

Solutionnaire du chapitre 1

1. a) L'amplitude est de 20 cm.
b) La période est

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{5s^{-1}} \\ &= 1,257s\end{aligned}$$

- c) La constante de phase est $\pi/4$.
d) La vitesse maximale est

$$\begin{aligned}v_{\max} &= A\omega \\ &= 0,2m \cdot 5s^{-1} \\ &= 1 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

- e) La solution est

$$x = 0,2m \cos\left(5 \frac{rad}{s} t - \frac{\pi}{4}\right)$$

(La constante de phase avec le cosinus est $\pi/2$ plus basse que celle avec le sinus.)

2. a) L'amplitude est 5 cm.
b) La période est 2,5 s.
c) Ce graphique est celui d'un sinus décalé vers la gauche de 0,4 s (approximativement). La constante de phase est donc

$$\begin{aligned}\phi &= \omega\Delta t \\ &= \frac{2\pi}{T} \Delta t \\ &= \frac{2\pi}{2,5s} \cdot 0,4s \\ &= 1,0053rad\end{aligned}$$

Comme c'est approximatif, on pourrait dire que le déphasage est d'environ 1 rad.

3. a) La position à $t = 1$ s est

$$\begin{aligned} x &= 0,25m \sin\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 0,25m \sin\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1s + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= -0,05212m \end{aligned}$$

b) Pour trouver la vitesse, dérivons pour obtenir la formule de la vitesse

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d\left(0,25m \sin\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{3\pi}{4}\right)\right)}{dt} \\ &= 0,25m \cdot 10s^{-1} \cos\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 2,5 \frac{m}{s} \cos\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

La vitesse à $t = 1$ s est donc

$$\begin{aligned} v &= 2,5 \frac{m}{s} \cos\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1s + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 2,445 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

c) Pour trouver l'accélération, dérivons pour obtenir la formule de l'accélération

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{d\left(2,5 \frac{m}{s} \cdot \cos\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{3\pi}{4}\right)\right)}{dt} \\ &= -2,5 \frac{m}{s} \cdot 10s^{-1} \sin\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= -25 \frac{m}{s^2} \sin\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

L'accélération à $t = 1$ s est donc

$$\begin{aligned} a &= -25 \frac{m}{s^2} \sin\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1s + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 5,216 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

4. La vitesse maximale est

$$v_{\max} = A\omega$$

On peut trouver ω avec la fréquence d'oscillation.

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f \\ &= 2\pi \cdot 5\text{Hz} \\ &= 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

On trouve ensuite l'amplitude avec l'accélération maximale.

$$\begin{aligned}a_{\max} &= A\omega^2 \\ 12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} &= A(10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2 \\ A &= 0,01216\text{m}\end{aligned}$$

La vitesse maximale est donc

$$\begin{aligned}v_{\max} &= A\omega \\ &= 0,01216\text{m} \cdot 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ &= 0,382 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

5. a) On a

$$\begin{aligned}v_{\max} &= A\omega \\ a_{\max} &= A\omega^2\end{aligned}$$

Qui nous donne les deux équations suivantes.

$$\begin{aligned}32 \frac{\text{m}}{\text{s}} &= A\omega \\ 128 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} &= A\omega^2\end{aligned}$$

qu'on doit résoudre.

On pourrait isoler une variable dans une équation et remplacer dans l'autre, mais on peut plus facilement résoudre en divisant les équations.

$$\frac{A\omega^2}{A\omega} = \frac{128 \frac{m}{s^2}}{32 \frac{m}{s}}$$

$$\omega = 4 \frac{rad}{s}$$

La période est donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4 \frac{rad}{s}} = 1,571s$$

b) On peut trouver ensuite l'amplitude.

$$32 \frac{m}{s} = A\omega$$

$$32 \frac{m}{s} = A \cdot 4 \frac{rad}{s}$$

$$A = 8m$$

6. Trouvons premièrement la valeur de ω .

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{2\pi}{8s}$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{rad}{s}$$

Trouvons ensuite l'amplitude.

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

$$= (0,1m)^2 + \left(\frac{0,24 \frac{m}{s}}{\frac{\pi}{4} \frac{rad}{s}}\right)^2$$

$$= 0,10338m^2$$

$$A = 0,3215m$$

Finalement, trouvons la constante de phase.

$$\begin{aligned}\tan(\omega t + \phi) &= \frac{x\omega}{v} \\ \tan(0 + \phi) &= \frac{0,1m \cdot \frac{\pi}{4} \frac{rad}{s}}{0,24 \frac{m}{s}} \\ \tan(\phi) &= \frac{5\pi}{48} \\ \phi &= 0,3163rad\end{aligned}$$

L'équation du mouvement est donc

$$x = 0,3215m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{rad}{s} \cdot t + 0,3163\right)$$

7. Trouvons premièrement la valeur de ω .

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2\pi}{8s} \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{rad}{s}\end{aligned}$$

Trouvons ensuite l'amplitude.

$$\begin{aligned}A^2 &= x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \\ &= (-0,2m)^2 + \left(\frac{0 \frac{m}{s}}{\frac{\pi}{4} \frac{rad}{s}}\right)^2 \\ &= 0,04m^2 \\ A &= 0,2m\end{aligned}$$

