

Solutionnaire du chapitre 12

1. La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}}{1,6726 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ &= 3,96 \times 10^{-11} \text{ m} = 0,0396 \text{ nm}\end{aligned}$$

2. La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma mv} \\ &= \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}}{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2}} 1,6726 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot 2 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ &= 1,476 \times 10^{-15} \text{ m}\end{aligned}$$

3. Avec une énergie cinétique de 10 eV, la vitesse de l'électron est

$$\begin{aligned}E_k &= \frac{1}{2} mv^2 \\ 10 \cdot 1,602 \times 10^{-19} \text{ J} &= \frac{1}{2} 9,1094 \text{ kg} \cdot v^2 \\ v &= 1,875 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}}{9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,875 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ &= 3,879 \times 10^{-10} \text{ m} = 0,3879 \text{ nm}\end{aligned}$$

4. Quand l'énergie cinétique est de 6 eV, la vitesse de l'électron est

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$6 \cdot 1,602 \times 10^{-19} J = \frac{1}{2} 9,1094 \times 10^{-31} kg \cdot v^2$$

$$v = 1,453 \times 10^6 \frac{m}{s}$$

La longueur d'onde est

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$$= \frac{6,626 \times 10^{-34} Js}{9,1094 \times 10^{-31} kg \cdot 1,453 \times 10^6 \frac{m}{s}}$$

$$= 5,007 \times 10^{-10} m = 0,5007 nm$$

Quand U monte à 2 eV, l'énergie cinétique baisse à 4 eV. La vitesse de l'électron est alors

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$4 \cdot 1,602 \times 10^{-19} J = \frac{1}{2} 9,1094 kg \cdot v^2$$

$$v = 1,186 \times 10^6 \frac{m}{s}$$

et la longueur d'onde est

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$$= \frac{6,626 \times 10^{-34} Js}{9,1094 \times 10^{-31} kg \cdot 1,186 \times 10^6 \frac{m}{s}}$$

$$= 6,132 \times 10^{-10} m = 0,6132 nm$$

Le changement de longueur d'onde est alors

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda' - \lambda \\ &= 0,6132\text{nm} - 0,5007\text{nm} \\ &= 0,1125\text{nm}\end{aligned}$$

5. Avec une énergie cinétique de 2 eV, la vitesse de l'électron est

$$\begin{aligned}E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ 2 \cdot 1,602 \times 10^{-19} \text{ J} &= \frac{1}{2} 9,1094 \text{ kg} \cdot v^2 \\ v &= 8,3877 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}}{9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot 8,388 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ &= 8,672 \times 10^{-10} \text{ m} = 0,8672 \text{ nm}\end{aligned}$$

Sur la figure, on cherche la distance entre les maximums d'ordre 2. L'angle entre ce maximum et le maximum central est donné par

$$\begin{aligned}d \sin \theta &= m\lambda \\ 0,1 \times 10^{-6} \text{ m} \sin \theta &= 2 \cdot 8,672 \times 10^{-10} \text{ m} \\ \theta &= 0,9938^\circ\end{aligned}$$

La distance entre le maximum central et le maximum d'ordre 2 est donc

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{y}{L} \\ \tan 0,9938^\circ &= \frac{y}{300 \text{ cm}} \\ y &= 5,204 \text{ cm}\end{aligned}$$

La distance entre les deux maximums d'ordre 2 est deux fois plus grande. Elle vaut donc 10,408 cm.

6. a) L'énergie du premier niveau est

$$\begin{aligned}
 E_n &= \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \\
 E_1 &= \frac{1^2 h^2}{8mL^2} \\
 &= \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 1,6749 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot (10^{-14} \text{ m})^2} \\
 &= 3,276 \times 10^{-13} \text{ J} \\
 &= 2,045 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

L'énergie du deuxième niveau est

$$\begin{aligned}
 E_n &= \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \\
 E_2 &= \frac{2^2 h^2}{8mL^2} \\
 &= 4 \cdot \frac{h^2}{8mL^2} \\
 &= 4 \cdot E_1 \\
 &= 4 \cdot 2,045 \text{ MeV} \\
 &= 8,181 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

b) En passant du niveau 2 au niveau 1, la baisse d'énergie du neutron est

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= E_1 - E_2 \\
 &= 2,045 \text{ MeV} - 8,181 \text{ MeV} \\
 &= -6,136 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

