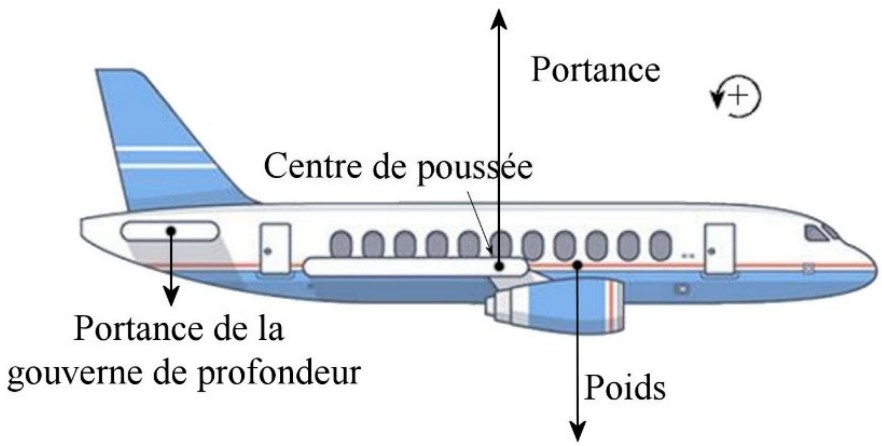
9 L'ÉQUILIBRE DE ROTATION

Le centre de gravité d'un avion de 20 000 kg est situé 2 m devant le centre de poussée. Quel doit être la portance des ailes et de la gouverne de profondeur si la distance entre le centre de poussée de la gouverne de profondeur et le centre de poussée des ailes est de 8 m ?

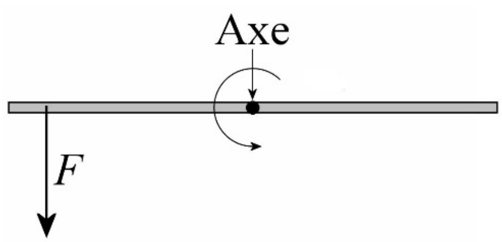


www.pinterest.ca/pin/486036984788436613/

9.1 LE MOMENT DE FORCE

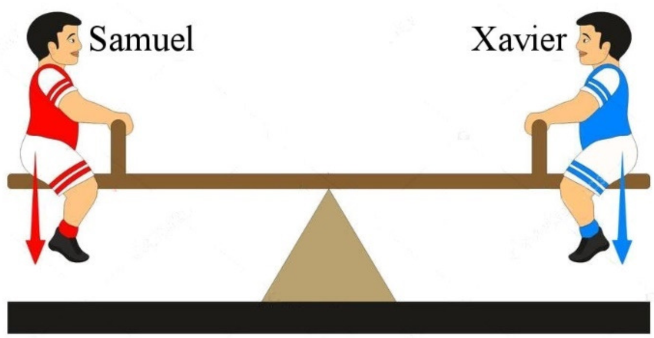
Grandeur du moment de force

Nous allons maintenant examiner l'équilibre de rotation d'un objet.



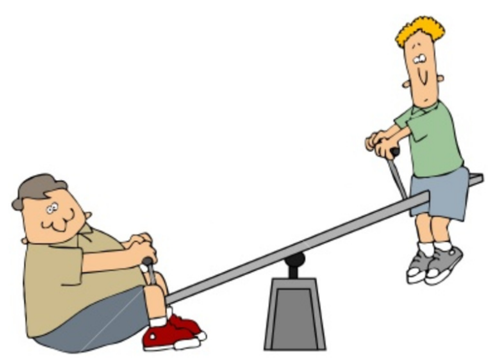
Pour y arriver, on doit connaitre les effets d'une force sur la rotation d'un objet. Supposons qu'on a un objet pouvant tourner autour d'un axe de rotation. Si on applique une force sur cet objet initialement au repos, l'objet commence à tourner. Une force peut donc mettre un objet en rotation.

Pour qu'il y ait équilibre de rotation, il faut donc que l'effet de toutes les forces s'annule. Par exemple, les forces exercées par ces 2 jumeaux sur la planche s'annulent. La force faite par Samuel veut faire tourner la planche dans le sens contraire des aiguilles d'une montre alors que la force exercée par Xavier cherche à faire tourner la planche dans le sens des aiguilles d'une montre. Les effets des deux forces s'annulent.



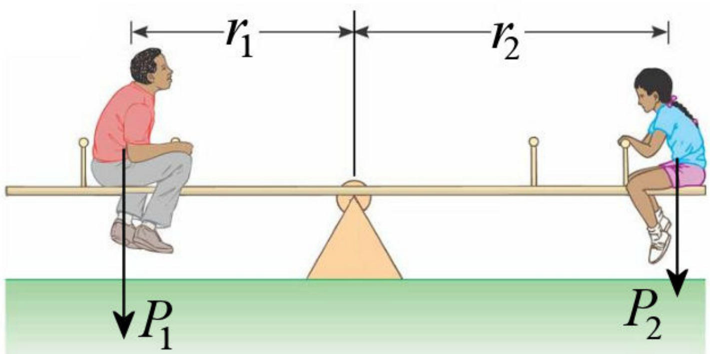
wdrfree.com/stock-vector/download/trigonometry-static-equilibrium-infographic-diagram-209863788

Xavier et Samuel exercent des forces identiques de chaque côté et on pourrait donc penser qu'il y a équilibre si les forces sont identiques de chaque côté. Toutefois, ce n'est pas le cas. Il n'y a pas que la grandeur de la force qui compte pour la rotation, le point d'application de la force est également très important. Illustrons ceci par un exemple. Supposons que deux personnes, un gros et un maigre, s'assoient sur une balançoire. Si les deux personnes sont assises à la même distance de l'axe de rotation, on sait qu'il ne peut y avoir d'équilibre. La personne la plus maigre se retrouve perchée dans les airs.



francais.istockphoto.com/photo-9020464-balancoire-bascule-enfant-obese-cartoon-petits-garcons.php