Finalement, trouvons la constante de phase

$$\begin{aligned}\tan(\omega t + \phi) &= \frac{x\omega}{v} \\ \tan(0 + \phi) &= \frac{-0,2m \cdot \frac{\pi}{4} \frac{rad}{s}}{0 \frac{m}{s}} \\ \tan(\phi) &= -\infty \\ \phi &= -\frac{\pi}{2} rad\end{aligned}$$

L'équation du mouvement est donc

$$x = 0,2m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

8. a) Trouvons premièrement la valeur de ω avec

$$\begin{aligned} a &= -\omega^2 x \\ -24 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} &= -\omega^2 \cdot 0,06\text{m} \\ \omega^2 &= 400 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \\ \omega &= 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \\ &= 0,31416\text{s} \end{aligned}$$

b) L'amplitude est

$$\begin{aligned} A^2 &= x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \\ &= (0,06\text{m})^2 + \left(\frac{-1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}\right)^2 \\ &= 0,0061\text{m}^2 \\ A &= 0,0781\text{m} \end{aligned}$$

9. a) On trouve la vitesse avec

$$\begin{aligned} A^2 &= x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \\ (0,25\text{m})^2 &= (0,15\text{m})^2 + \left(\frac{v}{10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}\right)^2 \\ v &= \pm 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

b) On trouve l'accélération avec

$$\begin{aligned} a &= -\omega^2 x \\ &= -(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2 \cdot 0,15\text{m} \\ &= -15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

10. a) On trouve le moment où l'objet est à $x = 12$ cm avec

$$\begin{aligned} 0,12\text{m} &= 0,2\text{m} \sin\left(5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{\pi}{4}\right) \\ 0,6 &= \sin\left(5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{\pi}{4}\right) \\ 0,6435 &= 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{\pi}{4} & \text{et} & \quad 2,4981 = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \frac{\pi}{4} \\ -0,1419 &= 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t & \text{et} & \quad 1,713 = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t \\ t &= -0,02838\text{s} & \text{et} & \quad t = 0,3425\text{s} \end{aligned}$$

On peut ensuite ajouter (ou enlever) la période à chacune de ces réponses pour obtenir tous les moments où l'objet est à $x = 12$ cm. La période est

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \\ &= 1,2566\text{s} \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{array}{rcl} t = -0,02838\text{s} & & t = 0,3425\text{s} \\ & \downarrow +1,2566\text{s} & \\ t = 1,228\text{s} & & t = 1,5991\text{s} \\ & \downarrow +1,2566\text{s} & \\ t = 2,485\text{s} & & t = 2,856\text{s} \\ & \downarrow +1,2566\text{s} & \\ t = 3,742\text{s} & & t = 4,112\text{s} \end{array}$$

Le premier instant est donc $t = 0,3425$ s.

b) La formule de la vitesse est

$$\begin{aligned}
 v &= A\omega \cos(\omega t + \phi) \\
 &= 0,2m \cdot 5 \frac{\text{rad}}{s} \cos\left(5 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= 1 \frac{m}{s} \cos\left(5 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

On trouve le moment où la vitesse est de $-0,6 \text{ m/s}$ avec

$$\begin{aligned}
 -0,6 \frac{m}{s} &= 1 \frac{m}{s} \cos\left(5 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{4}\right) \\
 -0,6 &= \cos\left(5 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{4}\right) \\
 2,2143 &= 5 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{4} & \text{et} & \quad -2,2143 = 5 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{4} \\
 1,4289 &= 5 \frac{\text{rad}}{s} t & \text{et} & \quad -2,9997 = 5 \frac{\text{rad}}{s} t \\
 t &= 0,2858s & \text{et} & \quad t = -0,5999s
 \end{aligned}$$

On peut ensuite ajouter (ou enlever) la période à chacune de ces réponses pour obtenir tous les moments où l'objet a une vitesse de $v = -0,6 \text{ m/s}$. On a alors

$$\begin{array}{rcl}
 t = 0,2858s & & t = -0,5999s \\
 & \downarrow +1,2566s & \\
 t = 1,542s & & t = 0,6567s \\
 & \downarrow +1,2566s & \\
 t = 2,799s & & t = 1,913s \\
 & \downarrow +1,2566s & \\
 t = 4,056s & & t = 3,170s
 \end{array}$$

Le premier instant est donc $t = 0,2858 \text{ s}$.

