Solutionnaire du chapitre 10

1. a) La durée du voyage est

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{11,4al}{0,8c} = \frac{11,4a \cdot c}{0,8c} = 14,25a$$

b) La durée du voyage se trouve avec la formule de dilatation du temps. C'est Adolf qui a le temps propre (Δt_0) puisque c'est lui qui est présent aux deux événements.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$14,25a = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}}$$

$$14,25a = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(0,8)^2}}$$

$$\Delta t_0 = 8,55a$$

2. On va séparer le mouvement en deux étapes à vitesse constante : l'aller et le retour.

Pendant l'aller, le temps selon l'horloge sur Terre est

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{9\times10^{10}m}{0,6\cdot 3\times10^{8}\frac{m}{s}} = 500s$$

C'est l'horloge qui se déplace qui mesure le temps propre. On a donc

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$500s = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{(0,6c)^2}{c^2}}}$$

$$500s = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(0,6)^2}}$$

$$\Delta t_0 = 400s$$

Pendant le retour, l'horloge en mouvement fait encore 90 millions de km à 0,6*c*. Le temps selon les observateurs sur Terre est

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{9\times 10^{10} m}{0,6\cdot 3\times 10^{8} \frac{m}{s}} = 500s$$

C'est encore l'horloge qui se déplace qui mesure le temps propre. On a donc

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$500s = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{(0,6c)^2}{c^2}}}$$

$$500s = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(0,6)^2}}$$

$$\Delta t_0 = 400s$$

L'horloge sur Terre a donc avancé de 1000 s et l'horloge en mouvement a avancé de 800 s. L'horloge en mouvement est donc en retard de 200 s = 3 min 20 s.

3. Trouvons la durée du voyage d'Auguste. Pour un observateur sur Terre, Auguste doit faire 12 al à une vitesse de 0,6*c*. La durée du voyage selon l'observateur sur Terre est

$$\Delta t = \frac{12al}{0,6c}$$

$$= \frac{12a\cdot c}{0,6c}$$

$$= 20a$$

Pour Auguste, la durée est donc

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$20a = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{(0,6c)^2}{c^2}}}$$

$$20a = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(0,6)^2}}$$

$$\Delta t_0 = 16a$$

Auguste a donc 36 ans quand il arrive sur la planète.

Examinons maintenant le voyage d'Octave. Pour un observateur sur Terre, Octave doit faire 12 al à une vitesse de 0,8c. La durée du voyage selon l'observateur sur Terre est

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{12al}{0,8c} \\ &= \frac{12a \cdot c}{0,8c} \\ &= 15a\end{aligned}$$

Pour Octave, la durée est donc

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 15a &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}} \\ 15a &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(0,8)^2}} \\ \Delta t_0 &= 9a\end{aligned}$$

Toutefois, Octave doit attendre l'arrivée de son frère. Pour les habitants de la planète (qui sont dans le même référentiel que la Terre), l'intervalle de temps entre l'arrivée des deux frères est 5 ans (20 ans pour Auguste moins 15 ans pour Octave). Octave doit donc attendre 5 ans avant que son frère arrive. Il a donc vieillit de 14 ans (9 ans pour le voyage et 5 ans d'attente) quand Auguste arrive.

L'âge d'Auguste est donc : 20 ans + 16 ans = 36 ans
L'âge d'Octave est donc : 20 ans + 14 ans = 34 ans

La journée de l'arrivée d'Auguste correspond à l'anniversaire des deux jumeaux, Octave fête ses 34 ans et Auguste fête ses 36 ans.

4. La largeur de la balle est

$$\begin{aligned}L &= L_0\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}\\ &= 7,2cm\sqrt{1-\tfrac{(0,87c)^2}{c^2}}\\ &= 7,2cm\sqrt{1-(0,87)^2}\\ &= 3,55cm\end{aligned}$$

5. a) Tom voit une règle de 100 cm qui n'a plus qu'une longueur de 80 cm.

$$\begin{aligned}L &= L_0\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}\\ 80cm &= 100cm\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}\\ 0,8 &= \sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}\\ 0,64 &= 1-\tfrac{v^2}{c^2}\\ \tfrac{v^2}{c^2} &= 0,36\\ \tfrac{v}{c} &= 0,6\\ v &= 0,6c\end{aligned}$$

b) Pour l'extraterrestre, la règle de 100 cm de Tom se déplace à 0,6*c*. La longueur de la règle est donc de

$$\begin{aligned}L &= L_0\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}\\ &= 100cm\sqrt{1-\tfrac{(0,6c)^2}{c^2}}\\ &= 80cm\end{aligned}$$

6. On a

$$L = L_0\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}$$
$$20al = 500al\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}$$
$$0,04 = \sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}$$
$$0,0016 = 1-\tfrac{v^2}{c^2}$$
$$\tfrac{v^2}{c^2} = 0,9984$$
$$\tfrac{v}{c} = 0,9992$$
$$v = 0,9992c$$

7. Le temps du voyage selon un observateur sur Terre est

$$\Delta t = \frac{L_0}{v}$$

On peut ensuite calculer le temps selon Raoul (qui mesure le temps propre) avec

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
$$\Delta t_0 = \frac{L_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Si on veut que le voyage dure 20 ans, on doit donc résoudre l'équation

$$20a = \frac{643a\cdot c}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Ce qui donne

$$20a = 643a\sqrt{\frac{c^2}{v^2}-1}$$
$$0,0311 = \sqrt{\frac{c^2}{v^2}-1}$$

$$0,00096747 = \frac{c^2}{v^2} - 1$$

$$0,00096747 + 1 = \frac{c^2}{v^2}$$

$$1,00096747 = \frac{c^2}{v^2}$$

$$1,0004836 = \frac{c}{v}$$

$$\frac{v}{c} = 0,99952$$

La vitesse doit donc être de 99,952% de la vitesse de la lumière.

8. On va appeler x la longueur des vaisseaux selon Ahmed. Puisque le vaisseau d'Itzhak est contracté, sa longueur au repos est

$$L_0 = \frac{x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

C'est la longueur du vaisseau d'Itzhak selon Itzhak.
Pour Itzhak, le vaisseau d'Ahmed, dont la longueur est x au repos, est contracté. Sa longueur est donc

$$L = x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Le rapport des longueurs selon Itzhak est donc

$$\begin{aligned}\frac{L_{Itzhak}}{L_{Ahmed}} &= \frac{x/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{1}{1-0,9^2} \\ &= 5,263\end{aligned}$$

9. a) Le temps du voyage selon un observateur sur Terre est

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = \frac{1000m}{v}$$

On peut ensuite calculer le temps dans le repère du muon (qui est le temps propre) avec

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
$$\Delta t_0 = \frac{L_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Si on veut que le voyage dure 2,2 µs dans le repère du muon, on doit donc résoudre l'équation

$$2,2\mu s = \frac{1000m}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Ce qui donne

$$2,2\mu s = 1000m\sqrt{\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}}$$
$$2,2\times 10^{-9}\,\tfrac{s}{m} = \sqrt{\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}}$$
$$4,84\times 10^{-18}\,\tfrac{s^2}{m^2} = \frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}$$
$$4,84\times 10^{-18}\,\tfrac{s^2}{m^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{v^2}$$
$$1,59511\times 10^{-17}\,\tfrac{s^2}{m^2} = \frac{1}{v^2}$$
$$v = 2,504\times 10^{8}\,\tfrac{m}{s} = 0,8346c$$

b) Dans le repère du muon, le tunnel se déplace à 0,8346*c*. Sa longueur est donc

$$\begin{aligned} L &= L_0\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} \\ &= 1000m\sqrt{1-\tfrac{(0,8346c)^2}{c^2}} \\ &= 1000m\sqrt{1-(0,8346)^2} \\ &= 550,8m \end{aligned}$$