Par contre, il est possible d'obtenir un équilibre même si les forces de chaque côté sont inégales. En variant le point d'application d'une des forces, on peut rétablir l'équilibre. Dans le cas de la balançoire, il faut changer l'endroit où une des personnes est assise. On a alors la situation d'équilibre suivante.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/boy-mass-98kg-seesaw-41kg-girl-girl-distance-b-44m-center-seesaw-find-distance-seesaw-perf-q37449846

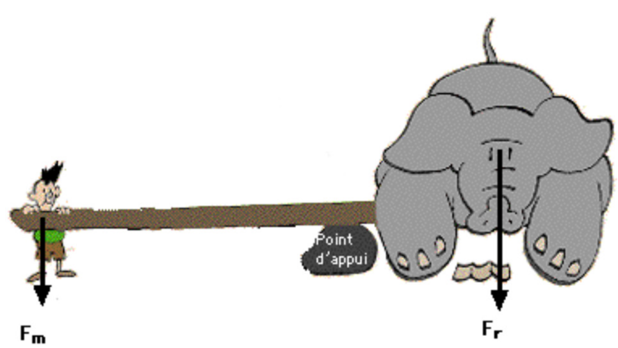
On voit que la force plus importante à gauche est compensée par une distance de l'axe plus courte. Ceci montre bien qu'il n'y a pas que la force qui importe, la distance à laquelle est appliquée cette force est tout aussi importante.

La condition d'équilibre dans cette situation est connue depuis bien longtemps. Déjà, Archimède la connaissait en 250 av. J.-C. On doit avoir, en se fiant aux variables sur la dernière figure.

$$P_1 r_1 = P_2 r_2$$

Ainsi, si le papa a un poids deux fois plus grand que celui de sa fille, il devra s'assoir deux fois plus près de l'axe de rotation si on veut avoir l'équilibre.

Avec peu de force, on pourrait donc soulever des objets très lourds à l'aide d'un tel levier. Un enfant pourrait soulever un éléphant si la distance entre l'axe et le point d'application de la force est suffisamment grande du côté de l'enfant. C'est ce qui avait fait dire à Archimède que si on lui donnait un point d'appui et un levier assez long, il pourrait soulever le monde.



perso.b2b2c.ca/login/JP/mecanique/machsimp.html

C'est donc la force multipliée par la distance qui détermine l'effet d'une force sur la rotation. On appellera cette quantité le moment de force. Il est noté avec le symbole τ.

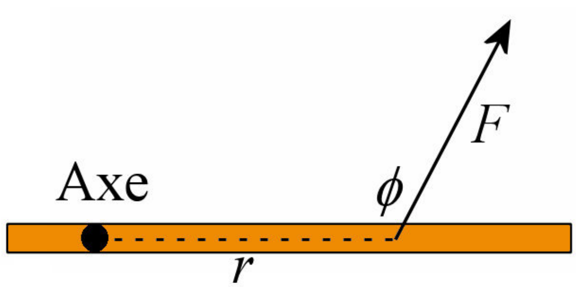
$$\tau = Fr$$

Le moment de force est en N m. (Même si les N m sont équivalents à des joules, on n'utilise jamais le joule pour le moment de force.) On parle encore de moment puisqu'il s'agit d'une quantité multipliée par une distance.

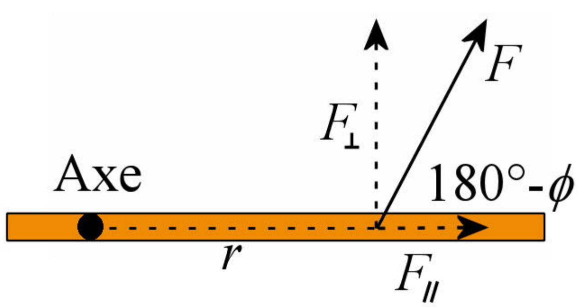
Cette première formule du moment de force n'est pas notre formule la plus générale puisqu'elle se limite au cas où la force est perpendiculaire à une ligne allant du point d'application de la force à l'axe de rotation. Déjà, Archimède avait généralisé ce concept en étudiant l'équilibre des leviers inclinés ou même pliés comme celui illustré sur la figure. Héron d'Alexandrie (1er siècle apr. J.-C.) et Jordanus de Nemore (13e siècle) obtinrent également une solution correcte pour l'équilibre d'objets de la sorte.

catalogue.museogalileo.it/object/FirstorderLeverWithBentBeam.html

Quand la force n'est pas perpendiculaire à la ligne allant de l'axe au point d'application de la force, nous avons alors la situation illustrée sur la figure suivante.



Pour déterminer comment cette force influence la rotation, on la sépare en composantes. Une composante est perpendiculaire à la ligne *r* et l'autre est parallèle à la ligne *r*.



Évidemment, la composante parallèle ne fait pas tourner l'objet, seule la composante perpendiculaire fait tourner l'objet. La grandeur du moment de force quand la force est perpendiculaire est

$$\tau = F_\perp r$$

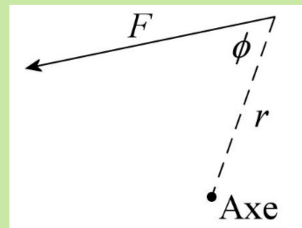
On peut ensuite déterminer la valeur de la force perpendiculaire à partir de F et de l'angle. On a

$$F_{\perp} = F \sin(180° - \phi)$$
$$F_{\perp} = F \sin\phi$$

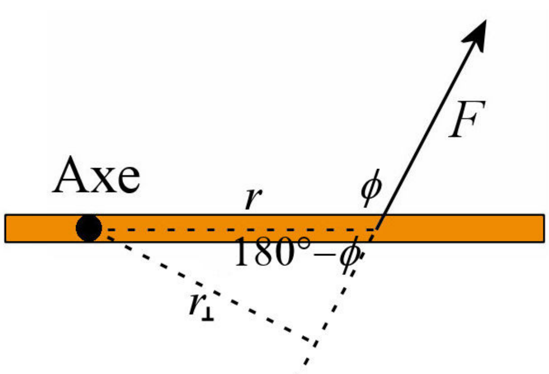
puisque sin(180 °-ϕ) = sin ϕ. Ainsi, notre formule plus générale du moment de force est