11. On trouve le moment où l'objet est à $x = 8 \text{ cm}$ avec

$$\begin{aligned}
 0,08m &= 0,16m \sin\left(10 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{2}\right) \\
 \frac{1}{2} &= \sin\left(10 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{2}\right) \\
 \frac{\pi}{6} &= 10 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{2} & \text{et} & \quad \frac{5\pi}{6} = 10 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{2} \\
 -\frac{\pi}{3} &= 10 \frac{\text{rad}}{s} t & \text{et} & \quad \frac{\pi}{3} = 10 \frac{\text{rad}}{s} t \\
 t &= -\frac{\pi}{30} s & \text{et} & \quad t = \frac{\pi}{30} s
 \end{aligned}$$

Il n'y a qu'une seule de ces deux réponses qui est bonne, parce qu'on dit que la vitesse doit être positive. La formule de la vitesse en fonction du temps est

$$\begin{aligned} v &= A\omega \cos(\omega t + \phi) \\ &= 0,16m \cdot 10 \frac{\text{rad}}{s} \cos\left(10 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1,6 \frac{m}{s} \cos\left(10 \frac{\text{rad}}{s} t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

À $t = -\pi/30$ s, la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= 1,6 \frac{m}{s} \cos\left(10 \frac{\text{rad}}{s} \cdot -\frac{\pi}{30} s + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1,6 \frac{m}{s} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 1,3856 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

alors qu'à $t = \pi/30$ s, la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= 1,6 \frac{m}{s} \cos\left(10 \frac{\text{rad}}{s} \cdot \frac{\pi}{30} s + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1,6 \frac{m}{s} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= -1,3856 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Comme on voulait que la vitesse soit positive, c'est $t = -\pi/30$ s = -0,1047 s qui est la bonne réponse.

On peut ensuite ajouter (ou enlever) la période à cette réponse pour obtenir tous les moments où l'objet est à $x = 8$ cm et que la vitesse est positive. La période est

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{10 \frac{\text{rad}}{s}} \\ &= 0,6283s \end{aligned}$$

Les temps sont donc

$$-0,1047 \text{ s}, 0,5236 \text{ s}, 1,1519 \text{ s}, 1,7802 \text{ s}, \dots$$

Le premier instant positif est donc 0,5236 s.

12. Avec une période de 0,5 s, on a

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,5s} = 4\pi \frac{rad}{s}$$

Si l'accélération est de 32 m/s^2 à $t = 0 \text{ s}$, cela signifie que la position est

$$\begin{aligned} a &= -\omega^2 x \\ -32 \frac{m}{s^2} &= -(4\pi \frac{rad}{s})^2 x \\ x &= 0,2026m \end{aligned}$$

Si l'accélération est maximale à $t = 0$, c'est que la vitesse est nulle.

On peut donc trouver l'amplitude.

$$\begin{aligned} A^2 &= x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \\ &= (-0,2026m)^2 + \left(\frac{0 \frac{m}{s}}{4\pi \frac{rad}{s}}\right)^2 \\ A &= 0,2026m \end{aligned}$$

Finalement, trouvons la constante de phase.

$$\begin{aligned} \tan(\omega t + \phi) &= \frac{x\omega}{v} \\ \tan(0 + \phi) &= \frac{0,2026m \cdot 4\pi \frac{rad}{s}}{0 \frac{m}{s}} \\ \tan(\phi) &= \infty \\ \phi &= \frac{\pi}{2} rad \end{aligned}$$

L'équation du mouvement est donc

$$x = 0,2026m \cdot \sin\left(4\pi \frac{rad}{s} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

13. On va premièrement poser que l'objet est à $x = 0 \text{ m}$ à $t = 0 \text{ s}$ et qu'il va vers les x positifs. (En fait, on peut supposer n'importe quoi pour la position et la vitesse à $t = 0 \text{ s}$. Ici, on suppose une valeur qui rendra nos calculs plus simples.)

Avec une période de 6 s, ω est

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6s} = \frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{s}$$

La constante de phase est

$$\begin{aligned}\tan(\omega t + \phi) &= \frac{x\omega}{v} \\ \tan(0 + \phi) &= \frac{0m \cdot \frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{s}}{v} \\ \tan(\phi) &= 0 \\ \phi &= 0 \text{ rad}\end{aligned}$$

L'équation du mouvement est donc

$$x = 0,2m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{s} \cdot t\right)$$

Trouvons maintenant quand l'objet arrivera à $x = 10$ cm. On a alors

$$\begin{aligned}0,1m &= 0,2m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{s} \cdot t\right) \\ \frac{1}{2} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{s} \cdot t\right) \\ \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{s} t & \text{et} & \quad \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{s} t \\ t &= \frac{1}{2} s & \text{et} & \quad t = \frac{5}{2} s\end{aligned}$$

Il faut donc 1/2 s pour que l'objet passe de $x = 0$ m à $x = 10$ cm. (L'autre réponse correspond à l'objet qui part de $x = 0$ m, va à $x = 20$ cm et revient ensuite à $x = 10$ cm.)

Par symétrie, il faut le même temps pour passer de $x = -10$ cm à $x = 0$ m.

Il faut donc 1/2 s pour passer de $x = -10$ cm à $x = 0$ m, puis un autre 1/2 s pour passer de $x = 0$ cm à $x = 10$ m. Le temps total est donc de 1 s.

14. Trouvons premièrement ω

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{81 \frac{N}{m}}{0,25kg}} = 18 \frac{\text{rad}}{s}$$

a) L'amplitude du mouvement est

$$\begin{aligned} A^2 &= x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \\ &= (0,1m)^2 + \left(\frac{-2\frac{m}{s}}{18\frac{rad}{s}}\right)^2 \\ &= 0,022346m^2 \\ A &= 0,1495m \end{aligned}$$

b) La constante de phase est

$$\begin{aligned} \tan(\omega t + \phi) &= \frac{x\omega}{v} \\ \tan\left(18\frac{rad}{s} \cdot 1s + \phi\right) &= \frac{0,1m \cdot 18\frac{rad}{s}}{-2\frac{m}{s}} \\ 18 + \phi &= 2,4088rad \end{aligned}$$

Notez que la calculatrice donne $-0,7328$ rad, mais on doit ajouter π puisque la valeur de v est négative (ou pour une question de quadrant, selon votre façon de considérer cette question).

