \tan(x)$

Open code

Alternate forms:

$x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$x = \frac{i\left(e^{-ix} - e^{ix}\right)}{e^{-ix} + e^{ix}}$

Alternate form assuming x is real:

$x = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x) + 1}$

Numerical solutions:

More digits

$x \approx \pm 10.9041216594289\ldots$

$x \approx \pm 7.72525183693771\ldots$

$x \approx \pm 4.49340945790906\ldots$

$x = 0$

$x \approx 14.0661939128315\ldots$

Le premier maximum est donc à x = 4,49341. (L'approximation dans laquelle le maximum est exactement entre les minimums donnait 4,7124) On a alors

$$\frac{\alpha}{2} = 4,49341$$
$$\alpha = 8,98682$$

Puisque

$$\alpha = \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi$$

on arrive à

$$\frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi = 8,98682$$
$$\frac{0,1\times 10^{-3}\ \mathrm{m}\sin\theta}{600\times 10^{-9}m}2\pi = 8,98682$$
$$\sin\theta = 0,00858178$$
$$\theta = 0,4917°$$

La distance est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan 0,4917° = \frac{y}{2m}$$
$$y = 0,01716m$$
$$y = 1,716cm$$