Moment de force (torque en anglais)

$$\tau = Fr\sin\phi$$



Il existe une autre formule équivalente pour le calcul du moment de force. Pour la trouver, on doit faire une droite qui prolonge le vecteur force. On prend ensuite la distance la plus courte entre cette droite et l'axe de rotation ($r_{\perp}$ sur la figure). Selon la figure, on a



$$\frac{r_{\perp}}{r} = \sin(180° - \phi)$$
$$r_{\perp} = r\sin(180° - \phi)$$
$$r_{\perp} = r\sin\phi$$

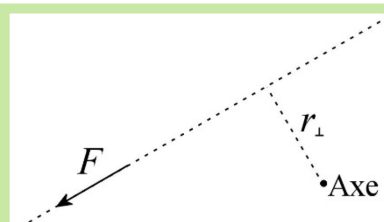
Cette distance porte le nom de *bras de levier*. Le moment de force

$$\tau = Fr\sin\phi$$

devient donc

Autre formule pour le moment de force

$$\tau = Fr_{\perp}$$



On aurait pu se passer de cette formule, mais elle est parfois utile, selon les données qu'on a initialement, pour calculer plus rapidement le moment de force dans certaines situations.

Ces trois formules permettant de calculer le moment de force montrent clairement que la distance a autant d'importance que la grandeur de la force. Si on tente de fermer une porte en exerçant une force sur les pentures, la porte ne bouge même pas, car on applique alors la force directement sur l'axe de rotation et le moment de force est nul puisque $r = 0$. Si on applique la force sur la porte, mais près des pentures, on pourra alors fermer la porte, mais la force qu'on devra appliquer devra être très grande. Cette grande force compense la petite distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation. Si on applique la force à l'autre bout de la porte (du côté de la poignée), on peut alors fermer la porte avec une force assez faible parce que la distance est plus grande.

Les unités du moment de force

Le moment de force est en Newton-mètre (Nm)

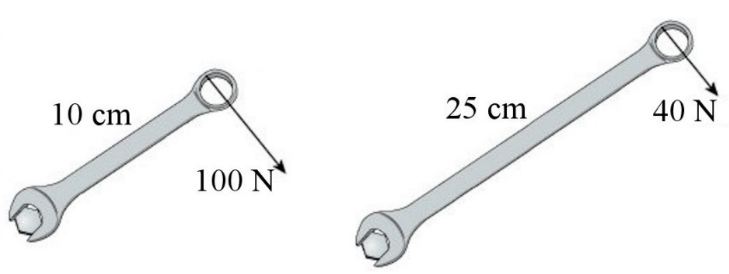
Dans le système anglais, le moment de force se mesure en livre-pied ou en livre-pouce. Voici les règles de conversion de ces unités.

Unité 1	→ multiplier par ← diviser par	Unité 2
Livre-pied	1,3558	Newton-mètre
Livre-pouce	0,1130	Newton-mètre

Les outils

Le moment de force est un concept très important pour comprendre le fonctionnement de plusieurs outils. Pour illustrer le tout, regardons ce qui se passe si vous tentez de dévisser un boulon de 2 cm de diamètre très difficile à dévisser. Disons qu'il faut 10 Nm pour réussir à le dévisser. Vous tentez premièrement de dévisser le boulon avec vos mains. Vous appliquez une force directement sur les bords du boulon, mais cela ne fait pas un moment de force très important, car la distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation est très petite. Même avec une force de 100 N, vous ne pouvez pas dévisser le boulon puisque l'application d'une force de 100 N à 1 cm de l'axe de rotation donne un moment de force de 1 Nm (100 N multiplié par 0,01 m). Vous devriez appliquer une force de 1000 N pour pouvoir dévisser le boulon avec vos mains.

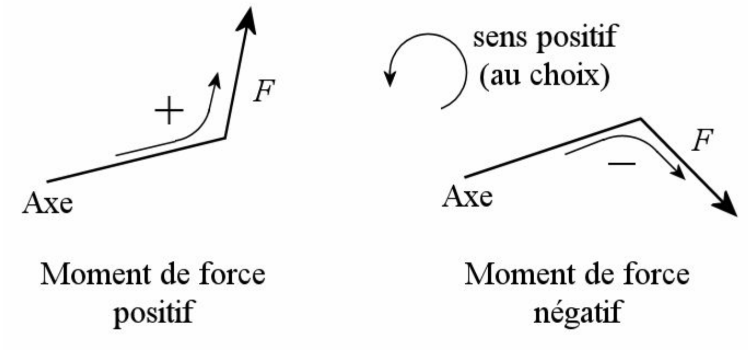
Si on prend maintenant une clé, on pourra atteindre le 10 Nm beaucoup plus facilement. Si la clé a 10 cm de long, il faudra une force de 100 N et si la clé a 25 cm de long, il faudra seulement 40 N. C'est beaucoup moins que les 1000 N nécessaires sans outil !



www.physicsmastered.com/torque-magnitude-ranking-task/

Signe du moment de force

On doit aussi déterminer le signe du moment de force. On commence par déterminer nous-mêmes quel sera le sens positif pour la rotation. Ensuite, on part de l'axe, on va vers le point d'application de la force et on tourne en direction de la force. Si on tourne dans le même sens que notre positif, le moment de force est positif, si on tourne dans le sens contraire de notre positif, le moment de force est négatif.



Moment de force net

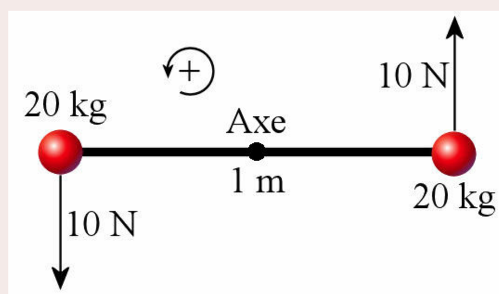
S'il y a plusieurs forces qui agissent sur un objet, le moment de force net ou résultant est simplement la somme de tous les moments de force agissants sur l'objet.