On a donc

$$\begin{aligned} 18 + \phi &= 2,4088rad \\ \phi &= -15,591rad \end{aligned}$$

On pourrait ajouter ou enlever des 2π à cette valeur si on voulait.

c) L'équation du mouvement est donc

$$x = 0,1495m \sin\left(18\frac{rad}{s}t - 15,591rad\right)$$

15. On a

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$10\text{Hz} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Quand on change la masse, on a

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$6\text{Hz} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m+0,1\text{kg}}}$$

On a donc 2 équations et 2 inconnues.

a) On trouve facilement m en faisant le rapport des équations.

$$\frac{10\text{Hz}}{6\text{Hz}} = \frac{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}}{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m+0,1\text{kg}}}}$$

$$\frac{5}{3} = \sqrt{\frac{m+0,1\text{kg}}{m}}$$

$$\frac{25}{9} = \frac{m+0,1\text{kg}}{m}$$

$$\frac{25}{9}m = m+0,1\text{kg}$$

$$\frac{16}{9}m = 0,1\text{kg}$$

$$m = 0,05625\text{kg}$$

b) La constante du ressort est donc

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$10\text{Hz} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{0,05625\text{kg}}}$$

$$k = 222,1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

16. La constante du ressort

$$\begin{aligned}
 mg &= ky_0 \\
 0,2kg \cdot 9,8 \frac{N}{kg} &= k \cdot 0,1m \\
 k &= 19,6 \frac{N}{m}
 \end{aligned}$$

La période d'oscillation est donc

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{0,2kg}{19,6 \frac{N}{m}}} \\
 &= 0,6347s
 \end{aligned}$$

17. a) En passant d'un côté à l'autre du mouvement, on parcourt deux fois l'amplitude (de $x = -A$ à $x = 0$, puis de $x = 0$ à $x = A$). L'amplitude est donc de 6 cm.

b) Ce mouvement est la moitié d'un cycle. 0,8 s est donc la moitié de la période et la période est donc de 1,6 s.

c) La vitesse maximale est de

$$v_{\max} = A\omega$$

On trouve ω avec la période

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,6s} = 3,927 \frac{rad}{s}$$

La vitesse maximale est donc de

$$v_{\max} = A\omega = 0,06m \cdot 3,927 \frac{rad}{s} = 0,2356 \frac{m}{s}$$

d) L'accélération maximale est

$$a_{\max} = A\omega^2 = 0,06m \cdot \left(3,927 \frac{rad}{s}\right)^2 = 0,9253 \frac{m}{s^2}$$

18. On trouve ω avec

$$v_{\max} = A\omega$$

$$4 \frac{m}{s} = 0,2m \cdot \omega$$

$$\omega = 20 \frac{\text{rad}}{s}$$

On a donc

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$20 \frac{\text{rad}}{s} = \sqrt{\frac{250 \frac{N}{m}}{m}}$$

$$400 \frac{\text{rad}^2}{s^2} = \frac{250 \frac{N}{m}}{m}$$

$$m = 0,625 \text{kg}$$

19. Puisque $F = -kx$, la pente du graphique est égale à $-k$. Cette pente est

$$\text{pente} = \frac{-8N}{0,4m}$$

$$= -20 \frac{N}{m}$$

La valeur de k est donc 20 N/m. La période du mouvement est donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{0,2 \text{kg}}{20 \frac{N}{m}}}$$

$$= 0,6283 \text{s}$$

20. La constante de phase se trouve avec

$$\tan(\omega t + \phi) = \frac{\omega x}{v}$$

Pour la trouver, il nous faut ω et v . On peut trouver ω avec la période.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$2s = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \pi \frac{\text{rad}}{s}$$

La vitesse à $t = 0$ se trouve à partir de la position à $t = 0$.

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$$

$$(-0,08m)^2 + \left(\frac{v}{\pi \frac{\text{rad}}{s}}\right)^2 = (0,12m)^2$$

$$v = \pm 0,28099 \frac{m}{s}$$

Puisqu'on dit que la vitesse est positive, on a $v = 0,28099$ m/s.

