Solutionnaire du chapitre 4

1. Le temps est

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}\\ &= \frac{1,496\times 10^{11}m}{299\ 792\ 458\frac{m}{s}}\\ &= 499s\\ &= 8\min 19s\end{aligned}$$

2. La distance est

$$\begin{aligned}\Delta x &= v\Delta t\\ &= 299\ 792\ 458\tfrac{m}{s}\cdot\left(365,25\cdot 24\cdot 60\cdot 60s\right)\\ &= 9,46\times 10^{15}m\end{aligned}$$

3. La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{substance}} &= \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n}\\ &= \frac{500nm}{1,33}\\ &= 375,9nm\end{aligned}$$

4. On trouve l'indice de réfraction avec

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{substance}} &= \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n}\\ 480nm &= \frac{600nm}{n}\\ n &= 1,25\end{aligned}$$

La vitesse de la lumière est donc

$$\begin{aligned} v &= \frac{c}{n} \\ &= \frac{299\,792\,458 \frac{m}{s}}{1,25} \\ &= 2,4 \times 10^8 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

5. On trouve l'amplitude de l'onde incidente avec la formule suivante.

$$\begin{aligned} I &= \frac{cn\varepsilon_0 E_0^2}{2} \\ 5 \frac{W}{m^2} &= \frac{3\times 10^8 \frac{m}{s} \cdot 1 \cdot 8,854\times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} E_0^2}{2} \\ E_0 &= 61,36 \frac{N}{C} \end{aligned}$$

Ainsi, les amplitudes des ondes réfléchie et transmise sont

$$\begin{aligned} E_{0R} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0 \\ &= \frac{1-1,33}{1+1,33} \cdot 61,36 \frac{N}{C} \\ &= -8,690 \frac{N}{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{0T} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_0 \\ &= \frac{2\cdot 1}{1+1,33} \cdot 61,36 \frac{N}{C} \\ &= 52,67 \frac{N}{C} \end{aligned}$$

Cela signifie que les intensités des ondes transmise et réfléchie sont

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{cn\varepsilon_0 E_{0R}^2}{2} \\ &= \frac{3\times10^8 \frac{m}{s}\cdot 1\cdot 8,854\times10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}\cdot\left(-8,690\frac{N}{C}\right)^2}{2} \\ &= 0,100\frac{W}{m^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{cn\varepsilon_0 E_{0T}^2}{2} \\ &= \frac{3\times10^8 \frac{m}{s}\cdot 1,33\cdot 8,854\times10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}\cdot\left(52,67\frac{N}{C}\right)^2}{2} \\ &= 4,900\frac{W}{m^2} \end{aligned}$$

Donc 98% de l'énergie est transmise.

6. La longueur d'onde est

$$\begin{aligned} c &= \lambda f \\ 3\times10^8 \tfrac{m}{s} &= \lambda\cdot 10^{15}Hz \\ \lambda &= 3\times10^{-7}m = 300nm \end{aligned}$$

Ce qui est une longueur d'onde correspondant aux ultraviolets.

7. a) La fréquence de l'onde est

$$\begin{aligned} c &= \lambda f \\ 3\times10^8 \tfrac{m}{s} &= \left(585\times10^{-9}m\right) f \\ f &= 5,128\times10^{14}Hz \end{aligned}$$

La fréquence reçue par l'observateur est

$$\begin{aligned} f' &= f\,\frac{c-v_0}{c-v_s} \\ &= \left(5,128\times10^{14}Hz\right)\cdot\frac{3\times10^8\frac{m}{s}-0\frac{m}{s}}{3\times10^8\frac{m}{s}-3\times10^7\frac{m}{s}} \\ &= 5,698\times10^{14}Hz \end{aligned}$$

Cette fréquence correspond normalement à la longueur d'onde

$$c = \lambda f$$
$$3\times10^{8}\tfrac{m}{s} = \lambda\cdot\left(5,698\times10^{14}Hz\right)$$
$$\lambda = 526,5nm$$

Ce qui correspond à de la lumière verte bleutée.

b) la fréquence reçue par l'observateur est

$$\begin{aligned} f' &= f\,\frac{c-v_0}{c-v_s} \\ &= \left(5,128\times10^{14}Hz\right)\cdot\frac{3\times10^{8}\tfrac{m}{s}-0\tfrac{m}{s}}{3\times10^{8}\tfrac{m}{s}+3\times10^{7}\tfrac{m}{s}} \\ &= 4,662\times10^{14}Hz \end{aligned}$$

Cette fréquence correspond normalement à la longueur d'onde

$$c = \lambda f$$
$$3\times10^{8}\tfrac{m}{s} = \lambda\cdot\left(4,662\times10^{14}Hz\right)$$
$$\lambda = 643,5nm$$

Ce qui correspond à de la lumière rouge.