10. a) La longueur du train est

$$\begin{aligned} L &= L_0\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} \\ &= 2000m\sqrt{1-\tfrac{(0,8c)^2}{c^2}} \\ &= 2000m\sqrt{1-(0,8)^2} \\ &= 1200m \end{aligned}$$

b) Selon Agathe, le train doit avancer de 1200 m. Le temps est donc

$$\Delta t_0 = \frac{d}{v} = \frac{1200m}{0,8c} = 5\times 10^{-6}s$$

Il s'agit du temps propre, car c'est Agathe qui est présente aux deux événements. Autrement dit, les deux événements sont à la même place (vis-à-vis du poteau) dans son repère. Dans le repère du train, il y a un événement à l'avant du train (démarrage des chronomètres) alors que l'autre événement (arrêt des chronomètres) est à l'arrière du train.

c) Le temps selon Juste est

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{5\times 10^{-6}s}{\sqrt{1-\tfrac{(0,8c)^2}{c^2}}} \\ &= \frac{5\times 10^{-6}s}{\sqrt{1-(0,8)^2}} \\ &= 8,333\times 10^{-6}s \end{aligned}$$

<u>*Note :*</u>

On peut aussi le trouver en se disant que, pour Juste, le poteau doit passer de l'avant du train à l'arrière du train (une distance de 2000 m puisque le train n'est pas contracté selon Juste) à la vitesse de 0,8*c*. Le temps est donc

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{2000m}{0,8c} = 8,333 \times 10^{-6} s$$

11. a) La fréquence reçue est

$$\begin{aligned} f' &= f_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ &= 98,1MHz \sqrt{\frac{c+0,95c}{c-0,95c}} \\ &= 98,1MHz \sqrt{\frac{1+0,95}{1-0,95}} \\ &= 612,6MHz \end{aligned}$$

b) La fréquence reçue est

$$\begin{aligned} f' &= f_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ &= 98,1MHz \sqrt{\frac{c+-0,95c}{c--0,95c}} \\ &= 98,1MHz \sqrt{\frac{1-0,95}{1+0,95}} \\ &= 15,7MHz \end{aligned}$$

12. Une longueur d'onde de 550 nm correspond à une fréquence de

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \frac{m}{s}}{550 \times 10^{-9} m} = 5,4545 \times 10^{14} Hz$$

La fréquence reçue est donc

$$\begin{aligned} f' &= f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ &= 5,4545\times10^{14}\,Hz\sqrt{\frac{c+-0,3c}{c--0,3c}} \\ &= 5,4545\times10^{14}\,Hz\sqrt{\frac{1-0,3}{1+0,3}} \\ &= 4,0025\times10^{14}\,Hz \end{aligned}$$

Cela correspond à une longueur d'onde de

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^{8}\,\frac{m}{s}}{4,0025\times10^{14}\,Hz} = 749,5\times10^{-9}\,m = 749,5nm$$

13. Une longueur d'onde de 650 nm correspond à une fréquence de

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^{8}\,\frac{m}{s}}{650\times10^{-9}\,m} = 4,615\times10^{14}\,Hz$$

Une longueur d'onde de 470 nm correspond à une fréquence de

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^{8}\,\frac{m}{s}}{470\times10^{-9}\,m} = 6,383\times10^{14}\,Hz$$

On doit donc avoir

$$\begin{gathered} f' = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ 6,383\times10^{14}\,Hz = 4,615\times10^{14}\,Hz\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ 1,383 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ 1,9126 = \frac{c+v}{c-v} \\ 1,9126c - 1,9126v = c+v \\ 0,9126c = 2,9126v \\ v = \frac{0,9126c}{2,9126} \\ v = 0,3133c \end{gathered}$$

14. La fréquence reçue par le vaisseau est

$$\begin{aligned}
f' &= f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\
&= 100GHz\sqrt{\frac{c+0,6c}{c-0,6c}} \\
&= 100GHz\sqrt{\frac{1+0,6}{1-0,6}} \\
&= 200GHz
\end{aligned}$$

Par réflexion, le vaisseau réémet donc une onde ayant 200 GHz. On a donc une source de 200 GHz se dirigeant vers la Terre à 0,6*c*. La fréquence reçue sur Terre est donc

$$\begin{aligned}
f' &= f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\
&= 200GHz\sqrt{\frac{c+0,6c}{c-0,6c}} \\
&= 200GHz\sqrt{\frac{1+0,6}{1-0,6}} \\
&= 400GHz
\end{aligned}$$

15. On va premièrement trouver la vitesse du vaisseau. On va premièrement considérer le vaisseau et Raphaël. L'axe positif est vers la gauche puisque l'onde va du vaisseau vers Raphaël. Comme le vaisseau va vers la droite, sa vitesse est négative. On a donc

$$\begin{aligned}
f' &= f_0\sqrt{\frac{c+(-v)}{c-(-v)}} \\
200MHz &= 400MHz\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\
0,5 &= \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\
0,25 &= \frac{c-v}{c+v} \\
0,25c+0,25v &= c-v \\
1,25v &= 0,75c \\
v &= \frac{0,75c}{1,25} \\
v &= 0,6c
\end{aligned}$$

Maintenant, on considérer ce qui se passe avec William. Dans ce cas, l'onde va vers la droite (du vaisseau vers William). Comme le vaisseau va aussi vers la droite, la vitesse du vaisseau est positive. La fréquence captée par William est donc

$$\begin{aligned} f' &= f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ &= 400MHz\sqrt{\frac{c+0,6c}{c-0,6c}} \\ &= 400MHz\sqrt{\frac{1+0,6}{1-0,6}} \\ &= 800MHz \end{aligned}$$

16. a) 10 secondes est le temps propres entre les flashs (puisque c'est le temps mesuré par Ursule, qui est présente à tous les flashes). Puisque le vaisseau se déplace à 0,95c selon Wilfrid, le temps entre les flashs est

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{10s}{\sqrt{1-(0,95)^2}} \\ &= 32,03s \end{aligned}$$

b) L'onde qui va vers Wilfrid va vers la droite et le vaisseau va aussi vers la droite. Cela signifie que la vitesse du vaisseau est positive dans la formule de l'effet Doppler. Le temps entre les flashs est donc

$$\begin{aligned} T' &= T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\ &= 10s\sqrt{\frac{c-0,95c}{c+0,95c}} \\ &= 10s\sqrt{\frac{0,05}{1,95}} \\ &= 1,601s \end{aligned}$$

c) 10 secondes est le temps propres entre les flashs (puisque c'est le temps mesuré par Ursule, qui est présente à tous les flashes). Puisque le vaisseau se déplace à 0,95c selon Flavien, le temps entre les flashs est

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ &= \frac{10s}{\sqrt{1-(0,95)^2}}\\ &= 32,03s\end{aligned}$$

d) L'onde qui va vers Flavien va vers la gauche et le vaisseau va vers la droite. Cela signifie que la vitesse du vaisseau est négative dans la formule de l'effet Doppler. Le temps entre les flashs est donc

$$\begin{aligned}T' &= T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\\ &= 10s\sqrt{\frac{c--0,95c}{c+-0,95c}}\\ &= 10s\sqrt{\frac{1,95}{0,05}}\\ &= 62,45s\end{aligned}$$

17. Flavien voit le vaisseau qui s'éloigne. Cela signifie que le temps entre les flashs selon Flavien est

$$T' = T_0\sqrt{\frac{c-(-v)}{c+(-v)}}$$

$$T' = T_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Comme ce temps est 9 secondes selon Flavien, on a cette première équation.

$$9s = T_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Wilfrid voit le vaisseau qui s'approche. Cela signifie que le temps entre les flashs selon Wilfrid est

$$T' = T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Comme ce temps est 4 secondes selon Wilfrid, on a cette deuxième équation.

$$4s = T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

On a alors 2 équations et deux inconnues. On peut trouver la période du signal selon Ursule en multipliant les deux équations

$$4s \cdot 9s = T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot T_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$
$$36s^2 = T_0^2$$
$$T_0 = 6s$$

On peut trouver la vitesse en divisant les équations

$$\frac{9s}{4s} = \frac{T_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}{T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}}$$
$$\frac{9}{4} = \frac{c+v}{c-v}$$
$$9(c-v) = 4(c+v)$$
$$9c - 9v = 4c + 4v$$
$$5c = 13v$$
$$v = \frac{5c}{13}$$