La constante de phase est donc

$$\tan(\omega t + \phi) = \frac{\omega x}{v}$$

$$\tan(0 + \phi) = \frac{\pi \frac{\text{rad}}{s} \cdot -0,08m}{0,28099 \frac{m}{s}}$$

$$\tan \phi = -0,8944$$

$$\phi = -0,7297$$

21. Sans l'eau, le ressort est allongé un peu pour soutenir la chaudière. On a alors

$$mg = ky_0$$

$$2kg \cdot 9,8 \frac{N}{kg} = ky_0$$

$$ky_0 = 19,6N$$

Quand on ajoute de l'eau, la masse augmente et l'allongement du ressort augmente de 12 cm. On a alors

$$(2kg + m_{\text{eau}})g = k(y_0 + 0,12m)$$

$$2kg \cdot 9,8 \frac{N}{kg} + m_{\text{eau}} \cdot 9,8 \frac{N}{kg} = ky_0 + k \cdot 0,12m$$

$$19,6N + m_{\text{eau}} \cdot 9,8 \frac{N}{kg} = ky_0 + k \cdot 0,12m$$

Mais puisque $ky_0 = 19.6$ N, on a

$$19,6N + m_{eau} \cdot 9,8 \frac{N}{kg} = ky_0 + k \cdot 0,12m$$

$$19,6N + m_{eau} \cdot 9,8 \frac{N}{kg} = 19,6N + k \cdot 0,12m$$

$$m_{eau} \cdot 9,8 \frac{N}{kg} = k \cdot 0,12m$$

On sait aussi que la période d'oscillation est de 2,4 s. On a donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$2,4s = 2\pi \sqrt{\frac{2kg + m_{eau}}{k}}$$

De cette équation, on isole k .

$$\frac{2,4s}{2\pi} = \sqrt{\frac{2kg + m_{eau}}{k}}$$

$$0,382s = \sqrt{\frac{2kg + m_{eau}}{k}}$$

$$0,1459s^2 = \frac{2kg + m_{eau}}{k}$$

$$k = \frac{2kg + m_{eau}}{0,1459s^2}$$

On remplace ensuite dans l'équation

$$m_{eau} \cdot 9,8 \frac{N}{kg} = k \cdot 0,12m$$

Ce qui nous donne

$$m_{eau} \cdot 9,8 \frac{N}{kg} = \frac{2kg + m_{eau}}{0,1459s^2} \cdot 0,12m$$

Puis on isole m_{eau}

$$m_{eau} \cdot 1,4298m = (2kg + m_{eau}) \cdot 0,12m$$

$$m_{eau} \cdot 1,4298m = 2kg \cdot 0,12m + m_{eau} \cdot 0,12m$$

$$m_{eau} \cdot 1,3098m = 2kg \cdot 0,12m$$

$$m_{eau} = 0,1832kg$$

22. a) L'énergie est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2} kA^2 \\ &= \frac{1}{2} 250 \frac{N}{m} (0,2m)^2 \\ &= 5J \end{aligned}$$

b) À $t = 5$ s, la position est

$$\begin{aligned} x &= 0,2m \sin\left(5 \frac{rad}{s} \cdot 5s + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 0,12146m \end{aligned}$$

L'énergie du ressort est donc

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{1}{2} kx^2 \\ &= \frac{1}{2} 250 \frac{N}{m} (0,12146m)^2 \\ &= 1,844J \end{aligned}$$

c) On peut trouver l'énergie cinétique avec

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E_k + U_R \\ 5J &= E_k + 1,844J \\ E_k &= 3,156J \end{aligned}$$

23. a) On a

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2} kA^2 \\ 30J &= \frac{1}{2} k(0,8m)^2 \\ k &= 93,75 \frac{N}{m} \end{aligned}$$

b) Avec une période de 3 s, on a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$3s = 2\pi\sqrt{\frac{m}{93,75\frac{N}{m}}}$$

$$m = 21,37kg$$

c) ω est

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{2\pi}{3s}$$

$$= 2,094\frac{rad}{s}$$

La vitesse maximale est donc

$$v_{\max} = A\omega$$

$$= 0,8m \cdot 2,094\frac{rad}{s}$$

$$= 1,6755\frac{m}{s}$$

24. a) Trouvons premièrement la constante du ressort.

$$E_{mec} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$5J = \frac{1}{2}k(0,1m)^2$$

$$k = 1000\frac{N}{m}$$

Avec la conservation de l'énergie, on a alors

$$E_{mec} = E_k + U_R$$

$$E_{mec} = E_k + \frac{1}{2}kx^2$$

$$5J = E_k + \frac{1}{2}1000\frac{N}{m}(0,06m)^2$$

$$5J = E_k + 1,8J$$

$$E_k = 3,2J$$

b) L'énergie est

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{1}{2} kx^2 \\ &= \frac{1}{2} 1000 \frac{N}{m} (0,04m)^2 \\ &= 0,8J \end{aligned}$$

25. On a

$$E_{mec} = E_k + U$$

Si $E_k = U$, on obtient

$$\begin{aligned} E_{mec} &= U + U \\ E_{mec} &= 2U \\ \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 &= 2 \cdot \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \\ A^2 &= 2 \cdot x^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} = \pm \frac{0,25m}{\sqrt{2}}$$

Trouvons maintenant quand cela se produit. Commençons par la valeur positive de x .

$$x = 0,25m \sin\left(10 \frac{rad}{s} t + \pi\right)$$

$$\frac{0,25m}{\sqrt{2}} = 0,25m \sin\left(10 \frac{rad}{s} t + \pi\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(10 \frac{rad}{s} t + \pi\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 10 \frac{rad}{s} t + \pi \quad et \quad \frac{3\pi}{4} = 10 \frac{rad}{s} t + \pi$$

$$\frac{-3\pi}{4} = 10 \frac{rad}{s} t \quad et \quad \frac{-\pi}{4} = 10 \frac{rad}{s} t$$

$$t = -0,2356s \quad et \quad t = -0,0785s$$

Ajoutons maintenant la période à ces deux réponses pour trouver des valeurs positives de t . Comme la période est