Puisque le neutron perd 6,136 MeV, c'est parce qu'il a émis un photon de 6,136 MeV. La longueur d'onde de ce photon est

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} \\
 6,136 \times 10^6 \text{ eV} &= \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} \\
 \lambda &= 2,021 \times 10^{-4} \text{ nm}
 \end{aligned}$$

c) Au niveau 1, la longueur d'onde du neutron est

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{2L}{n} \\ \lambda_1 &= \frac{2L}{1} \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-14} \text{ m}}{1} \\ &= 2 \times 10^{-14} \text{ m}\end{aligned}$$

7. On trouve la largeur avec la formule de l'énergie du 4^e niveau

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \\ E_4 &= \frac{4^2 h^2}{8mL^2} \\ 10 \cdot 1,602 \times 10^{-19} \text{ J} &= \frac{16 \cdot (6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot L^2} \\ L &= 7,757 \times 10^{-10} \text{ m} = 0,7757 \text{ nm}\end{aligned}$$

8. a) L'énergie du premier niveau est

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \\ E_1 &= \frac{1^2 h^2}{8mL^2} \\ &= \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot (2 \times 10^{-9} \text{ m})^2} \\ &= 1,506 \times 10^{-20} \text{ J}\end{aligned}$$

L'énergie du quatrième niveau est

$$\begin{aligned}
 E_n &= \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \\
 E_4 &= \frac{4^2 h^2}{8mL^2} \\
 &= 16 \cdot \frac{h^2}{8mL^2} \\
 &= 16 \cdot E_1 \\
 &= 16 \cdot 1,506 \times 10^{-20} \text{ J} \\
 &= 2,410 \times 10^{-19} \text{ J}
 \end{aligned}$$

Pour passer du niveau 1 au niveau 4, l'électron doit gagner l'énergie

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= E_4 - E_1 \\
 &= 2,410 \times 10^{-19} \text{ J} - 1,506 \times 10^{-20} \text{ J} \\
 &= 2,259 \times 10^{-19} \text{ J} \\
 &= 1,41 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

Il faut donc que le photon donne cette énergie. La longueur d'onde de ce photon est

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} \\
 1,41 \text{ eV} &= \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} \\
 \lambda &= 879 \text{ nm}
 \end{aligned}$$

- 9.** On a la plus petite vitesse quand on a la plus petite énergie. L'énergie du premier niveau est

$$\begin{aligned}
 E_n &= \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \\
 E_1 &= \frac{1^2 h^2}{8mL^2} \\
 &= \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot (6 \times 10^{-9} \text{ m})^2} \\
 &= 1,674 \times 10^{-21} \text{ J}
 \end{aligned}$$

La vitesse de l'électron est alors

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$1,674 \times 10^{-21} J = \frac{1}{2} 9,1094 \times 10^{-31} kg \cdot v^2$$

$$v = 6,062 \times 10^4 \frac{m}{s}$$

10. À partir de l'énergie du quatrième niveau, on peut trouver l'énergie de premier niveau

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

$$E_4 = \frac{4^2 h^2}{8mL^2}$$

$$= 16 \cdot \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$= 16 \cdot E_1$$

On a donc

$$E_4 = 16 \cdot E_1$$

$$24eV = 16 \cdot E_1$$

$$E_1 = 1,5eV$$

Ensuite, on peut trouver l'énergie du troisième niveau à partir de l'énergie du premier niveau

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

$$E_3 = \frac{4^2 h^2}{8mL^2}$$

$$= 9 \cdot \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$= 9 \cdot E_1$$

$$= 9 \cdot 1,5eV$$

$$= 13,5eV$$

11. Avec une période de 4×10^{-15} s, la fréquence d'oscillation est

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \times 10^{-15} \text{ s}} = 2,5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

a) La plus petite énergie est au niveau $n = 0$.

$$\begin{aligned} E_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) hf \\ E_0 &= \left(0 + \frac{1}{2}\right) hf \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2,5 \times 10^{14} \text{ Hz} \\ &= 8,283 \times 100 \text{ J} \\ &= 0,517 \text{ eV} \end{aligned}$$

b) L'énergie du niveau $n = 3$ est

$$\begin{aligned} E_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) hf \\ E_3 &= \left(3 + \frac{1}{2}\right) hf \\ &= \frac{7}{2} hf \\ &= 7 \cdot \frac{1}{2} hf \\ &= 7 \cdot E_0 \\ &= 7 \cdot 0,517 \text{ eV} \\ &= 3,619 \text{ eV} \end{aligned}$$