8. La fréquence émise est

$$c = \lambda f$$
$$3\times10^{8}\tfrac{m}{s} = \left(600\times10^{-9}m\right)f$$
$$f = 5\times10^{14}Hz$$

La fréquence reçue est

$$c = \lambda f'$$
$$3\times10^{8}\tfrac{m}{s} = \left(470\times10^{-9}m\right)f'$$
$$f' = 6,383\times10^{14}Hz$$

On a donc

$$f' = f\frac{c - v_0}{c - v_s}$$

$$6,383\times 10^{14}Hx = \left(5\times 10^{14}Hz\right)\cdot\frac{3\times 10^8\,\frac{m}{s} - v_0}{3\times 10^8\,\frac{m}{s} - 0\,\frac{m}{s}}$$

$$v_0 = -8,3\times 10^7\,\tfrac{m}{s}$$

Le signe négatif indique qu'on doit se diriger vers la source. La vitesse d'approche est de 8,3 x 10^7 m/s.

9. On trouve la vitesse avec

$$\begin{aligned} v_{auto} &= \frac{c\Delta f}{2f} \\ &= \frac{3\times 10^8\,\frac{m}{s}\times 6000Hz}{2\times 25\times 10^9\,Hz} \\ &= 36\,\tfrac{m}{s} \\ &= 129,6\,\tfrac{km}{h} \end{aligned}$$

10. On va commencer par trouver les pourcentages réfléchie et transmis à chaque surface.

Quand la lumière arrive de l'air au verre, les amplitudes transmise et réfléchie sont

$$\begin{aligned} E_{0R} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}E_0 \\ &= \frac{1 - 1,5}{1 + 1,5}\cdot E_0 \\ &= -0,2E_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{0T} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2}E_0 \\ &= \frac{2\cdot 1}{1 + 1,5}\cdot E_0 \\ &= 0,8E_0 \end{aligned}$$

Cela signifie que les intensités des ondes transmise et réfléchie par rapport à l'intensité de l'onde initiale sont

$$\begin{aligned}
\frac{I_R}{I_0} &= \frac{\left(\frac{cn_1\varepsilon_0 E_{0R}^2}{2}\right)}{\left(\frac{cn_1\varepsilon_0 E_0^2}{2}\right)} \\
&= \frac{E_{0R}^2}{E_0^2} \\
&= \frac{\left(0,2E_0\right)^2}{E_0^2} \\
&= \left(0,2\right)^2 \\
&= 0,04
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_T &= \frac{\left(\frac{cn_2\varepsilon_0 E_{0T}^2}{2}\right)}{\left(\frac{cn_1\varepsilon_0 E_0^2}{2}\right)} \\
&= \frac{n_2 E_{0T}^2}{n_1 E_0^2} \\
&= \frac{n_2\left(0,8E_0\right)^2}{n_1 E_0^2} \\
&= \frac{n_2\left(0,8\right)^2}{n_1} \\
&= \frac{1,5\left(0,8\right)^2}{1} \\
&= 0,96
\end{aligned}$$

Donc 96% de l'énergie entre dans le verre.

Une fois à l'intérieur, la lumière arrive à l'interface verre air. À cet interface, les amplitudes des ondes réfléchie et transmise sont

$$E_{0R} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0$$
$$= \frac{1,5 - 1}{1 + 1,5} \cdot E_0$$
$$= 0,2E_0$$

$$E_{0T} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_0$$
$$= \frac{2 \cdot 1,5}{1 + 1,5} \cdot E_0$$
$$= 1,2E_0$$

Cela signifie que les intensités des ondes transmise et réfléchie par rapport à l'intensité de l'onde initiale sont

$$\frac{I_R}{I_0} = \frac{\left(\frac{cn_2\varepsilon_0 E_{0R}^2}{2}\right)}{\left(\frac{cn_2\varepsilon_0 E_0^2}{2}\right)}$$
$$= \frac{E_{0R}^2}{E_0^2}$$
$$= \frac{\left(0,2E_0\right)^2}{E_0^2}$$
$$= \left(0,2\right)^2$$
$$= 0,04$$

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{\left(\frac{cn_1\varepsilon_0 E_{0T}^2}{2}\right)}{\left(\frac{cn_2\varepsilon_0 E_0^2}{2}\right)} \\ &= \frac{n_1 E_{0T}^2}{n_2 E_0^2} \\ &= \frac{n_1 \left(1,2E_0\right)^2}{n_2 E_0^2} \\ &= \frac{n_1 \left(1,2\right)^2}{n_2} \\ &= \frac{1\left(1,2\right)^2}{1,5} \\ &= 0,96 \end{aligned}$$

On peut maintenant trouver l'intensité de la lumière transmise.