Moment de force net ou moment de force résultant

$$\tau_{net} = \sum \tau$$

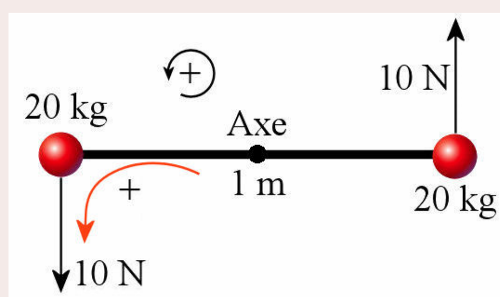
Exemple 9.1.1

Quel est le moment de force net sur cet objet ?



Le moment de force fait par la force de gauche est

$$\begin{aligned}\tau &= Fr\sin\phi \\ &= 10N \cdot 0{,}5m \cdot \sin 90° \\ &= 5Nm\end{aligned}$$

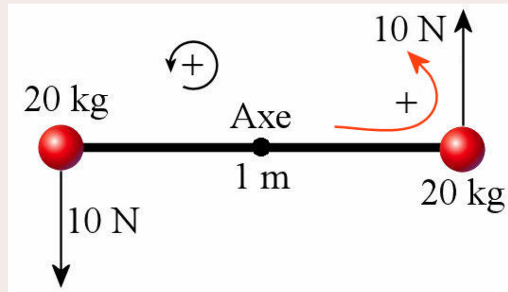


Ce moment de force est positif selon la figure.

Ce moment de force est positif, car il fait tourner dans le sens puisque la flèche qui part de l'axe, va vers le point d'application de la force et tourne dans la direction de la force va dans la direction contraire des aiguilles d'une montre.

Le moment de force fait par la force de droite est

$$\begin{aligned}\tau &= Fr\sin\phi \\ &= 10N\cdot 0,5m\cdot\sin 90° \\ &= 5Nm\end{aligned}$$



Ce moment de force est positif selon la figure.

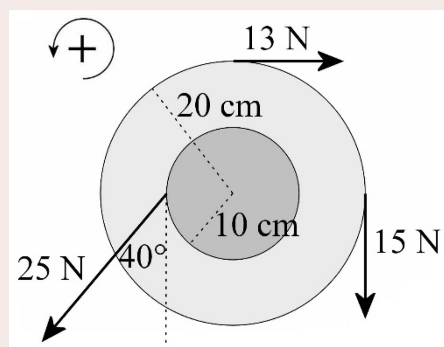
Ce moment de force est positif, car il fait tourner dans le sens puisque la flèche qui part de l'axe, va vers le point d'application de la force et tourne dans la direction de la force va dans la direction contraire des aiguilles d'une montre.

Le moment de force net est donc

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= 5Nm + 5Nm \\ &= 10Nm\end{aligned}$$

Exemple 9.1.2

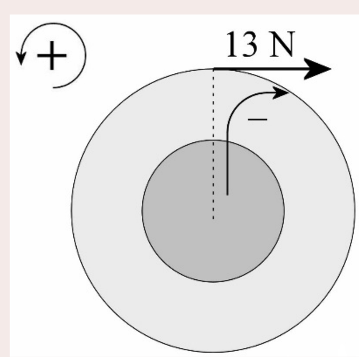
Quel est le moment de force net sur cette roue ?



Calculons le moment de force fait par chacune des forces.

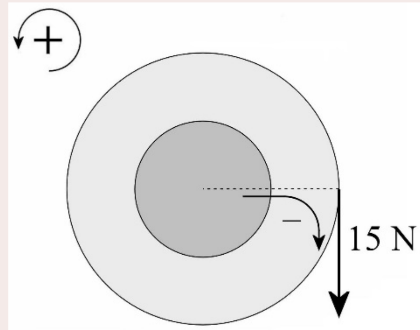
La force de 13 N fait un moment de force de

$$\begin{aligned}\tau_1 &= Fr\sin\phi \\ &= -13N\cdot 0,2m\cdot\sin 90° \\ &= -2,6Nm\end{aligned}$$



Ce moment de force est négatif, car il fait tourner dans le sens négatif puisque la courbe qui part de l'axe, va vers le point d'application de la force et tourne dans la direction de la force va dans la direction contraire au sens positif.

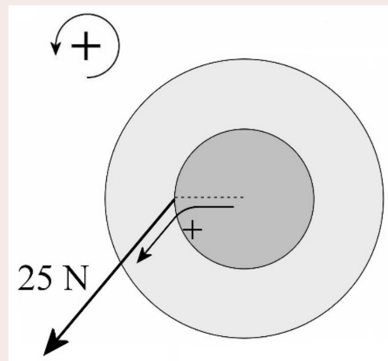
La force de 15 N fait un moment de force de



$$\begin{aligned}\tau_2 &= Fr\sin\phi \\ &= -15N \cdot 0,2m \cdot \sin 90° \\ &= -3Nm\end{aligned}$$

Ce moment de force est négatif, car il fait tourner dans le sens négatif puisque la courbe qui part de l'axe, va vers le point d'application de la force et tourne dans la direction de la force va dans la direction contraire au sens positif.

La force de 25 N fait un moment de force de



$$\begin{aligned}\tau_3 &= Fr\sin\phi \\ &= 25N \cdot 0,1m \cdot \sin 130° \\ &= 1,915Nm\end{aligned}$$

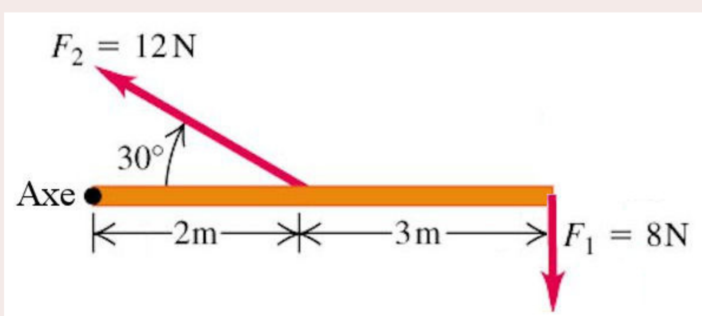
Ce moment de force est positif, car il fait tourner dans le sens positif puisque la courbe qui part de l'axe, va vers le point d'application de la force et tourne dans la direction de la force va dans la même direction que le sens positif.