18. Selon Gertrude, on a

$$\Delta t = 0$$
$$\Delta x = 20al$$

a) Le temps entre les explosions selon Sydney est donc

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}}\left(0 - \frac{0,8c\cdot 20al}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^2}}\left(0 - \frac{0,8\cancel{c}\cdot 20a\cancel{c}}{\cancel{c^2}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^2}}(0 - 0,8\cdot 20a)\\ &= -26,67a\end{aligned}$$

Avec une réponse est négative, on a $t_2 - t_1 < 0$, ce qui signifie que t_2 est inférieur à t_1. L'explosion 2 s'est donc produite 26,67 ans avant l'explosion 1 selon Sydney.
b) La distance entre les endroits où il y a eu les explosions selon Sidney est

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}}(20al - 0,8c\cdot 0a)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^2}}(20al)\\ &= 33,33al\end{aligned}$$

19. Selon Gertrude, on a

$$\Delta t = t_2 - t_1 = -2a$$
$$\Delta x = 20al$$

a) Le temps entre les explosions selon Sydney est donc

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}}\left(-2a - \frac{0,8c\cdot 20al}{c^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^2}}\left(-2a - \frac{0,8\cancel{c}\cdot 20a\cancel{c}}{\cancel{c^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^2}}(-2a - 0,8\cdot 20a) \\ &= -30a\end{aligned}$$

Avec une réponse est négative, on a $t_2 - t_1 < 0$, ce qui signifie que t_2 est inférieur à t_1. L'explosion 2 s'est donc produite 30 ans avant l'explosion 1 selon Sydney.

b) La distance entre les endroits où il y a eu les explosions selon Sidney est

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}}(20al - 0,8c\cdot -2a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^2}}(21,6al) \\ &= 36al\end{aligned}$$

20. Selon Rodolphe, le rayon parcourt 120 m en allant de l'arrière vers l'avant du train. On a donc

$$\begin{aligned}\Delta x' &= 120m \\ \Delta t' &= \frac{120m}{3\times 10^8 \frac{m}{s}} = 4\times 10^{-7} s\end{aligned}$$

Le temps selon Jean-Marie est donc

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}}\left(4\times10^{-7}s + \frac{0,8c\cdot 120m}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^2}}\left(4\times10^{-7}s + \frac{0,8\cdot 120m}{c}\right)\\ &= \frac{5}{3}\left(7,2\times10^{-7}s\right)\\ &= 1,2\times10^{-6}s\end{aligned}$$

<u>*Note :*</u>

On peut également trouver la réponse en prenant le point de vue du Jean-Marie. Pour Jean-Marie, la longueur du train est de 72 m. La lumière, qui part de l'arrière du train, doit donc rattraper le devant du train qui se déplace à 0,8*c*. Le temps est donc

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{L}{v_1 - v_2}\\ &= \frac{72m}{c-0,8c}\\ &= 1,2\times10^{-6}s\end{aligned}$$

(On a utilisé

$$\Delta t = \frac{L}{v_1 - v_2}$$

qui est une formule vu au chapitre 1 de mécanique pour trouver dans combien de temps vont se rencontrer deux objets qui vont à vitesse constante.)

21. Selon Rodolphe, le rayon parcourt 120 m en allant de l'avant vers l'arrière du train. On a donc

$$\begin{aligned}\Delta x' &= -120m\\ \Delta t' &= \frac{120m}{3\times10^8\frac{m}{s}} = 4\times10^{-7}s\end{aligned}$$

Le temps selon Jean-Marie est donc

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}}\left(4\times10^{-7}s + \frac{0,8c\cdot -120m}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^2}}\left(4\times10^{-7}s - \frac{0,8\cdot 120m}{c}\right)\\ &= \frac{5}{3}\left(8\times10^{-8}s\right)\\ &= 1,333\times10^{-7}s\end{aligned}$$

Note :

On peut également trouver la réponse en prenant le point de vue du Jean-Marie. Pour Jean-Marie, la longueur du train est de 72 m. La lumière, qui part de l'avant du train, va à la rencontre de derrière du train qui se déplace à 0,8*c*. Le temps est donc

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{L}{v_1 - v_2}\\ &= \frac{72m}{c - -0,8c}\\ &= 1,333\times10^{-7}s\end{aligned}$$

(On a utilisé

$$\Delta t = \frac{L}{v_1 - v_2}$$

qui est une formule vu au chapitre 1 de mécanique pour trouver dans combien de temps vont se rencontrer deux objets qui vont à vitesse constante.)

22. Les deux événements sont le déclenchement des fusils. Le déclenchement du fusil derrière le train est l'événement 1 et le déclenchement du fusil à l'avant du train est l'événement 2. Pour Gontran, les deux fusils sont distants de 33 m et tirent simultanément. On a donc

$$\begin{aligned}\Delta x' &= 33m\\ \Delta t' &= 0s\end{aligned}$$

(Notez que si on avait choisi que le déclenchement du fusil derrière le train était l'événement 2 et le déclenchement du fusil à l'avant du train était l'événement 1, le $\Delta x'$ aurait été négatif.)

a) La distance entre les trous de balle selon Euzèbe est

$$\begin{aligned}\Delta x &= \gamma\left(\Delta x' + v\Delta t'\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,95c)^2}{c^2}}}\left(33m\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(0,95\right)^2}}33m\\ &= 105,68m\end{aligned}$$

b) Le temps selon Euzèbe est donc

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,95c)^2}{c^2}}}\left(0s + \frac{0,95c\cdot 33m}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(0,95\right)^2}}\left(1,045\times 10^{-7}s\right)\\ &= 3,3467\times 10^{-7}s\end{aligned}$$

Avec une réponse est positive, on a $t_2 - t_1 > 0$, ce qui signifie que t_2 est supérieur à t_1 Le déclenchement du fusil 2 s'est donc produit $3,3467 \times 10^{-7}$s après le déclenchement du fusil 1 selon Euzèbe. C'est donc le fusil à l'arrière du train qui a tiré en premier selon Euzèbe.

23. Selon Gertude, on a

$$\begin{aligned}\Delta x &= 20al\\ \Delta t &= -4a\end{aligned}$$

On a supposé que Sydney va dans la direction montrée sur la figure. Si on obtient une vitesse négative, alors cette supposition n'était pas correcte.

Si on veut que les explosions soient simultanées selon Sydney, on doit avoir

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$$

$$0a = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(-4a - \frac{v\cdot 20al}{c^2}\right)$$

$$0a = \left(-4a - \frac{v\cdot 20a\cdot c}{c^2}\right)$$

$$0a = \left(-4a - \frac{v\cdot 20a}{c}\right)$$

$$-4a = \frac{v\cdot 20a}{c}$$

$$\frac{v}{c} = -0,2$$

$$v = -0,2c$$

Comme la réponse est négative, notre supposition n'était pas correcte. Sydney va donc vers la gauche à 0,2*c*.

24. a) Selon Tatiana, les deux événements sont distants de 200 m. Le temps entre les événements correspond au temps qu'il faut pour que le derrière du train arrive au deuxième poteau. Pour y arriver, le derrière du train doit parcourir 270 m à 0,6*c*. Le temps est donc

$$\Delta t = \frac{270m}{0,6c} = 1,5\times 10^{-6}s$$

b) On a donc

$$\Delta x = 200m$$
$$\Delta t = 1,5\times 10^{-6}s$$

Le temps selon Serge est donc

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,6c)^2}{c^2}}}\left(1,5\times10^{-6}s - \frac{0,6c\cdot 200m}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,6)^2}}\left(1,5\times10^{-6}s - \frac{0,6\cdot 200m}{c}\right)\\ &= \frac{5}{4}\left(1,1\times10^{-6}s\right)\\ &= 1,375\times10^{-6}s\end{aligned}$$

c) La distance entre les poteaux pour Serge est

$$\begin{aligned}L &= L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\\ &= 200m\sqrt{1-\frac{(0,6c)^2}{c^2}}\\ &= 200m\sqrt{1-(0,6)^2}\\ &= 160m\end{aligned}$$

Notes :

Il ne faut pas prendre

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x + v\Delta t\right)$$

parce que cette formule va nous donner la distance entre les deux événements selon Serge. Le premier événement est le premier poteau vis-à-vis le devant du train et le deuxième événement est le deuxième poteau vis-à-vis l'arrière du train. Il y a donc un événement à l'avant du train et un autre à l'arrière du train. La distance entre les deux événements correspond donc à la longueur du train selon Serge. Vérifions cela. La longueur du train selon Serge est

$$\begin{aligned}L &= L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\\ 70m &= L_0\sqrt{1-\frac{(0,6c)^2}{c^2}}\\ 70m &= L_0\sqrt{1-(0,6)^2}\\ L_0 &= 87,5m\end{aligned}$$

alors que la transformation de Lorentz nous donne

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}6c)^2}{c^2}}}\left(200m - 0{,}6c\cdot 1{,}5\times 10^{-6}s\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}6)^2}}\left(-70m\right)\\ &= -87{,}5m\end{aligned}$$

La réponse est négative parce que l'événement 1 est devant le train alors que l'événement 2 est derrière le train. Cela fait que $\Delta x = x_2 - x_1$ est négatif.