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \\ &= 0,6283\text{s} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} t = -0,2356\text{s} & & t = -0,0785\text{s} \\ & \downarrow +0,6283\text{s} & \\ t = 0,3927\text{s} & & t = 0,5498\text{s} \end{array}$$

Regardons maintenant la valeur négative de x .

$$\begin{aligned} x &= 0,25\text{m} \sin\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \pi\right) \\ -\frac{0,25\text{m}}{\sqrt{2}} &= 0,25\text{m} \sin\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \pi\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} &= \sin\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \pi\right) \\ -\frac{\pi}{4} &= 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \pi & \text{et} & \frac{5\pi}{4} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + \pi \\ \frac{-5\pi}{4} &= 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t & \text{et} & \frac{\pi}{4} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t \\ t &= -0,3927\text{s} & \text{et} & t = 0,0785\text{s} \end{aligned}$$

Ajoutons maintenant la période à la première réponse pour obtenir une valeur positive. La valeur obtenue est 0,2356 s.

Les instants sont donc, dans l'ordre : 0,0785 s, 0,2356, 0,3927, 0,5498 s.

Le premier moment est donc à $t = 0,0785$ s.

26. a) On commence avec

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

Puisque la grandeur de la vitesse est égale au quart de la vitesse maximale, on a

$$v = \frac{v_{\max}}{4}$$

$$v = \frac{A\omega}{4}$$

On a donc

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{A\omega/4}{\omega}\right)^2$$

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{A}{4}\right)^2$$

$$A^2 = x^2 + \frac{A^2}{16}$$

$$\frac{15A^2}{16} = x^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{15}{16}}A$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{15}{16}} \cdot 0,12m$$

$$x = \pm 0,1162m$$

b) On commence avec

$$E_{mec} = E_k + U_R$$

Puisqu'on dit que $E_k = \frac{1}{2}U$, on a

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}U_R + U_R \\ &= \frac{3}{2}U_R \end{aligned}$$

Cela nous donne

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$A^2 = \frac{3}{2}x^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}A$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 0,12m$$

$$x = \pm 0,09798m$$

27. a) La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{2kg}{200\frac{N}{m}}} \\ &= 0,6283s \end{aligned}$$

b) On va trouver l'amplitude avec

$$A^2 = y^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

Ce y est la position de la masse par rapport à la position d'équilibre. L'étirement du ressort à la position d'équilibre est

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{mg}{k} \\ &= \frac{2kg \cdot 9,8\frac{N}{kg}}{200\frac{N}{m}} \\ &= 0,098m \end{aligned}$$

Puisque le ressort n'est pas étiré initialement, la masse est à 9,8 cm de la position d'équilibre. Avec une vitesse initiale nulle, l'amplitude est

$$A^2 = y^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

$$A^2 = (0,098m)^2 + \left(\frac{0 \frac{m}{s}}{\omega}\right)^2$$

$$A = 0,098m$$

Solution alternative

La position initiale du bloc correspond au point le plus haut du mouvement puisque sa vitesse est nulle. Le bloc va ensuite descendre jusqu'à atteindre le point le plus bas quand la vitesse de bloc redeviendra nulle. Ce déplacement correspondra à 2 fois l'amplitude, parce que le bloc fera une fois l'amplitude jusqu'au point le plus haut jusqu'au point d'équilibre et une autre fois l'amplitude en passant de la position d'équilibre jusqu'au point le plus bas.

Trouvons le déplacement total du bloc jusqu'au point le plus bas avec la conservation de l'énergie. Le système étant formé d'un bloc et d'un ressort, l'énergie mécanique est

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (bloc immobile à son point le plus haut), l'énergie est, en plaçant le $y = 0$ à la position initiale du bloc,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}2kg \cdot (0 \frac{m}{s})^2 + 2kg \cdot 9,8 \frac{N}{kg} \cdot 0m + \frac{1}{2}200 \frac{N}{m} (0m)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ensuite, le bloc descend de la distance d , ce qui étire le ressort de cette distance. On a alors

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}2kg \cdot (0 \frac{m}{s})^2 + 2kg \cdot 9,8 \frac{N}{kg} \cdot (-d) + \frac{1}{2}200 \frac{N}{m} \cdot d^2 \\ &= -19,6N \cdot d + 100 \frac{N}{m} \cdot d^2 \end{aligned}$$

Selon la conservation de l'énergie mécanique, on obtient

$$E = E'$$

$$0J = -19,6N \cdot d + 100 \frac{N}{m} \cdot d^2$$

$$19,6N \cdot d = 100 \frac{N}{m} \cdot d^2$$

$$19,6N = 100 \frac{N}{m} \cdot d$$

$$d = 0,196m$$

L'amplitude est la moitié de cette valeur, ce qui signifie que l'amplitude est de 9,8 cm.