Le moment de force net est donc

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= -2,6Nm - 3Nm + 1,915Nm \\ &= -3,685Nm\end{aligned}$$

Exemple 9.1.3

Quel est le moment de force net sur cette tige ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/calculate-net-torque-point-two-forces-applied-figure-intro -1-figure--rod-forces-theplane-p-q553374

Le moment de force fait par la force de 12 N est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= F_1 r \sin\theta \\ &= 12N \cdot 2m \cdot \sin 30^\circ \\ &= 12Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la force de 8 N est

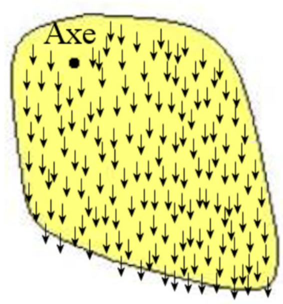
$$\begin{aligned}\tau_2 &= F_2 r \sin\theta \\ &= -8N \cdot 5m \cdot \sin 90^\circ \\ &= -40Nm\end{aligned}$$

Le moment de force net est donc

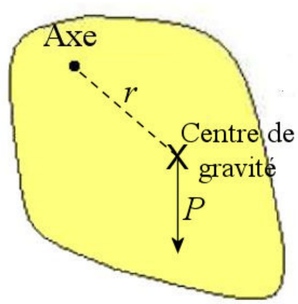
$$\begin{aligned}\tau_{net} &= \tau_1 + \tau_2 \\ &= 12Nm + -40Nm \\ &= -28Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la force de gravitation

La force de gravitation s'exerce sur chaque atome de l'objet. On a donc toute une série de moments de force qui s'exerce.



On ne va tout de même pas sommer tous ces moments de force chaque fois. On ne le démontrera pas ici, mais le moment de force fait par toutes ces petites forces est le même que celui fait si on le calcule en prenant une force de gravitation s'appliquant au complet en un endroit qu'on appelle le *centre de gravité* ou *centre de masse* de l'objet.



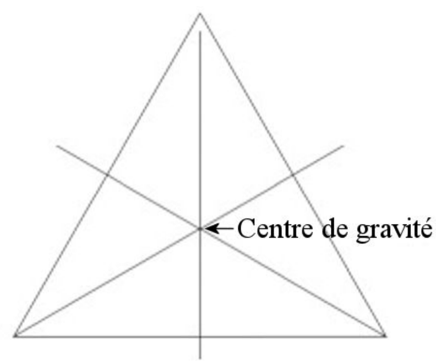
On verra un peu plus loin comment calculer la position de ce centre de gravité. En attendant, on va utiliser seulement des objets ayant des formes symétriques. Dans ces cas, le centre de gravité est simplement au croisement des axes de symétrie de l'objet.

Centre de gravité et axe de symétrie

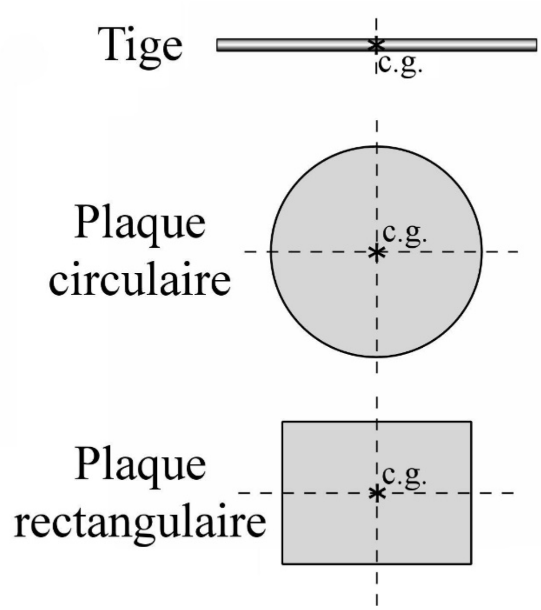
Si l'objet possède un axe de symétrie, le centre de gravité doit être sur cet axe. S'il y a plusieurs axes de symétrie, le centre de gravité est au croisement des axes de symétrie.

Il n'y a pas que la forme de l'objet qui doit être symétrique, la densité de l'objet doit l'être aussi. Si l'objet a une forme symétrique, mais a une masse volumique plus grande d'un côté de l'axe que de l'autre, alors la symétrie est brisée et il n'y a pas d'axe de symétrie.

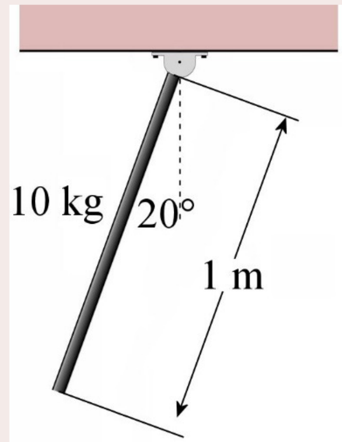
Cette simple utilisation de la symétrie nous permet donc de trouver le centre de gravité d'objets simples sans devoir faire de longs calculs pour le trouver. Prenons une plaque triangulaire par exemple. Il y a trois axes de symétrie sur cette plaque en forme de triangle équilatéral. Le centre de gravité est au croisement de ces axes.



En utilisant ce truc, on peut donc trouver le centre de gravité de plusieurs objets. On va se contenter ici de tiges ou de plaques.

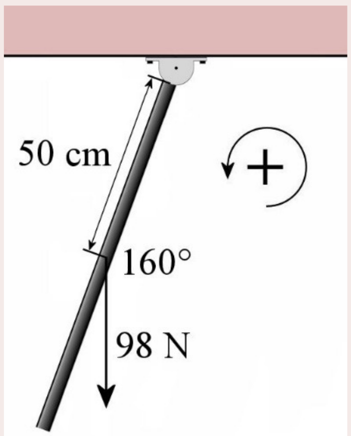


Exemple 9.1.4



Une tige de 10 kg est fixée à un pivot tel qu'illustré sur la figure. Quel est le moment de force fait par la force de gravitation agissant sur la tige ?

