Solutionnaire du chapitre 12

1. La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6,626\times10^{-34}Js}{1,6726\times10^{-27}kg\cdot10^{4}\frac{m}{s}} \\ &= 3,96\times10^{-11}m = 0,0396nm\end{aligned}$$

2. La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma mv} \\ &= \frac{6,626\times10^{-34}Js}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\times10^{8}\frac{m}{s}}{3\times10^{8}\frac{m}{s}}\right)^2}}1,6726\times10^{-27}kg\cdot2\times10^{8}\frac{m}{s}} \\ &= 1,476\times10^{-15}m\end{aligned}$$

3. Avec une énergie cinétique de 10 eV, la vitesse de l'électron est

$$\begin{aligned}E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ 10\cdot1,602\times10^{-19}J &= \frac{1}{2}9,1094kg\cdot v^2 \\ v &= 1,875\times10^{6}\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6,626\times10^{-34}Js}{9,1094\times10^{-31}kg\cdot1,875\times10^{6}\frac{m}{s}} \\ &= 3,879\times10^{-10}m = 0,3879nm\end{aligned}$$

4. Quand l'énergie cinétique est de 6 eV, la vitesse de l'électron est

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$6\cdot 1,602\times 10^{-19}J = \frac{1}{2}9,1094\times 10^{-31}kg\cdot v^2$$
$$v = 1,453\times 10^6 \tfrac{m}{s}$$

La longueur d'onde est

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$
$$= \frac{6,626\times 10^{-34}Js}{9,1094\times 10^{-31}kg\cdot 1,453\times 10^6 \tfrac{m}{s}}$$
$$= 5,007\times 10^{-10}m = 0,5007nm$$

Quand U monte à 2 eV, l'énergie cinétique baisse à 4 eV. La vitesse de l'électron est alors

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$4\cdot 1,602\times 10^{-19}J = \frac{1}{2}9,1094kg\cdot v^2$$
$$v = 1,186\times 10^6 \tfrac{m}{s}$$

et la longueur d'onde est

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$
$$= \frac{6,626\times 10^{-34}Js}{9,1094\times 10^{-31}kg\cdot 1,186\times 10^6 \tfrac{m}{s}}$$
$$= 6,132\times 10^{-10}m = 0,6132nm$$

Le changement de longueur d'onde est alors

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda' - \lambda \\ &= 0,6132nm - 0,5007nm \\ &= 0,1125nm\end{aligned}$$

5. Avec une énergie cinétique de 2 eV, la vitesse de l'électron est

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$2 \cdot 1,602\times10^{-19}J = \frac{1}{2}9,1094kg \cdot v^2$$
$$v = 8,3877\times10^5 \tfrac{m}{s}$$

La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6,626\times10^{-34}Js}{9,1094\times10^{-31}kg \cdot 8,3877\times10^5 \frac{m}{s}} \\ &= 8,672\times10^{-10}m = 0,8672nm\end{aligned}$$

Sur la figure, on cherche la distance entre les maximums d'ordre 2. L'angle entre ce maximum et le maximum central est donné par

$$d\sin\theta = m\lambda$$
$$0,1\times10^{-6}m\sin\theta = 2\cdot 8,672\times10^{-10}m$$
$$\theta = 0,9938°$$

La distance entre le maximum central et le maximum d'ordre 2 est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan 0,9938° = \frac{y}{300cm}$$
$$y = 5,204cm$$

La distance entre les deux maximums d'ordre 2 est deux fois plus grande. Elle vaut donc 10,408 cm.

6. a) L'énergie du premier niveau est

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$
$$E_1 = \frac{1^2 h^2}{8mL^2}$$
$$= \frac{\left(6,626\times 10^{-34} Js\right)^2}{8\cdot 1,6749\times 10^{-27} kg\cdot\left(10^{-14} m\right)^2}$$
$$= 3,276\times 10^{-13} J$$
$$= 2,045 MeV$$