28. a) On trouve premièrement la fréquence angulaire avec l'énergie potentielle

$$128 \frac{N}{m} x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$128 \frac{N}{m} x^2 = \frac{1}{2} 4kg \cdot \omega^2 x^2$$

$$\omega = 8 \frac{rad}{s}$$

(On a trouvé la masse avec l'énergie potentielle qui vaut $\frac{1}{2}mv^2$.)

La période est donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{2\pi}{8 \frac{rad}{s}}$$

$$= 0,7854s$$

b) La formule nous indique que l'énergie totale est de 72 J. On a donc

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

$$72J = \frac{1}{2} 4kg v_{\max}^2$$

$$v_{\max} = 6 \frac{m}{s}$$

c) On a

$$v_{\max} = A\omega$$

$$6 \frac{m}{s} = A \cdot 8 \frac{rad}{s}$$

$$A = 0,75m$$

- 29.** Comme le pendule redevient vertical 2 fois par cycle, la période du pendule doit être de 4 s. On a donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$4s = 2\pi \sqrt{\frac{l}{9,8 \frac{N}{kg}}}$$

$$l = 3,972m$$

- 30.** Si la période est de 2 s sur Terre, alors la longueur de la corde est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$2s = 2\pi \sqrt{\frac{l}{9,8 \frac{N}{kg}}}$$

$$l = 0,9929m$$

La période sur la Lune serait donc de

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,9929m}{1,6 \frac{N}{kg}}}$$

$$T = 4,95s$$

- 31.** a) La période est

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{2m}{9,8 \frac{N}{kg}}} \\
 &= 2,838s
 \end{aligned}$$

b) La vitesse maximale est

$$v_{\max} = A\omega$$

Il faut donc trouver l'amplitude. Cette amplitude est

$$\begin{aligned}
 A &= \theta_{\max} l \\
 &= \left(10^\circ \frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ}\right) \cdot 2m \\
 &= 0,3491m
 \end{aligned}$$

Il faut ensuite trouver la fréquence angulaire.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9,8 \frac{N}{kg}}{2m}} = 2,214 \frac{\text{rad}}{s}$$

La vitesse maximale est donc

$$\begin{aligned}
 v_{\max} &= 0,3491m \cdot 2,214 \frac{\text{rad}}{s} \\
 &= 0,7727 \frac{m}{s}
 \end{aligned}$$

32. On trouve la vitesse avec

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

ω est

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,6s} = 3,927 \frac{\text{rad}}{s}$$

Pour trouver l'amplitude, il nous faudra la longueur de la corde. On trouve cette longueur avec

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$1,6s = 2\pi \sqrt{\frac{l}{9,8 \frac{N}{kg}}}$$

$$l = 0,6355m$$

L'amplitude est donc

$$A = \theta_{\max} l$$

$$= \left(20^\circ \frac{2\pi rad}{360^\circ} \right) \cdot 0,6355m$$

$$= 0,2218m$$

La position à $\theta = 12^\circ$ est

$$A = \theta_{\max} l$$

$$= \left(12^\circ \frac{2\pi rad}{360^\circ} \right) \cdot 0,6355m$$

$$= 0,1331m$$

On a donc

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega} \right)^2$$

$$(0,2218m)^2 = (0,1311m)^2 + \left(\frac{v}{3,927 \frac{rad}{s}} \right)^2$$

$$v = 0,6969 \frac{m}{s}$$

33. On trouve l'amplitude avec

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega} \right)^2$$

On sait que la vitesse est de -20 cm/s. La position est

$$\begin{aligned}
 x &= \theta l \\
 &= \left(6^\circ \frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} \right) \cdot 1,2 \text{m} \\
 &= 0,1257 \text{m}
 \end{aligned}$$

et ω est

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{1,2 \text{m}}} = 2,8577 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 A^2 &= x^2 + \left(\frac{v}{\omega} \right)^2 \\
 &= (0,1257 \text{m})^2 + \left(\frac{0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,8577 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \right)^2 \\
 &= 0,02069 \text{m}^2 \\
 A &= 0,1438 \text{m}
 \end{aligned}$$

L'amplitude angulaire est donc

$$\begin{aligned}
 A &= \theta_{\max} l \\
 0,1438 \text{m} &= \theta_{\max} \cdot 1,2 \text{m} \\
 \theta_{\max} &= 0,1199 \text{rad} \\
 \theta_{\max} &= 6,868^\circ
 \end{aligned}$$

La constante de phase est

$$\begin{aligned}
 \tan(\omega t + \phi) &= \frac{x\omega}{v} \\
 \tan(0 + \phi) &= \frac{0,1257 \text{m} \cdot 2,8577 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{-0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\
 \phi &= 2,079 \text{rad}
 \end{aligned}$$

(π a été ajouté puisque la vitesse est négative.)

L'équation est donc

$$\theta = 6,868^\circ \sin\left(2,858 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t + 2,079 \text{rad}\right)$$

34. On sait que

$$A\omega = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En prenant les formules de l'amplitude angulaire

$$A = \theta_{\max} l$$

et de ω

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

On arrive à

$$(\theta_{\max} l) \sqrt{\frac{g}{l}} = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\theta_{\max} \frac{l}{\sqrt{l}} \sqrt{g} = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\theta_{\max} \sqrt{l} \sqrt{g} = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\left(15^\circ \frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ}\right) \sqrt{l} \sqrt{9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$l = 0,536 \text{m}$$

b) La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{0,536 \text{m}}{9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}} \\ &= 1,47 \text{s} \end{aligned}$$

35. ω est

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

d est la distance entre le centre de masse et l'axe de rotation. Cette distance est égale au rayon du disque, donc à 20 cm.