Pas de réflexion

Dans ce cas, la lumière traverse directement les deux surfaces. Le pourcentage transmis est

$$0,96 \times 0,96 = 0,9216 = 92,16\%$$

1 aller-retour

Dans ce cas, la lumière entre dans le verre, se réfléchit 2 fois et sort du verre. Le pourcentage de lumière pour ce trajet est

$$0,96 \times 0,04 \times 0,04 \times 0,96 = 0,96^2 \times 0,04^2$$

2 aller-retours

Dans ce cas, la lumière entre dans le verre, se réfléchit 4 fois et sort du verre. Le pourcentage de lumière pour ce trajet est

$$0,96 \times 0,04 \times 0,04 \times 0,04 \times 0,04 \times 0,96 = 0,96^2 \times 0,04^4$$

3 aller-retours

Dans ce cas, la lumière entre dans le verre, se réfléchit 6 fois puis sort du verre. Le pourcentage de lumière pour ce trajet est

$$0{,}96^2 \times 0{,}04^6$$

Et ainsi de suite…

Si on fait la somme de toutes ces intensités, on trouve

$$\begin{aligned} I_{tot} &= (0{,}96)^2 + (0{,}96)^2 (0{,}04)^2 + (0{,}96)^2 (0{,}04)^4 + (0{,}96)^2 (0{,}04)^6 + ... \\ &= (0{,}96)^2 \left(1 + 0{,}0016 + 0{,}0016^2 + 0{,}0016^3 + ...\right) \end{aligned}$$

Ce genre de somme est une série géométrique. On peut la calculer directement ou on peut prendre une formule qui donne la somme. Trouvons cette formule. Si on a une série géométrique

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$$

On peut écrire

$$\begin{gathered} Sr = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... \\ Sr = S - a \\ S - Sr = a \\ S(1 - r) = a \\ S = \frac{a}{1 - r} \end{gathered}$$

Donc, notre somme ici est

$$\begin{aligned} I_{tot} &= (0{,}96)^2 \frac{1}{1 - 0{,}0016} \\ &= 0{,}9231 \end{aligned}$$

92,31 % de la lumière est donc transmise. Il y a donc 7,69% de la lumière qui est réfléchie. Voyons si c'est ce qu'on a.

Lumière directement réfléchie

Dans ce cas, la lumière se réfléchie sur la 1re surface. Le pourcentage réfléchie est

$$0{,}04$$

1 aller-retour

Dans ce cas, la lumière entre dans le verre, se réfléchit et sort du verre. Le pourcentage de lumière pour ce trajet est

$$0,96 \times 0,04 \times 0,96 = 0,96^2 \times 0,04$$

2 aller-retours

Dans ce cas, la lumière entre dans le verre, se réfléchit 3 fois sort du verre. Le pourcentage de lumière pour ce trajet est

$$0,96 \times 0,04 \times 0,04 \times 0,04 \times 0,96 = 0,96^2 \times 0,04^3$$

3 aller-retours

Dans ce cas, la lumière entre dans le verre, se réfléchit 5 fois et sort du verre. Le pourcentage de lumière pour ce trajet est

$$0,96^2 \times 0,04^5$$

Et ainsi de suite.

Si on fait la somme de toutes ces intensités, on trouve

$$\begin{aligned} I_{tot} &= 0,04 + (0,96)^2 (0,04)^1 + (0,96)^2 (0,04)^3 + (0,96)^2 (0,04)^5 + ... \\ &= 0,04 + (0,96)^2 (0,04)\left(1 + 0,0016 + 0,0016^2 + 0,0016^3 + ...\right) \end{aligned}$$

La somme de la suite géométrique est

$$\begin{aligned} S &= (0,96)^2 \cdot 0,04 \frac{1}{1 - 0,0016} \\ &= 0,03692 \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} I_{tot} &= 0,04 + 0,0369 \\ &= 0,07692 \end{aligned}$$

qui est le résultat prévu.