Voyez aussi comment on aurait pu trouver le temps en prenant le point de vue de Serge. Quand le devant du train est vis-à-vis le premier poteau, le deuxième poteau, qui se déplace à 0,6c, doit parcourir 160 m (la distance entre les poteaux selon Serge) pour arriver vis-à-vis le devant du train et ensuite 87,5 m (la longueur du train) pour arriver vis-à-vis le derrière du train. La distance à parcourir est donc de 247,5 m. Le temps qu'il faut pour parcourir cette distance à 0,6c est

$$\Delta t = \frac{247{,}5m}{0{,}6c} = 1{,}375\times 10^{-6}s$$

25. Selon Sidney, on a

$$\begin{aligned}\Delta x' &= 8al\\ \Delta t' &= -5a\end{aligned}$$

alors que pour Gertrude on a

$$\begin{aligned}\Delta x &= ?\\ \Delta t &= 2a\end{aligned}$$

On peut trouver Δx avec

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$
$$c^2(-5a)^2 - (8al)^2 = c^2(2a)^2 - (\Delta x)^2$$
$$25a^2 \cdot c^2 - 64al^2 = 4a^2 \cdot c^2 - (\Delta x)^2$$
$$25al^2 - 64al^2 = 4al^2 - (\Delta x)^2$$
$$(\Delta x)^2 = 43al^2$$
$$\Delta x = \pm 6,557al$$

26. On va passer du point de vue d'Aline au point de vue de Kim. La vitesse entre ces deux observatrices est de $v = 0{,}95c$.

Pour Aline, la vitesse du vaisseau de Mike est de

$$u_x = -0,95c$$

On cherche donc la vitesse du vaisseau de Mike selon Kim

$$u'_x = ?$$

On a donc

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \\ &= \frac{-0,95c - 0,95c}{\left(1 - \frac{-0,95c \cdot 0,95c}{c^2}\right)} \\ &= \frac{-1,9c}{(1 + 0,95 \cdot 0,95)} \\ &= -0,99869c \end{aligned}$$

27. a) On va passer du point de vue d'Oscar au point de vue de Bertha. La vitesse entre ces deux observateurs est de $v = 0{,}8c$.

Pour Oscar, la vitesse du missile est de

$$u'_x = 0,25c$$

On cherche donc la vitesse du missile selon Bertha

$$u_x = ?$$

On a donc

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)} \\ &= \frac{0,25c + 0,8c}{\left(1 + \frac{0,8c \cdot 0,25c}{c^2}\right)} \\ &= \frac{1,05c}{(1 + 0,8 \cdot 0,25)} \\ &= 0,875c \end{aligned}$$

b) Comme le missile va moins vite que le vaisseau d'Ivan, il ne peut pas le rattraper.

28. On va premièrement trouver la longueur du train de John au repos. Puisqu'il a une longueur de 246 m quand il va à 0,8*c*, sa longueur au repos est de

$$\begin{aligned} L &= L_0\sqrt{1 - \tfrac{v^2}{c^2}} \\ 246m &= L_0\sqrt{1 - \tfrac{(0,8c)^2}{c^2}} \\ 246m &= L_0\sqrt{1 - (0,8)^2} \\ L_0 &= 410m \end{aligned}$$

On va ensuite passer du point de vue d'Erin au point de vue de Claudette pour trouver la vitesse du train de John selon Claudette. La vitesse entre ces deux observateurs (Erin et Claudette) est de $v = 0,8c$.

Pour Erin, la vitesse du train de John est de

$$u'_x = 0,8c$$

On cherche donc la vitesse du train de John selon Claudette

$$u_x = ?$$

On a donc

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)} \\ &= \frac{0,8c + 0,8c}{\left(1 + \frac{0,8c \cdot 0,8c}{c^2}\right)} \\ &= \frac{1,6c}{(1 + 0,8 \cdot 0,8)} \\ &= 0,9756c \end{aligned}$$

La longueur du train de John selon Claudette est donc

$$\begin{aligned} L &= L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= 410m\sqrt{1 - \frac{(0,9756c)^2}{c^2}} \\ &= 410m\sqrt{1 - (0,9756)^2} \\ &= 90m \end{aligned}$$

29. On va appliquer la formule de l'effet Doppler. Toutefois, pour appliquer cette formule, on doit être dans le repère où l'observateur est au repos. C'est-à-dire qui faut passer de la vitesse d'Annabelle selon Lewis à la vitesse d'Annabelle selon Esteban.

Pour Lewis, la vitesse d'Annabelle est

$$u'_x = 0,6c$$

On cherche donc la vitesse d'Annabelle selon Esteban

$$u_x = ?$$

On a donc

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)} \\ &= \frac{0,6c + 0,9c}{\left(1 + \frac{0,9c \cdot 0,6c}{c^2}\right)} \\ &= \frac{1,5c}{(1 + 0,9 \cdot 0,6)} \\ &= \frac{75}{77}c \\ &= 0,974c \end{aligned}$$

Dans le point de vue d'Esteban, le vaisseau d'Annabelle s'approche à 0,974*c*. Comme l'onde se dirige aussi vers Esteban, la vitesse d'Annabelle sera positive dans la formule de l'Effet Doppler. La fréquence reçue est donc

$$\begin{aligned} f' &= f_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ &= 100MHz \sqrt{\frac{c + \frac{75}{77}c}{c - \frac{75}{77}c}} \\ &= 100MHz \sqrt{\frac{\frac{152}{77}}{\frac{2}{77}}} \\ &= 100MHz \sqrt{\frac{152}{2}} \\ &= 871,8MHz \end{aligned}$$

30. a) On va passer du point de vue d'Arielle au point de vue de Pascal. La vitesse entre ces deux observateurs est de $v = 0,8c$.

Pour Arielle, la vitesse de Pablo est de

$$u_x = 0,95c$$

On cherche donc la vitesse de Pablo selon Pascal

$$u'_x = ?$$

On a donc

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \\ &= \frac{0,95c - 0,8c}{\left(1 - \frac{0,8c \cdot 0,95c}{c^2}\right)} \\ &= \frac{0,15c}{\left(1 - 0,8 \cdot 0,95\right)} \\ &= 0,625c \end{aligned}$$

b) Les deux événements sont :

1) Pablo quitte la Terre.
2) Pablo rattrape Pascal.

De toute évidence, c'est Pablo qui est présent aux deux événements et c'est donc lui qui mesure le temps propre.

c) Selon Ariel, Pablo, allant à 0,95*c*, doit rattraper Pascal allant à 0,8*c* alors que la distance entre les deux est initialement de 1 al. Le temps nécessaire pour rattraper Pascal est donc

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{L}{v_1 - v_2} \\ &= \frac{0,9al}{0,95c - 0,8c} \\ &= \frac{0,9a \cdot c}{0,15c} \\ &= \frac{0,9a}{0,15} \\ &= 6a \end{aligned}$$

(On a utilisé

$$\Delta t = \frac{L}{v_1 - v_2}$$

qui est une formule vu au chapitre 1 de mécanique pour trouver dans combien de temps vont se rencontrer deux objets qui vont à vitesse constante.)

d) On peut facilement trouver le temps selon Pablo, parce qu'on sait que c'est lui qui mesure le temps propre. Comme la vitesse de Pablo selon Arielle est de 0,95*c*, on a

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
6a &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{(0,95c)^2}{c^2}}} \\
6a &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(0,95)^2}} \\
\Delta t_0 &= 1,8735a
\end{aligned}$$

Note :

On aurait pu trouver ce temps avec les transformations de Lorentz. Selon Arielle, le temps entre le départ de Pablo et l'arrivée de Pablo est de 6 ans.