Pour calculer le moment de force fait par la gravitation, on fait comme si toute la force de gravitation agissait au centre de gravité (qui est au milieu de la tige). On a donc la situation montrée sur la figure de gauche.

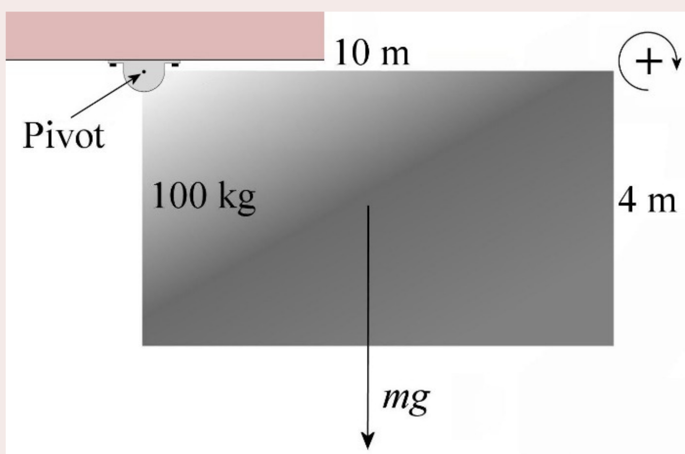


Le moment de force est donc

$$\begin{aligned}\tau &= mgr_{cm}\sin\phi \\ &= 10kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot 0{,}5m \cdot \sin 160° \\ &= 16{,}76Nm\end{aligned}$$

Exemple 9.1.5

Une plaque métallique de 100 kg est fixée à un pivot par un coin tel qu'illustré sur la figure. Quel est le moment de force fait par la force de gravitation agissant sur la plaque ?

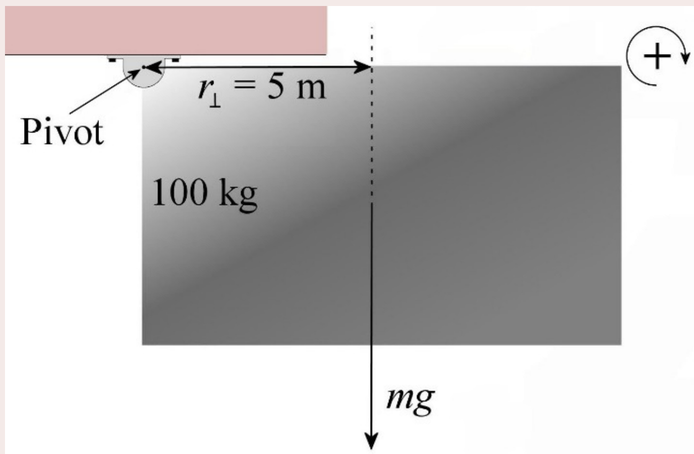


Encore une fois, on fait comme si toute la force de gravitation s'appliquait au centre de gravité, comme on l'a montré sur la figure.

Pour calculer le moment de force, on devrait calculer la distance entre le centre de gravité et l'axe ainsi que l'angle entre la force et la ligne reliant l'axe et le centre de gravité. Quand cela arrive, il y a de bonnes chances que la formule

$$\tau = Fr_\perp$$

permette de calculer plus simplement le moment de force. Dans cette situation, le bras de levier ($r_\perp$) est de 5 m selon ce qu'on peut voir sur la figure suivante.



Le moment de force fait par la force de gravitation est donc

$$\begin{aligned}\tau &= Fr_\perp \\ &= (mg)\, r_\perp \\ &= \left(100kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\right) \cdot 5m \\ &= 4900Nm\end{aligned}$$

9.2 L'ÉQUILIBRE DE ROTATION

Condition d'équilibre

Quand un corps est en équilibre de rotation, la somme des moments de forces sur cet objet doit être nulle.

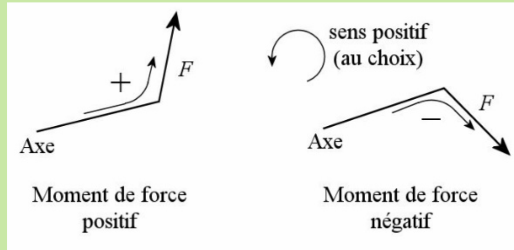
Conditions d'équilibre de rotation

$$\sum \tau = 0$$

On peut résoudre des problèmes en utilisant la méthode de résolution suivante.

1) Trouver toutes les forces agissant sur le ou les corps qu'on étudie.

2) Calculer le moment de force de chacune de ces forces, en prenant soin de donner le bon signe au moment de force.



3) Faites votre équation de l'équilibre de rotation

$$\sum \tau = 0$$

4) Résoudre cette équation pour trouver l'inconnu.

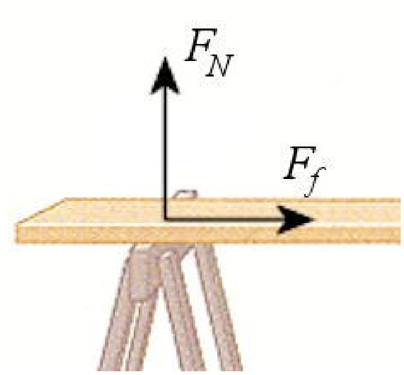
Force entre deux objets en contact

Parmi les forces, il y a des forces de contact. Voici quelques précisions.

Deux objets en contact, sans fixation

On a déjà vu les forces entre deux objets quand ils sont simplement en contact. Ce sont la normale et la friction.

Ce sont les forces présentes quand les deux objets ne sont pas fixés ensemble. Cela signifie qu'il n'y a pas de clous, pas de vis, pas de soudures ou autres trucs du genre. Les objets se touchent simplement.