Le moment d'inertie est égal à

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2}mR^2 \\ &= \frac{3}{2} \cdot 5\text{kg} \cdot (0,2\text{m})^2 \\ &= 0,3\text{kgm}^2 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{mgd}{I}} \\ &= \sqrt{\frac{5\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0,2\text{m}}{0,3\text{kgm}^2}} \\ &= 5,715 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

La période est donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,099\text{s}$$

36. ω est

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

d est la distance entre le centre de masse et l'axe de rotation. Cette distance est égale à 75 cm.

Le moment d'inertie est égal à

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{12} mL^2 + mh^2 \\
 &= \frac{1}{12} \cdot 2\text{kg} \cdot (2\text{m})^2 + 2\text{kg} \cdot (0,75\text{m})^2 \\
 &= 1,792\text{kgm}^2
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sqrt{\frac{mgd}{I}} \\
 &= \sqrt{\frac{2\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0,75\text{m}}{1,792\text{kgm}^2}} \\
 &= 2,864 \frac{\text{rad}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

La période est donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2,194\text{s}$$

37. ω est

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,335\text{s}} = 4,707 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sqrt{\frac{mgd}{I}} \\
 4,707 \frac{\text{rad}}{\text{s}} &= \sqrt{\frac{0,9\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0,43\text{m}}{I}} \\
 I &= 0,1712\text{kgm}^2
 \end{aligned}$$

38. La période d'oscillation est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Dans ce cas, le moment d'inertie est

$$I = \frac{1}{12} mL^2 + md^2$$

et la période devient

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12} mL^2 + md^2}{mgd}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\frac{1}{12} L^2 + d^2}{d}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{L^2}{12d} + d} \end{aligned}$$

Pour obtenir la période minimale, il faut que le terme dans la racine soit le plus petit possible. On doit donc trouver la valeur de d qui donne la plus petite valeur à

$$\frac{L^2}{12d} + d$$

Il y a un minimum quand la dérivée de cette fonction est nulle. On a donc

$$\begin{aligned} -\frac{L^2}{12d^2} + 1 &= 0 \\ \frac{L^2}{12d^2} &= 1 \\ L^2 &= 12d^2 \\ d &= \frac{L}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

39. Pour déterminer la période, on doit trouver la fréquence angulaire avec

$$a = -(\text{constante})x$$

Examinons premièrement l'iceberg quand il est à l'équilibre dans l'eau. Il y a alors la gravitation et la poussée d'Archimède qui agissent. On doit donc avoir

$$-mg + \rho_{\text{eau}} g V_f = 0$$

La masse de l'iceberg est égale à sa densité multipliée par son volume et le volume de la partie immergée de l'iceberg est L^2x_0 . (x_0 est la hauteur de la partie de l'iceberg qui est dans l'eau.) L'équation des forces devient donc

$$\begin{aligned} -mg + \rho_{eau} gV_f &= 0 \\ -\rho_{glace} L^3 g + \rho_{eau} gL^2 x_0 &= 0 \\ \rho_{eau} gx_0 &= \rho_{glace} Lg \end{aligned}$$

Imaginons maintenant que l'iceberg se déplace un peu vers le haut d'une distance x . La hauteur de la partie immergée devient alors $x_0 - x$, ce qui diminue la poussée d'Archimède. Alors, l'équilibre des forces est rompu et l'iceberg accélère. L'équation des forces devient alors

$$\begin{aligned} -mg + \rho_{eau} gV_f &= ma \\ -\rho_{glace} L^3 g + \rho_{eau} gL^2 (x_0 - x) &= \rho_{glace} L^3 a \\ -\rho_{glace} Lg + \rho_{eau} g(x_0 - x) &= \rho_{glace} La \\ -\rho_{glace} Lg + \rho_{eau} gx_0 - \rho_{eau} gx &= \rho_{glace} La \end{aligned}$$

Mais puisque

$$\rho_{eau} gx_0 = \rho_{glace} Lg$$

on a

$$\begin{aligned} -\cancel{\rho_{glace} Lg} + \cancel{\rho_{eau} gx_0} - \rho_{eau} gx &= \rho_{glace} La \\ -\rho_{eau} gx &= \rho_{glace} La \\ a &= -\frac{\rho_{eau}}{\rho_{glace} L} x \end{aligned}$$

C'est bien la condition qu'il faut respecter pour avoir une oscillation harmonique. On a alors

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\rho_{eau}}{\rho_{glace} L} \\ \omega^2 &= \frac{1000 \frac{kg}{m^3}}{920 \frac{kg}{m^3} \cdot 75m} \\ \omega^2 &= 0,01449 \frac{rad^2}{s^2} \\ \omega &= 0,1204 \frac{rad}{s} \end{aligned}$$

La période d'oscillation est donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{0,1204 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \\ &= 52,19 \text{ s} \end{aligned}$$