La distance entre les événements n'est pas de 0,9 al. Si Pablo se déplace pendant 6 ans à 0,95*c*, il parcourt 5,7 al avant de rattraper Pascal. Selon Arielle, on a donc

$$\begin{aligned}
\Delta x &= 5,7al \\
\Delta t &= 6a
\end{aligned}$$

Le temps selon Pablo est donc

$$\begin{aligned}
\Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,95c)^2}{c^2}}}\left(6a - \frac{0,95c\cdot 5,7al}{c^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(0,95)^2}}\left(6a - \frac{0,95c\cdot 5,7a\cdot c}{c^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(0,95)^2}}(6a - 0,95\cdot 5,7a) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(0,95)^2}}(0,585a) \\
&= 1,8735a
\end{aligned}$$

e) Comme on sait le temps propre, qui est le temps selon Pablo, on peut trouver le temps pour n'importe quel autre observateur à partir de la formule de la dilatation du temps, à condition de mettre la vitesse de l'observateur selon celui qui mesure le temps propre dans la formule de la dilatation du temps. Ici, il faut donc mettre la vitesse de Pascal selon Pablo dans la formule de dilatation du temps

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ &= \frac{1,8735a}{\sqrt{1-\frac{(0,625c)^2}{c^2}}}\\ &= \frac{1,8735a}{\sqrt{1-(0,625)^2}}\\ &= 2,4a\end{aligned}$$

31. a) Selon Lou, le temps est

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{L}{v_1 - v_2}\\ &= \frac{12al}{0,4c - -0,8c}\\ &= \frac{12a \cdot c}{0,4c - -0,8c}\\ &= \frac{12a}{0,4 - -0,8}\\ &= 10a\end{aligned}$$

(On a utilisé

$$\Delta t = \frac{L}{v_1 - v_2}$$

qui est une formule vu au chapitre 1 de mécanique pour trouver dans combien de temps vont se rencontrer deux objets qui vont à vitesse constante.)

b) Comme le missile se déplace à 0,8c, la distance parcourue par le missile en 10 ans est

$$\begin{aligned}\Delta x &= v\Delta t\\ &= 0,8c\cdot 10a\\ &= 8al\end{aligned}$$

c) Pour Lou, la vitesse du missile est de

$$u_x = -0,8c$$

On cherche donc la vitesse du missile selon Paul

$$u'_x = ?$$

On a donc

$$\begin{aligned}u'_x &= \frac{u_x - v}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)}\\ &= \frac{-0,8c-0,4c}{\left(1-\frac{-0,8c\cdot 0,4c}{c^2}\right)}\\ &= \frac{-1,2c}{\left(1--0,8\cdot 0,4\right)}\\ &= -0,9091c\end{aligned}$$

d) On ne peut pas utiliser directement la formule de dilatation du temps puisque ni Lou ni Paul ne mesure le temps propre. On doit donc utiliser les transformations de Lorentz. Trouvons les coordonnées des deux événements selon Lou, en prenant la planète comme origine. Les deux événements sont :

1) Le missile quitte la planète.
2) Le missile frappe le vaisseau.

Comme le missile fait 8 al vers la gauche en 10 ans, on a

$$\begin{aligned}\Delta x &= -8al\\ \Delta t &= 10a\end{aligned}$$

Le temps de vol du missile selon Paul est donc

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,4c)^2}{c^2}}}\left(10a - \frac{0,4c\cdot -8al}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,4)^2}}\left(10a - \frac{0,4c\cdot -8a\cdot c}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,4)^2}}(10a + 0,4\cdot 8a)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,4)^2}}(13,2a)\\ &= 14,402a\end{aligned}$$

Note :

On peut aussi utiliser la formule de la dilatation du temps en utilisant le temps selon le missile (qui est le temps propre puisque le missile est présent aux deux événements) comme intermédiaire. On va premièrement passer du repère de Lou au repère du missile pour trouver le temps propre.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$10a = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}}$$

$$10a = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(0,8)^2}}$$

$$\Delta t_0 = 6a$$

On passe ensuite du missile à Paul.

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ &= \frac{6a}{\sqrt{1-\frac{(0,9091c)^2}{c^2}}}\\ &= \frac{6a}{\sqrt{1-(0,9091)^2}}\\ &= 14,402a\end{aligned}$$

e) Selon Paul, on a la situation suivante.

Selon Paul, le missile se déplace à 0,9091c pendant 14,402 ans. La distance parcourue par le missile est donc

$$\begin{aligned}\Delta x &= v\Delta t\\ &= 0,9091c \cdot 14,402a\\ &= 13,093al\end{aligned}$$

Cela donne la distance entre Paul et la planète quand le missile est parti de la planète. Toutefois, pendant que le missile se dirige vers Paul, la planète s'est déplacée avec une vitesse de 0,4c vers le vaisseau et elle a parcourue

$$\begin{aligned}\Delta x &= v\Delta t\\ &= 0,4c \cdot 14,402a\\ &= 5,761al\end{aligned}$$

Avec une planète distante de 13,093 al qui s'approche de 5,761 al, la distance qui reste est 13,093 al – 5,761 al = 7,332 al.

Note : Peut-être auriez-vous été tenté de faire le calcul avec

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,4c)^2}{c^2}}}(-8al - 0,4c\cdot 10a)\\ &= -13,093al\end{aligned}$$

Mais cette formule donne la distance entre les deux événements a) départ du missile et b) arrivé du missile. Cela donne la distance entre le vaisseau de Paul et la position de la planète quand le missile est parti.

32. a) On a

$$E_k = (\gamma - 1)m_0c^2$$
$$6,3\times10^{13}J = (\gamma-1)0,145kg\cdot\left(3\times10^{8}\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$6,3\times10^{13}J = (\gamma-1)\cdot 1,302\times10^{16}J$$
$$0,00483 = \gamma - 1$$
$$\gamma = 1,00483$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = 1,00483$$
$$\sqrt{1-\tfrac{u^2}{c^2}} = 0,9952$$
$$1-\tfrac{u^2}{c^2} = 0,9904$$
$$\tfrac{u^2}{c^2} = 0,009586$$
$$\tfrac{u}{c} = 0,0979$$
$$u = 0,0979c$$

b) On doit avoir

$$\begin{aligned} E_k &= (\gamma - 1) m_0 c^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) 0{,}145kg \cdot \left(3 \times 10^8 \tfrac{m}{s} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}95c)^2}{c^2}}} - 1 \right) 1{,}305 \times 10^{16} J \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}95)^2}} - 1 \right) 1{,}305 \times 10^{16} J \\ &= 2{,}874 \times 10^{16} J \end{aligned}$$