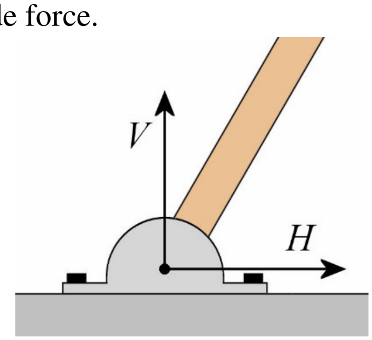


www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/cat-walks-along-uniform-plank-400-m-long-amass-700-kg-plank-supported-two-sawhorses-one-04-q844008

Les pivots

Parfois, les deux objets sont reliés ensemble par un pivot. Ce pivot fixe les deux objets ensemble, mais permet aux deux objets de tourner librement. Le pivot peut alors exercer une force (qui en en fait une normale), mais pas de moment de force.

La force normale faite par le pivot peut être dans n'importe quelle direction. On va séparer cette force entre les objets en deux composantes. Il est habituel d'appeler ces deux composantes H, pour la composante horizontale, et V, pour la composante verticale.



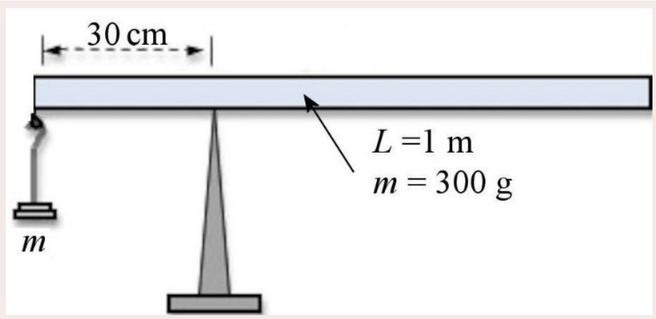
Dans les chapitres précédents, la normale devait toujours être positive parce qu'on tenait déjà compte de la direction de la force. Toutefois, il est très difficile de connaitre la direction de la normale ici puisque la normale peut être dans n'importe quelle direction avec un pivot. On va donc supposer que les composantes sont positives, mais il sera alors possible qu'on obtienne alors des valeurs négatives pour les composantes H et V. Si on obtient une réponse négative, c'est que la composante est dans la direction opposée à celle supposée.

Quand il n'y a pas d'axe de rotation

Le calcul des moments de force nous amène à chercher un axe de rotation, ce qui n'est pas toujours évident. Si une échelle est posée sur un mur et qu'on tente de faire les équations des moments de force sur l'échelle, on peut se demander où est l'axe de rotation. En fait, on peut mettre l'axe de rotation où on veut. L'idéal est de placer l'axe de rotation à l'endroit où il y a le plus de forces inconnues qui s'appliquent. Cela simplifie un peu les équations à résoudre puisque les moments de force faits par ces forces sont alors nuls.

Exemple 9.2.1

Quelle doit être la valeur de m pour que cette tige soit en équilibre ?



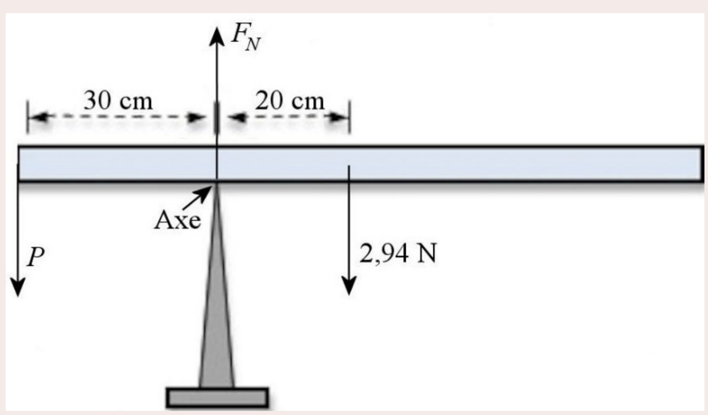
www.webassign.net/labsgraceperiod/ncsulcpmech2/lab_6/manual.html

Il y a 3 forces sur la tige.

1- La force de gravitation sur la tige ($0,3kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 2,94N$).
2- La force normale faite par le pivot (F_N).
3- La force faite par la masse inconnue, qui est égale au poids de cette masse (P).

La figure illustre les forces sur cette tige.

Comme indiqué sur la figure, l'axe de rotation est au pivot.



Le moment de force fait par le poids de la tige est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= F_1 r_1 \sin\theta_1 \\ &= -2,94N \cdot 0,2m \cdot \sin 90° \\ &= -0.588Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la normale est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= F_2 r_2 \sin\theta_2 \\ &= F_N \cdot 0m \cdot \sin\theta_2 \\ &= 0Nm\end{aligned}$$

(On a toujours 0 quand le point d'application de la force est sur l'axe de rotation.)

Le moment de force fait par le poids inconnu est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_3 \sin\theta_3 \\ &= P \cdot 0,3m \cdot \sin 90° \\ &= P \cdot 0,3m\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\begin{gathered}\sum \tau = 0 \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \\ -0.588Nm + 0Nm + P \cdot 0,3m = 0\end{gathered}$$

On peut maintenant isoler *P*.

$$\begin{gathered}-0.588Nm + P \cdot 0,3m = 0 \\ P \cdot 0,3m = 0.588Nm \\ P = 1,96N\end{gathered}$$

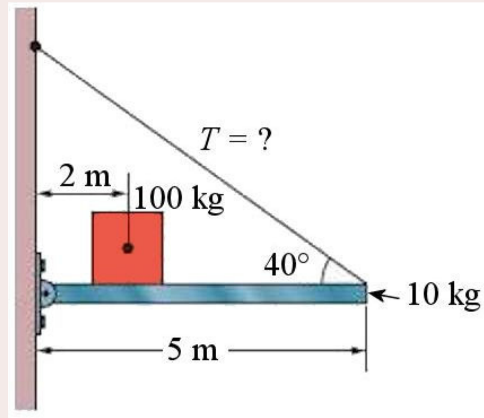
On peut alors trouver la masse inconnue *m*

$$\begin{gathered}P = 1,96N \\ m \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = 1,96N \\ m = 0,2kg\end{gathered}$$

La masse suspendue doit donc être de 200 g pour qu'il y ait équilibre.