L'énergie du niveau $n = 1$ est

$$\begin{aligned} E_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) hf \\ E_1 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) hf \\ &= \frac{3}{2} hf \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} hf \\ &= 3 \cdot E_0 \\ &= 3 \cdot 0,517 \text{ eV} \\ &= 1,551 \text{ eV} \end{aligned}$$

La perte d'énergie quand l'électron passe du niveau $n = 3$ au niveau $n = 1$ est donc

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= E_1 - E_3 \\
 &= 1,551\text{eV} - 3,619\text{eV} \\
 &= -2,068\text{eV}
 \end{aligned}$$

Un photon ayant une énergie de 2,068 eV est donc émis. La longueur d'onde de ce photon est

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1240\text{eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} \\
 2,068\text{eV} &= \frac{1240\text{eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} \\
 \lambda &= 599,6\text{nm}
 \end{aligned}$$

12. L'énergie du photon est

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1240\text{eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} \\
 &= \frac{1240\text{eV} \cdot \text{nm}}{496\text{nm}} \\
 &= 2,5\text{eV}
 \end{aligned}$$

Ceci correspond à la différence d'énergie entre les niveaux 5 et 2. On a donc

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= E_5 - E_2 \\
 &= \left(5 + \frac{1}{2}\right)hf - \left(2 + \frac{1}{2}\right)hf \\
 &= 5hf + \frac{1}{2}hf - 2hf - \frac{1}{2}hf \\
 &= 3hf
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= 3hf \\
 2,5 \cdot 1,602 \times 10^{-19} \text{ J} &= 3 \cdot 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js} \cdot f \\
 f &= 2,015 \times 10^{14} \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

La période d'oscillation est donc

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{f} \\
 &= \frac{1}{2,015 \times 10^{14} \text{ Hz}} \\
 &= 4,963 \times 10^{-15} \text{ s}
 \end{aligned}$$

13. L'incertitude sur la quantité de mouvement est

$$\begin{aligned}
 \Delta p &= p_{\max} - p_{\min} \\
 &= 2,05 \times 10^{-23} \frac{\text{kgm}}{\text{s}} - 2 \times 10^{-23} \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \\
 &= 5 \times 10^{-25} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

L'incertitude sur la position est donc

$$\begin{aligned}
 \Delta x \Delta p &= h \\
 \Delta x \cdot 5 \times 10^{-25} \frac{\text{kgm}}{\text{s}} &= 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js} \\
 \Delta x &= 1,325 \times 10^{-9} \text{ m} = 1,325 \text{ nm}
 \end{aligned}$$

14. L'incertitude sur l'énergie est

$$\begin{aligned}
 \Delta E \Delta t &= h \\
 \Delta E \cdot 10^{-8} \frac{\text{kgm}}{\text{s}} &= 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js} \\
 \Delta E &= 6,626 \times 10^{-26} \text{ J} = 4,136 \times 10^{-7} \text{ eV}
 \end{aligned}$$

15. Dans la boîte, on a une onde stationnaire qui est identique à une onde stationnaire dans une corde. L'amplitude de l'onde sera donc identique à celle d'une onde stationnaire sur une corde.

$$\psi = 2A \sin kx$$

Au niveau $n = 1$, la longueur d'onde est

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{2L}{1} \\
 &= 2L \\
 &= 2 \cdot 10 \text{ nm} \\
 &= 20 \text{ nm}
 \end{aligned}$$

L'amplitude de l'onde est donc

$$\begin{aligned}\psi &= 2A \sin kx \\ \psi &= 2A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\ \psi &= 2A \sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)\end{aligned}$$

Premièrement, on doit avoir

$$\int_{\substack{\text{toutes les} \\ \text{positions possibles}}} \psi^2 dx = 1$$

Comme les seules positions possibles sont entre 0 nm et 10 nm, cette équation devient

$$\int_{0nm}^{10nm} \left(2A \sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)\right)^2 dx = 1$$

Cette intégrale nous permet de trouver la valeur de A.