Calculons maintenant comment il faut de bombe d'Hiroshima pour avoir cette énergie

$$N = \frac{2{,}874 \times 10^{16} J}{6{,}3 \times 10^{13} J} = 456{,}2$$

33. a) La quantité de mouvement est

$$\begin{aligned} p &= \gamma m_0 u \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} m_0 u \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}95c)^2}{c^2}}} \cdot 1{,}673 \times 10^{-27} kg \cdot 0{,}95c \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}95)^2}} \cdot 1{,}673 \times 10^{-27} kg \cdot 0{,}95c \\ &= 1{,}527 \times 10^{-18} \tfrac{kgm}{s} \end{aligned}$$

b) L'énergie cinétique est

$$
\begin{aligned}
E_k &= (\gamma - 1) m_0 c^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) 1,673 \times 10^{-27} kg \cdot \left(3 \times 10^8 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,95c)^2}{c^2}}} - 1 \right) 1,5057 \times 10^{-10} J \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1-(0,95)^2}} - 1 \right) 1,5057 \times 10^{-10} J \\
&= 3,3164 \times 10^{-10} J \\
&= 2070 MeV
\end{aligned}
$$

c) L'énergie relativiste est

$$
\begin{aligned}
E_k &= \gamma m_0 c^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot 1,673 \times 10^{-27} kg \cdot \left(3 \times 10^8 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,95c)^2}{c^2}}} \cdot 1,5057 \times 10^{-10} J \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(0,95)^2}} \cdot 1,5057 \times 10^{-10} J \\
&= 4,822 \times 10^{-10} J \\
&= 3010 MeV
\end{aligned}
$$

d) La masse est

$$
\begin{aligned}
m &= \gamma m_0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot 1,673 \times 10^{-27} kg \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,95c)^2}{c^2}}} \cdot 1,673 \times 10^{-27} kg \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(0,95)^2}} \cdot 1,673 \times 10^{-27} kg \\
&= 5,358 \times 10^{-27} kg
\end{aligned}
$$

34. a) À 0,7c, l'énergie relativiste est

$$\begin{aligned}E_k &= \gamma m_0 c^2\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot 9{,}11\times10^{-31}kg\cdot\left(3\times10^8\,\tfrac{m}{s}\right)^2\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}7c)^2}{c^2}}}\cdot 8{,}199\times10^{-14}J\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}7)^2}}\cdot 8{,}199\times10^{-14}J\\ &= 1{,}148\times10^{-13}J\\ &= 716{,}7keV\end{aligned}$$

À 0,8c, l'énergie relativiste est

$$\begin{aligned}E_k &= \gamma m_0 c^2\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot 9{,}11\times10^{-31}kg\cdot\left(3\times10^8\,\tfrac{m}{s}\right)^2\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}8c)^2}{c^2}}}\cdot 8{,}199\times10^{-14}J\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}8)^2}}\cdot 8{,}199\times10^{-14}J\\ &= 1{,}3665\times10^{-13}J\\ &= 853{,}0keV\end{aligned}$$

La différence d'énergie correspond à l'énergie qu'on doit donner à l'électron. Cette différence est

$$853{,}0keV - 716{,}7keV = 136{,}3keV$$

Note : On aurait pu aussi utiliser l'énergie cinétique au lieu de l'énergie relativiste.

b) À 0,8c, l'énergie relativiste est

$$\begin{aligned}E_k &= \gamma m_0 c^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot 9{,}11\times10^{-31} kg \cdot \left(3\times10^8 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}8c)^2}{c^2}}} \cdot 8{,}199\times10^{-14} J \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}8)^2}} \cdot 8{,}199\times10^{-14} J \\ &= 1{,}3665\times10^{-13} J \\ &= 853{,}0 keV\end{aligned}$$

À 0,9c, l'énergie relativiste est

$$\begin{aligned}E_k &= \gamma m_0 c^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot 9{,}11\times10^{-31} kg \cdot \left(3\times10^8 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}9c)^2}{c^2}}} \cdot 8{,}199\times10^{-14} J \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}9)^2}} \cdot 8{,}199\times10^{-14} J \\ &= 1{,}881\times10^{-13} J \\ &= 1174{,}1 keV\end{aligned}$$

La différence d'énergie correspond à l'énergie qu'on doit donner à l'électron. Cette différence est

$$1174{,}1 keV - 853{,}0 keV = 321{,}1 keV$$

35. La masse est

$$\begin{aligned}E &= m_0 c^2 \\ 3{,}83\times10^{26} J &= m_0 \cdot \left(3\times10^8 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ m_0 &= 4{,}2556\times10^9 kg\end{aligned}$$

Le Soleil perd donc 4,26 millions de tonnes chaque seconde.

36. Évidemment, on pourrait trouver la vitesse de proton et calculer ensuite sa quantité de mouvement, mais nous allons trouver la réponse plus rapidement en utilisant

$$E^2 - (pc)^2 = (m_0c^2)^2$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
(50\times 10^9 \cdot 1{,}602\times 10^{-19} J)^2 - (pc)^2 &= (1{,}673\times 10^{-27} kg \cdot c^2)^2 \\
(8{,}01\times 10^{-9} J)^2 - (pc)^2 &= (1{,}5057\times 10^{-10} J)^2 \\
(8{,}01\times 10^{-9} J)^2 - (1{,}5057\times 10^{-10} J)^2 &= (pc)^2 \\
pc &= 8{,}0086\times 10^{-9} J \\
p &= 2{,}6695\times 10^{-17} \tfrac{kg\,m}{s}
\end{aligned}$$

37. a) Trouvons la valeur de γ de cet électron. On a

$$\begin{aligned}
E_k &= (\gamma - 1) m_0 c^2 \\
10^{12} \cdot 1{,}602\times 10^{-19} J &= (\gamma - 1) 9{,}11\times 10^{-30} kg \cdot c^2 \\
\gamma - 1 &= 1\,953\,897 \\
\gamma &= 1\,953\,898
\end{aligned}$$

Ainsi, la longueur du tunnel selon l'électron est

$$\begin{aligned}
L &= L_0 \sqrt{1 - \tfrac{v^2}{c^2}} \\
&= \frac{L_0}{\gamma} \\
&= \frac{10000m}{1\,953\,898} \\
&= 5{,}118mm
\end{aligned}$$

b) Selon les observateurs sur Terre, la vitesse de l'électron est

$$\gamma = 1\,953\,898$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1\,953\,898$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 5,118\times 10^{-7}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = 2,619\times 10^{-13}$$

$$1-2,619\times 10^{-13} = \frac{v^2}{c^2}$$

$$1 \approx \frac{v^2}{c^2}$$

$$v \approx c$$

Ces électrons vont donc presque à la vitesse de la lumière (en fait 0,999 999 999 999 87c). Le temps pour passer d'un bout à l'autre du tunnel est donc

$$\Delta t = \frac{10000m}{c} = 3,333\times 10^{-5}s$$

c) Dans le repère de l'électron, il y a un tunnel de 5,118 mm de long qui arrive pratiquement à la vitesse de la lumière. Pour passer d'un bout à l'autre, le temps est

$$\Delta t_0 = \frac{0,005118m}{c} = 1,706\times 10^{-11}s$$

38. a) Dans une collision inélastique, c'est la quantité de mouvement qui est conservée. Avant la collision, la quantité de mouvement est

$$\begin{aligned} p_{avant} &= p_{boule} + p_{paquebot} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 u + 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(0,5^2\right)}} 5kg\cdot 0,5c \\ &= 8,66\times 10^8 \tfrac{kgm}{s} \end{aligned}$$

Après la collision, la quantité de mouvement est

$$\begin{aligned} p_{après} &= p_{boule+paquebot} \\ &= m_{boule+paquebot} u \\ &= 75\,000\,005kg\cdot u \end{aligned}$$

Nous n'avons pas pris la formule relativiste, car la vitesse sera beaucoup plus petite que la vitesse de la lumière. (En fait, on ne le sait pas d'avance, mais on prend la formule plus simple, c'est-à-dire la non-relativiste, pour trouver la vitesse. Si on se rend alors compte que la vitesse est trop grande, on refera la solution en prenant la formule relativiste.)

La conservation de la quantité de mouvement nous donne alors

$$\begin{aligned} p_{avant} &= p_{après} \\ 8,66\times10^{8}\,\tfrac{kgm}{s} &= 75\,000\,005kg\cdot u \\ u &= 11,547\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

b) L'énergie cinétique initiale est

$$\begin{aligned} E_{k\ avant} &= E_{k\ boule} + E_{k\ paquebot} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)m_0c^2+0 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(0,5^2\right)}}-1\right)5kg\cdot c^2 \\ &= 6,962\times10^{16}J \end{aligned}$$

Après la collision, l'énergie cinétique est

$$\begin{aligned} E_{k\ après} &= E_{k\ boule+paquebot} \\ &= \frac{1}{2}m_{boule+paquebot}u^2 \\ &= \frac{1}{2}75\,000\,005kg\cdot\left(11,547\,\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 5\times10^{9}J \end{aligned}$$

Nous n'avons pas pris la formule relativiste, car la vitesse est beaucoup plus petite que la vitesse de la lumière.