L'énergie du deuxième niveau est

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$
$$E_2 = \frac{2^2 h^2}{8mL^2}$$
$$= 4\cdot\frac{h^2}{8mL^2}$$
$$= 4\cdot E_1$$
$$= 4\cdot 2,045 MeV$$
$$= 8,181 MeV$$

b) En passant du niveau 2 au niveau 1, la baisse d'énergie du neutron est

$$\Delta E = E_1 - E_2$$
$$= 2,045 MeV - 8,181 MeV$$
$$= -6,136 MeV$$

Puisque le neutron perd 6,136 MeV, c'est parce qu'il a émis un photon de 6,136 MeV. La longueur d'onde de ce photon est

$$E = \frac{1240 eV\cdot nm}{\lambda}$$
$$6,136\times 10^{6} eV = \frac{1240 eV\cdot nm}{\lambda}$$
$$\lambda = 2,021\times 10^{-4} nm$$

c) Au niveau 1, la longueur d'onde du neutron est

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{2L}{n}\\ \lambda_1 &= \frac{2L}{1}\\ &= \frac{2\cdot 10^{-14}m}{1}\\ &= 2\times 10^{-14}m\end{aligned}$$

7. On trouve la largeur avec la formule de l'énergie du 4e niveau

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{n^2h^2}{8mL^2}\\ E_4 &= \frac{4^2h^2}{8mL^2}\\ 10\cdot 1,602\times 10^{-19}J &= \frac{16\cdot\left(6,626\times 10^{-34}Js\right)^2}{8\cdot 9,1094\times 10^{-31}kg\cdot L^2}\\ L &= 7,757\times 10^{-10}m = 0,7757nm\end{aligned}$$

8. a) L'énergie du premier niveau est

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{n^2h^2}{8mL^2}\\ E_1 &= \frac{1^2h^2}{8mL^2}\\ &= \frac{\left(6,626\times 10^{-34}Js\right)^2}{8\cdot 9,1094\times 10^{-31}kg\cdot\left(2\times 10^{-9}m\right)^2}\\ &= 1,506\times 10^{-20}J\end{aligned}$$

L'énergie du quatrième niveau est

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{n^2h^2}{8mL^2} \\
E_4 &= \frac{4^2h^2}{8mL^2} \\
&= 16\cdot\frac{h^2}{8mL^2} \\
&= 16\cdot E_1 \\
&= 16\cdot 1{,}506\times10^{-20}J \\
&= 2{,}410\times10^{-19}J
\end{aligned}$$

Pour passer du niveau 1 au niveau 4, l'électron doit gagner l'énergie

$$\begin{aligned}
\Delta E &= E_4 - E_1 \\
&= 2{,}410\times10^{-19}J - 1{,}506\times10^{-20}J \\
&= 2{,}259\times10^{-19}J \\
&= 1{,}41eV
\end{aligned}$$

Il faut donc que le photon donne cette énergie. La longueur d'onde de ce photon est

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1240eV\cdot nm}{\lambda} \\
1{,}41eV &= \frac{1240eV\cdot nm}{\lambda} \\
\lambda &= 879nm
\end{aligned}$$

9. On a la plus petite vitesse quand on a la plus petite énergie. L'énergie du premier niveau est

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{n^2h^2}{8mL^2} \\
E_1 &= \frac{1^2h^2}{8mL^2} \\
&= \frac{\left(6{,}626\times10^{-34}Js\right)^2}{8\cdot 9{,}1094\times10^{-31}kg\cdot\left(6\times10^{-9}m\right)^2} \\
&= 1{,}674\times10^{-21}J
\end{aligned}$$

La vitesse de l'électron est alors

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$1,674\times10^{-21}J = \frac{1}{2}9,1094\times10^{-31}kg\cdot v^2$$
$$v = 6,062\times10^4 \tfrac{m}{s}$$

10. À partir de l'énergie du quatrième niveau, on peut trouver l'énergie de premier niveau

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$$
$$E_4 = \frac{4^2h^2}{8mL^2}$$
$$= 16\cdot\frac{h^2}{8mL^2}$$
$$= 16\cdot E_1$$

On a donc

$$E_4 = 16\cdot E_1$$
$$24eV = 16\cdot E_1$$
$$E_1 = 1,5eV$$

Ensuite, on peut trouver l'énergie du troisième niveau à partir de l'énergie du premier niveau

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$$
$$E_3 = \frac{3^2h^2}{8mL^2}$$
$$= 9\cdot\frac{h^2}{8mL^2}$$
$$= 9\cdot E_1$$
$$= 9\cdot1,5eV$$
$$= 13,5eV$$