$$\begin{aligned}\int_{0nm}^{10nm} 4A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right) dx &= 1 \\ 4A^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm}x\right) \right]_{0nm}^{10nm} &= 1 \\ 4A^2 \left[\frac{10nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm}10nm\right) \right] - A^2 \left[\frac{0nm}{2} - \frac{10nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm}0nm\right) \right] &= 1 \\ 4A^2 \left[\frac{10nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin(2\pi) \right] - A^2 \left[0 - \frac{10nm}{8\pi} \sin(0) \right] &= 1 \\ 4A^2 \cdot 5nm &= 1 \\ A &= \frac{1}{2\sqrt{5nm}}\end{aligned}$$

L'amplitude de l'onde est donc

$$\psi = 2A \sin\left(\frac{2\pi}{20nm} x\right)$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5nm}} \sin\left(\frac{2\pi}{20nm} x\right)$$

Ainsi, la probabilité de trouver la particule entre $x = 0$ nm et $x = 3$ nm est

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{0nm}^{3nm} \frac{1}{5nm} \sin^2\left(\frac{2\pi}{20nm} x\right) dx \\
 &= \frac{1}{5nm} \left[\frac{x}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm} x\right) \right]_{0nm}^{3nm} \\
 &= \frac{1}{5nm} \left[\frac{3nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm} 3nm\right) \right] - \frac{1}{5nm} \left[\frac{0nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm} 0nm\right) \right] \\
 &= \frac{1}{5nm} \left[\frac{3nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin(0,6\pi) \right] - \frac{1}{5nm} \left[0 - \frac{20nm}{8\pi} \sin(0) \right] \\
 &= \frac{1}{5nm} \left[\frac{3nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin(1,2\pi) \right] \\
 &= \frac{3}{10} - \frac{1}{2\pi} \sin(0,6\pi) \\
 &= 0,1486
 \end{aligned}$$

La probabilité est donc de 14,86 %

16. L'équation de Schrödinger avec le potentiel $U = \frac{1}{2}kx^2$ est

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2}kx^2 \right) \psi = 0$$

Vérifions si

$$\psi = Ae^{-Bx^2}$$

est une solution. Pour le vérifier, il nous faut la deuxième dérivée de cette fonction

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi}{dx} &= Ae^{-Bx^2} (-2Bx) \\
 &= 2ABxe^{-Bx^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(-2ABxe^{-Bx^2}) \\
 &= -2ABxe^{-Bx^2}(-2Bx) + -2ABe^{-Bx^2} \\
 &= 4AB^2x^2e^{-Bx^2} - 2ABe^{-Bx^2}
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2}kx^2 \right) \psi &= 0 \\
 4AB^2x^2e^{-Bx^2} - 2ABe^{-Bx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2}kx^2 \right) Ae^{-Bx^2} &= 0 \\
 4B^2x^2 - 2B + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2}kx^2 \right) &= 0 \\
 \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2}kx^2 \right) &= 2B - 4B^2x^2 \\
 \frac{2m}{\hbar^2} E - \frac{mk}{\hbar^2} x^2 &= 2B - 4B^2x^2
 \end{aligned}$$

La fonction est une solution si les deux côtés sont égaux. Pour qu'ils soient égaux, il faut que les termes constants soient égaux et que les termes avec x^2 soient aussi égaux. On a donc

$$\frac{2m}{\hbar^2} E = 2B \quad \text{et} \quad \frac{mk}{\hbar^2} x^2 = 4B^2x^2$$

La deuxième équation donne

$$\begin{aligned}
 \frac{mk}{\hbar^2} x^2 &= 4B^2x^2 \\
 \frac{mk}{4\hbar^2} &= B^2
 \end{aligned}$$

Si on remplace dans la première équation, on a

$$\begin{aligned}\frac{2m}{\hbar^2} E &= 2B \\ \frac{2m}{\hbar^2} E &= 2\sqrt{\frac{mk}{4\hbar^2}} \\ \frac{m}{\hbar^2} E &= \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} \\ E &= \frac{\sqrt{mk}}{2m} \hbar \\ E &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \hbar\end{aligned}$$

Pour une oscillation harmonique, on a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2} \hbar \omega \\ &= \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} 2\pi f \\ &= \frac{1}{2} hf\end{aligned}$$