L'énergie perdue lors de la collision est donc

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= E_{k\ après} - E_{k\ avant} \\ &= 5\times10^{9}J - 6,962\times10^{16}J \\ &= -6,962\times10^{16}J \end{aligned}$$

c) Le nombre de bombes d'Hiroshima est

$$N = \frac{6,962 \times 10^{16} J}{6,3 \times 10^{13} J} = 1105$$

Probablement qu'il ne reste pas grand-chose du paquebot…

39. a) Dans une collision inélastique, c'est la quantité de mouvement qui est conservée. Avant la collision, la quantité de mouvement est

$$\begin{aligned} p_{avant} &= p_{neutron} + p_{noyau} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 u + 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(0,8^2\right)}} 1,675 \times 10^{-27} kg \cdot 0,8c \\ &= 6,7 \times 10^{-19} \tfrac{kgm}{s} \end{aligned}$$

Après la collision, la quantité de mouvement est

$$\begin{aligned} p_{après} &= p_{noyau+neutron} \\ &= \gamma m_{0\,noyau+neutron} u \\ &= 8,323 \times 10^{-27} kg \cdot \gamma u \end{aligned}$$

La conservation de la quantité de mouvement nous donne alors

$$\begin{aligned} p_{avant} &= p_{après} \\ 6,7 \times 10^{-19} \tfrac{kgm}{s} &= 8,323 \times 10^{-27} kg \cdot \gamma u \\ \gamma u &= 8,05 \times 10^{7} \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à isoler u dans cette équation.

$$8,05\times10^7 \tfrac{m}{s} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}u$$

$$8,05\times10^7 \tfrac{m}{s} = \frac{1}{\left(\frac{u}{c}\right)}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{u}\right)^2-1}}u$$

$$\frac{8,05\times10^7 \tfrac{m}{s}}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{u}\right)^2-1}}$$

$$0,26833 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{u}\right)^2-1}}$$

$$3,7267 = \sqrt{\left(\frac{c}{u}\right)^2-1}$$

$$u = 0,2592c$$

b) L'énergie cinétique initiale est

$$\begin{aligned} E_{k\ avant} &= E_{k\ neutron} + E_{k\ noyau} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)m_0c^2+0 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(0,8^2\right)}}-1\right)1,675\times10^{-27}kg\cdot c^2 \\ &= 1,005\times10^{-10}J \end{aligned}$$

Après la collision, l'énergie cinétique est

$$\begin{aligned} E_{k\ après} &= E_{k\ neutron+noyau} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)m_0c^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(0,2592^2\right)}}-1\right)8,323\times10^{-27}kg\cdot c^2 \\ &= 2,65\times10^{-11}J \end{aligned}$$

L'énergie perdue lors de la collision est donc

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= E_{k\ après} - E_{k\ avant}\\ &= 2,65\times10^{-11}J - 1,005\times10^{-10}J\\ &= -7,4\times10^{-11}J\\ &= -462MeV\end{aligned}$$

(C'est beaucoup pour un tel noyau. C'est en fait plus de 15 fois l'énergie de liaison de ce noyau. Probablement que ce noyau éclaterait en protons et neutrons.)

40. a) Comme dans tout processus, l'énergie relativiste est conservée. Puisque l'énergie de masse au repos est de 139,6 MeV avant la désintégration et de 105,7 MeV après la désintégration, l'énergie cinétique des deux particules après la désintégration doit être de 33,9 MeV.

Puisque la quantité de mouvement est nulle avant la désintégration, elle doit aussi être nulle après la désintégration. On a donc les équations suivantes.

$$E_{k1} + E_{k2} = 33,9MeV$$
$$p_1 + p_2 = 0$$

Cette dernière équation nous donne

$$\begin{aligned}p_1 &= -p_2\\ p_1^2 &= p_2^2\\ p_1^2c^2 &= p_2^2c^2\\ E_1^2 - m_{01}^2c^4 &= E_2^2\end{aligned}$$

Puisque

$$E_1 + E_2 = 139,6MeV$$

on a

$$\begin{aligned}E_1^2 - m_{01}^2c^4 &= \left(139,6MeV - E_1\right)^2\\ E_1^2 - m_{01}^2c^4 &= 19488,16MeV^2 - 279,2MeV\cdot E_1 + E_1^2\\ -m_{01}^2c^4 &= 19488,16MeV^2 - 279,2MeV\cdot E_1\end{aligned}$$

En isolant l'énergie de la particule 1, on arrive à

$$E_1 = \frac{19488,16 MeV^2 + m_{01}^2 c^4}{279,2 MeV}$$

Avec les valeurs des masses, on arrive à

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{19488,16 MeV^2 + (105,7 MeV)^2}{279,2 MeV} \\ &= 109,8 MeV \end{aligned}$$

De là, on trouve assez facilement que

$$\begin{aligned} E_2 &= 139,6 MeV - E_1 \\ &= 29,8 MeV \end{aligned}$$

Comme l'énergie relativiste est la somme de l'énergie de masse et de l'énergie cinétique, on trouve facilement que l'énergie cinétique de la particule 1 (muon) est de 4,1 MeV et que celle de la particule 2 (neutrino) est de 29,8 MeV. La somme de ces énergies est bel et bien 33,9 MeV tel que prévu.

b) C'est assez facile de trouver la vitesse du neutrino. Puisqu'on fait comme s'il n'avait pas de masse, alors sa vitesse doit être égale à celle de la lumière.

Pour le muon, on peut la valeur de γ avec la formule de l'énergie relativiste.

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma_1 m_{01} c^2 \\ 109,8 MeV &= \gamma_1 \cdot 105,7 MeV \\ \gamma_1 &= 1,0389 \end{aligned}$$

Avec γ, on trouve la vitesse.

$$\begin{aligned} 1,0389 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_1}{c}\right)^2}} \\ u_1 &= 0,2712c \end{aligned}$$

41. Commençons par

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)$$

Puisque

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

on a

$$\begin{aligned}
1-\frac{u'^2}{c^2} &= 1-\left(\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{c^2} \\
&= 1-\left(\frac{\frac{u}{c}-\frac{v}{c}}{1-\frac{uv}{c^2}}\right)^2 \\
&= 1-\frac{\frac{u^2}{c^2}-2\frac{uv}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2} \\
&= \frac{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2}-\frac{\frac{u^2}{c^2}-2\frac{uv}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2} \\
&= \frac{1-2\frac{uv}{c^2}+\frac{u^2}{c^2}\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2}-\frac{\frac{u^2}{c^2}-2\frac{uv}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2} \\
&= \frac{1-\frac{u^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}+\frac{u^2}{c^2}\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2} \\
&= \frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)$$

L'autre formule est

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(1+\frac{vu'}{c^2}\right)$$

Puisque

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}$$

on a

$$\begin{aligned}
1-\tfrac{u^2}{c^2}&=1-\left(\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}\right)^2\cdot\frac{1}{c^2}\\
&=1-\left(\frac{\frac{u'}{c}+\frac{v}{c}}{1+\frac{u'v}{c^2}}\right)^2\\
&=1-\frac{\frac{u'^2}{c^2}+2\frac{u'v}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}\\
&=\frac{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}-\frac{\frac{u'^2}{c^2}+2\frac{u'v}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}\\
&=\frac{1+2\frac{u'v}{c^2}+\frac{u'^2}{c^2}\frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}-\frac{\frac{u'^2}{c^2}+2\frac{u'v}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}\\
&=\frac{1-\frac{u'^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}+\frac{u'^2}{c^2}\frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}\\
&=\frac{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sqrt{1-\tfrac{u^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)$$

42. Si un objet se déplace à la vitesse *u'*, sa quantité de mouvement en *x* est

$$p'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} m_0 u'_x$$

En transformant pour un autre observateur qui voit l'objet aller à la vitesse *u*, on a

$$\begin{aligned}
p'_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \left(1-\frac{uv}{c^2}\right) m_0 \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 (u-v) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 u - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 v \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 u - \frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 c^2 \right)
\end{aligned}$$