11. Avec une période de 4 x 10-15 s, la fréquence d'oscillation est

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{4\times 10^{-15}s}=2,5\times 10^{14}Hz$$

a) La plus petite énergie est au niveau n = 0.

$$\begin{aligned}E_n&=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)hf\\E_0&=\left(0+\tfrac{1}{2}\right)hf\\&=\frac{1}{2}\cdot 6,626\times 10^{-34}Js\cdot 2,5\times 10^{14}Hz\\&=8,283\times 10^{-20}J\\&=0,517eV\end{aligned}$$

b) L'énergie du niveau n = 3 est

$$\begin{aligned}E_n&=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)hf\\E_3&=\left(3+\tfrac{1}{2}\right)hf\\&=\frac{7}{2}hf\\&=7\cdot\frac{1}{2}hf\\&=7\cdot E_0\\&=7\cdot 0,517eV\\&=3,619eV\end{aligned}$$

L'énergie du niveau n = 1 est

$$\begin{aligned}E_n&=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)hf\\E_1&=\left(1+\tfrac{1}{2}\right)hf\\&=\frac{3}{2}hf\\&=3\cdot\frac{1}{2}hf\\&=3\cdot E_0\\&=3\cdot 0,517eV\\&=1,551eV\end{aligned}$$

La perte d'énergie quand l'électron passe du niveau n = 3 au niveau n = 1 est donc

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_1 - E_3 \\ &= 1,551eV - 3,619eV \\ &= -2,068eV\end{aligned}$$

Un photon ayant une énergie de 2,068 eV est donc émis. La longueur d'onde de ce photon est

$$\begin{aligned}E &= \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda} \\ 2,068eV &= \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda} \\ \lambda &= 599,6nm\end{aligned}$$

12. L'énergie du photon est

$$\begin{aligned}E &= \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda} \\ &= \frac{1240eV \cdot nm}{496nm} \\ &= 2,5eV\end{aligned}$$

Ceci correspond à la différence d'énergie entre les niveaux 5 et 2. On a donc

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_5 - E_2 \\ &= \left(5 + \tfrac{1}{2}\right) hf - \left(2 + \tfrac{1}{2}\right) hf \\ &= 5hf + \tfrac{1}{2} hf - 2hf - \tfrac{1}{2} hf \\ &= 3hf\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Delta E &= 3hf \\ 2,5 \cdot 1,602 \times 10^{-19} J &= 3 \cdot 6,626 \times 10^{-34} Js \cdot f \\ f &= 2,015 \times 10^{14} Hz\end{aligned}$$

La période d'oscillation est donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{f} \\ &= \frac{1}{2{,}015\times10^{14}\,Hz} \\ &= 4{,}963\times10^{-15}\,s \end{aligned}$$

13. L'incertitude sur la quantité de mouvement est

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_{\max} - p_{\min} \\ &= 2{,}05\times10^{-23}\,\tfrac{kgm}{s} - 2\times10^{-23}\,\tfrac{kgm}{s} \\ &= 5\times10^{-25}\,\tfrac{kgm}{s} \end{aligned}$$

L'incertitude sur la position est donc

$$\begin{gathered} \Delta x\Delta p = h \\ \Delta x \cdot 5\times10^{-25}\,\tfrac{kgm}{s} = 6{,}626\times10^{-34}\,Js \\ \Delta x = 1{,}325\times10^{-9}\,m = 1{,}325nm \end{gathered}$$

14. L'incertitude sur l'énergie est

$$\begin{gathered} \Delta E\Delta t = h \\ \Delta E \cdot 10^{-8}\,\tfrac{kgm}{s} = 6{,}626\times10^{-34}\,Js \\ \Delta E = 6{,}626\times10^{-26}\,J = 4{,}136\times10^{-7}\,eV \end{gathered}$$

15. Dans la boite, on a une onde stationnaire qui est identique à une onde stationnaire dans une corde. L'amplitude de l'onde sera donc identique à celle d'une onde stationnaire sur une corde.

$$\psi = 2A\sin kx$$

Au niveau n = 1, la longueur d'onde est

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2L}{1} \\ &= 2L \\ &= 2\cdot 10nm \\ &= 20nm \end{aligned}$$

L'amplitude de l'onde est donc

$$\psi = 2A\sin kx$$
$$\psi = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$
$$\psi = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)$$

Premièrement, on doit avoir

$$\int\limits_{\substack{\text{toutes les}\\\text{positions possibles}}} \psi^2 dx = 1$$

Comme les seules positions possibles sont entre 0 nm et 10 nm, cette équation devient

$$\int_{0nm}^{10nm} \left(2A\sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)\right)^2 dx = 1$$

Cette intégrale nous permet de trouver la valeur de *A*.

$$\int_{0nm}^{10nm} 4A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)dx = 1$$
$$4A^2\left[\frac{x}{2}-\frac{20nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}x\right)\right]_{0nm}^{10nm} = 1$$
$$4A^2\left[\frac{10nm}{2}-\frac{20nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}10nm\right)\right]-A^2\left[\frac{0nm}{2}-\frac{10nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}0nm\right)\right]=1$$
$$4A^2\left[\frac{10nm}{2}-\frac{20nm}{8\pi}\sin(2\pi)\right]-A^2\left[0-\frac{10nm}{8\pi}\sin(0)\right]=1$$
$$4A^2\cdot 5nm = 1$$
$$A = \frac{1}{2\sqrt{5nm}}$$

L'amplitude de l'onde est donc

$$\psi = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)$$
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5nm}}\sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)$$

Ainsi, la probabilité de trouver la particule entre $x = 0$ nm et $x = 3$ nm est

$$\begin{aligned}
P &= \int_{0nm}^{3nm} \frac{1}{5nm}\sin^2\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)dx \\
&= \frac{1}{5nm}\left[\frac{x}{2}-\frac{20nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}x\right)\right]_{0nm}^{3nm} \\
&= \frac{1}{5nm}\left[\frac{3nm}{2}-\frac{20nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}3nm\right)\right]-\frac{1}{5nm}\left[\frac{0nm}{2}-\frac{20nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}0nm\right)\right] \\
&= \frac{1}{5nm}\left[\frac{3nm}{2}-\frac{20nm}{8\pi}\sin\left(0,6\pi\right)\right]-\frac{1}{5nm}\left[0-\frac{20nm}{8\pi}\sin\left(0\right)\right] \\
&= \frac{1}{5nm}\left[\frac{3nm}{2}-\frac{20nm}{8\pi}\sin\left(1,2\pi\right)\right] \\
&= \frac{3}{10}-\frac{1}{2\pi}\sin\left(0,6\pi\right) \\
&= 0,1486
\end{aligned}$$

La probabilité est donc de 14,86 %

16. L'équation de Schrödinger avec le potentiel $U=½kx^2$ est

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0$$

Vérifions si

$$\psi = Ae^{-Bx^2}$$

est une solution. Pour le vérifier, il nous faut la deuxième dérivée de cette fonction

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dx} &= Ae^{-Bx^2}\left(-2Bx\right) \\
&= 2ABxe^{-Bx^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(-2ABxe^{-Bx^2}\right)\\ &= -2ABxe^{-Bx^2}\left(-2Bx\right) + -2ABe^{-Bx^2}\\ &= 4AB^2x^2e^{-Bx^2} - 2ABe^{-Bx^2}\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0$$

$$4AB^2x^2e^{-Bx^2} - 2ABe^{-Bx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)Ae^{-Bx^2} = 0$$

$$4B^2x^2 - 2B + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right) = 2B - 4B^2x^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}E - \frac{mk}{\hbar^2}x^2 = 2B - 4B^2x^2$$

La fonction est une solution si les deux côtés sont égaux. Pour qu'ils soient égaux, il faut que les termes constants soient égaux et que les termes avec x^2 soient aussi égaux. On a donc

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = 2B \qquad \text{et} \qquad \frac{mk}{\hbar^2}x^2 = 4B^2x^2$$

La deuxième équation donne

$$\frac{mk}{\hbar^2}x^2 = 4B^2x^2$$

$$\frac{mk}{4\hbar^2} = B^2$$

Si on remplace dans la première équation, on a

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = 2B$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = 2\sqrt{\frac{mk}{4\hbar^2}}$$

$$\frac{m}{\hbar^2}E = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}$$

$$E = \frac{\sqrt{mk}}{2m}\hbar$$

$$E = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\hbar$$

Pour une oscillation harmonique, on a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &= \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}2\pi f \\ &= \frac{1}{2}hf \end{aligned}$$