Puisque

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 u \qquad \text{et} \qquad E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 c^2$$

on arrive à

$$p'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(p_x - \frac{v}{c^2} E \right)$$

Si un objet se déplace à la vitesse *u'*, son énergie relativiste est

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} m_0 c^2$$

En transformant pour un autre observateur qui voit l'objet aller à la vitesse *u*, on a

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \left(1-\frac{uv}{c^2}\right) m_0 c^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 c^2 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 uv \right)$$

Puisque

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 u \qquad \text{et} \qquad E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} m_0 c^2$$

on arrive à

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(E - v p_x\right)$$

43. a) Pour Félix, les extrémités du tapis se déplacent. Cela signifie que le tapis est contracté selon Félix. La longueur du tapis selon Félix est

$$L = L_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

La distance entre les personnes qui se déplace est s selon Béatrice. Cette distance est une distance contractée. Selon Félix, les personnes ne se déplacent pas et la distance entre les personnes est donc égale à la distance non contractée s_0.

$$s_0 = \frac{s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

On a donc un tapis de longueur L avec des personnes distantes de s_0 sur le tapis. Le nombre de personnes de ce côté est donc

$$N_1 = \frac{L}{s_0}$$

$$= \frac{L_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{s / \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{L_0}{s} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Comme le nombre de personnes selon Béatrice est

$$N = \frac{2L_0}{s}$$

on a

$$N_1 = \frac{N}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

b) Selon Félix, les personnes de l'autre côté du tapis se déplacent à la vitesse

$$u' = \frac{v - -v}{1 - \frac{v(-v)}{c^2}}$$

Cela signifie que la distance entre les personnes de ce côté est fortement contractée. La distance entre les personnes est

$$s' = s_0\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}$$

Sachant que la vitesse u' est le résultat de la combinaison de la vitesse v et de la vitesse $-v$, on a, en utilisant le résultat du premier défi,

$$\begin{aligned} s' &= s_0\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} \\ &= \frac{s_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v(-v)}{c^2}} \\ &= \frac{s_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Puisque

$$s_0 = \frac{s}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

la distance devient

$$\begin{aligned} s' &= \frac{s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{1+\frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{s\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

On a donc un tapis de longueur *L* avec des personnes distantes de *s'* sur le tapis. Le nombre de personnes de ce côté est donc

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{L}{s'} \\ &= \frac{L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{s\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} / \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} \\ &= \frac{L_0}{s}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Comme le nombre de personnes selon Béatrice est

$$N = \frac{2L_0}{s}$$

on a

$$N_2 = \frac{N}{2}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$

c) Le nombre total de personnes est

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 \\ &= \frac{N}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{N}{2}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= N \end{aligned}$$

(Ça quand même bien de l'allure que les deux comptent le même nombre de personnes. Il ne peut pas disparaitre de personnes selon la vitesse d'un observateur…)

44. a) Quand Naomie s'éloigne de la Terre, le temps entre les flashs vus par Ophélie se trouve avec la formule de l'effet Doppler

$$\Delta T_{aller} = \Delta T_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Pour trouver pendant combien de temps Ophélie voit Naomie s'éloigner, trouvons les moments du début et de la fin du voyage d'aller selon Ophélie.

Pour le départ, c'est simple, on va dire que c'est $t_{départ} = 0$.

Le temps qu'il faut à Naomie pour arriver, selon Ophélie, est

$$T_{voyage} = \frac{L_0}{v}$$

Ainsi, Naomie arrive à $t_{arrivée} = L_0 / v$.

Toutefois, comme l'arrivée se fait à une certaine distance, il faut un certain temps pour que l'image de l'arrivée parvienne à Ophélie. Comme l'arrivée se fait à une distance L_0 d'Ophélie et que l'image de l'arrivée se dirige vers la Terre à la vitesse de la lumière, le délai d'arrivée de l'image est

$$T_{delai} = \frac{L_0}{c}$$

Ainsi, Ophélie voit l'arrivée de Naomie à

$$t_{arrivée\ vue} = \frac{L_0}{v} + \frac{L_0}{c}$$

Le temps entre le départ et l'arrivée lors de l'aller tel que vu par Ophélie est donc

$$\begin{aligned} T_{aller} &= t_{arrivée\ vue} - t_{départ} \\ &= \frac{L_0}{v} + \frac{L_0}{c} \end{aligned}$$

Le nombre de flashs vus par Ophélie est donc

$$\begin{aligned} N_{aller} &= \frac{T_{aller}}{\Delta T_{aller}} \\ &= \left(\frac{L_0}{v} + \frac{L_0}{c}\right)\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \end{aligned}$$

Cette réponse est déjà acceptable, mais on peut la simplifier

$$\begin{aligned}
N_{aller} &= \left(\frac{L_0}{v}+\frac{L_0}{c}\right)\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\
&= L_0\left(\frac{c}{vc}+\frac{v}{vc}\right)\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\
&= \frac{L_0}{vc}(c+v)\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\
&= \frac{L_0}{vc}\sqrt{(c-v)(c+v)} \\
&= \frac{L_0}{vc}\sqrt{c^2-v^2} \\
&= \frac{L_0}{v}\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}
\end{aligned}$$

b) Quand Naomie se dirige vers la Terre, le temps entre les flashs vus par Ophélie se trouve avec la formule de l'effet Doppler

$$\Delta T_{retour} = \Delta T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Pour trouver pendant combien de temps Ophélie voit Naomie s'approcher, trouvons les moments du début et de la fin du voyage d'aller selon Ophélie.

Pour le début du voyage de retour, il correspond à la fin du voyage d'aller. Ainsi

$$t_{départ\ vue} = \frac{L_0}{v}+\frac{L_0}{c}$$

Pour le temps total du voyage, Naomie devait parcourir 2 fois la distance L_0 à la vitesse v. Le moment du retour de Naomie est donc

$$t_{retour} = \frac{2L_0}{v}$$

Ici, il n'y a pas de décalage de temps pour l'arrivée de la lumière puisque Naomie est revenu tout près d'Ophélie.

Le temps entre le départ et l'arrivée lors du retour tel que vu par Ophélie est donc

$$\begin{aligned} T_{retour} &= t_{arrivée} - t_{départ\ vue} \\ &= \frac{2L_0}{v} - \left(\frac{L_0}{v} + \frac{L}{c} \right) \\ &= \frac{L_0}{v} - \frac{L}{c} \end{aligned}$$

Le nombre de flashs vus par Ophélie est donc

$$\begin{aligned} N_{retour} &= \frac{T_{retour}}{\Delta T_{retour}} \\ &= \left(\frac{L_0}{v} - \frac{L_0}{c} \right) \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \end{aligned}$$

Cette réponse est déjà acceptable, mais on peut la simplifier

$$\begin{aligned} N_{retour} &= \left(\frac{L_0}{v} - \frac{L_0}{c} \right) \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ &= L_0 \left(\frac{c}{vc} - \frac{v}{vc} \right) \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ &= \frac{L_0}{vc} (c-v) \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ &= \frac{L_0}{vc} \sqrt{(c+v)(c-v)} \\ &= \frac{L_0}{vc} \sqrt{c^2 - v^2} \\ &= \frac{L_0}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

c) Le nombre de flashs reçus est égal au nombre de secondes qu'il s'écoule dans le vaisseau de Naomie puisqu'il y avait un flash émis chaque seconde. On a donc

$$\begin{aligned} \Delta t_{aller} &= \frac{L_0}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \Delta t_{retour} &= \frac{L_0}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta t_{Naomie} &= \Delta t_{aller} + \Delta t_{retour} \\ &= \frac{2L_0}{v}\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}\end{aligned}$$

Le temps qu'il s'est écoulé pour Ophélie est égal au temps qu'il faut pour que Naomie fasse l'aller-retour. Ce temps est

$$\Delta t_{Ophélie} = \frac{2L_0}{v}$$

On a donc

$$\Delta t_{Naomie} = \frac{2L_0}{v}\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta t_{Naomie} = \Delta t_{Ophélie}\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}$$

Et voilà.