Exemple 9.2.2

Quelle est la force exercée par la corde qui supporte cette tige ? (La poutre est fixée par un pivot au mur.)

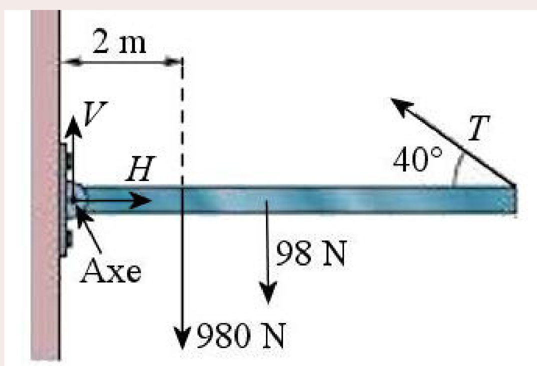


www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2013-november-04

Il y a 4 forces sur la poutre.

1- Le poids de la poutre ($10kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 98N$).
2- La force faite par l'objet de 100 kg, qui est égal au poids de cet objet ($100kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 980N$).
3- La force faite par le pivot (*H* et *V*).
4- La force faite par la corde (*T*).

On a donc les forces suivantes sur la poutre.



Le moment de force fait par le poids de la poutre

$$\begin{aligned}\tau_1 &= F_1 r_1 \sin\theta_1 \\ &= -98N \cdot 2,5m \cdot \sin 90° \\ &= -245Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par le poids du 100 kg est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= F_2 r_2 \sin\theta_2 \\ &= -980N \cdot 2m \cdot \sin 90° \\ &= -1960Nm\end{aligned}$$

Les moments de force faits par les forces H et V sont nuls puisque ces forces s'appliquent directement sur l'axe de rotation.

$$\tau_3 = 0$$

Le moment de force fait par la force exercée par la corde est

$$\begin{aligned}\tau_4 &= F_4 r_4 \sin\theta_4\\ &= T \cdot 5m \cdot \sin 40°\\ &= T \cdot 3,214m\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

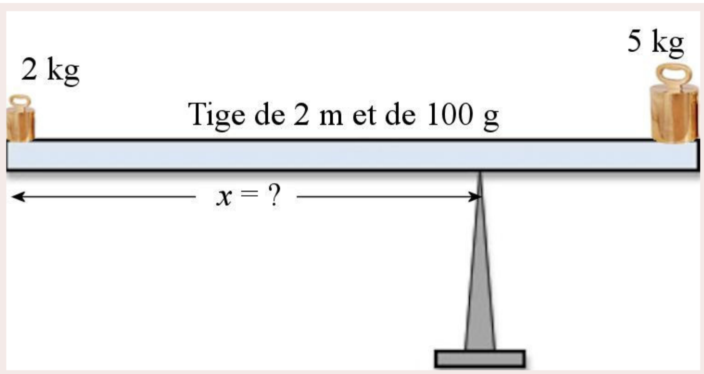
$$\sum \tau = 0$$
$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 0$$
$$-245Nm + -1960Nm + 0Nm + T \cdot 3,214m = 0$$

On isole T pour trouver la force faite par la corde.

$$-245Nm + -1960Nm + 0Nm + T \cdot 3,214m = 0$$
$$-2205Nm + T \cdot 3,214m = 0$$
$$T \cdot 3,214m = 2205Nm$$
$$T = 686,06N$$

Exemple 9.2.3

Quelle doit être la valeur de x pour que cette tige soit en équilibre ?

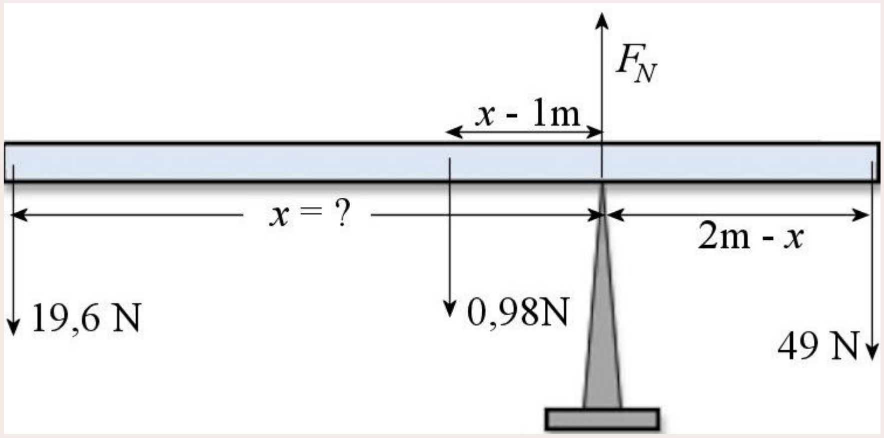


www.webassign.net/labsgraceperiod/ncsulcpmech2/lab_6/manual.html

Il y a 4 forces sur la tige.

1- La force de gravitation sur la tige ($0,1kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 0,98N$).
2- La force normale faite par l'objet de 2 kg, qui est égal au poids de cet objet ($2kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 19,6N$).
3- La force normale faite par l'objet de 5 kg, qui est égal au poids de cet objet. ($5kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 49N$).
4- La force normale faite par le pivot (F_N).

On a donc les forces suivantes sur la tige.



Le moment de force fait par le poids de la tige (0,98 N) est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= F_1 r_1 \sin\theta_1 \\ &= 0{,}98N \cdot (x - 1m) \cdot \sin 90° \\ &= 0{,}98N \cdot (x - 1m)\end{aligned}$$

Le moment de force fait par le poids de 2 kg (19,6 N) est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= F_2 r_2 \sin\theta_2 \\ &= 19{,}6N \cdot x \cdot \sin 90° \\ &= 19{,}6N \cdot x\end{aligned}$$

Le moment de force fait par le poids de 5 kg (49 N) est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_3 \sin\theta_3 \\ &= -49N \cdot (2m - x) \cdot \sin 90° \\ &= -49N \cdot (2m - x)\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la normale est nul puisque cette force s'applique sur l'axe.

$$\tau_4 = 0Nm$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\begin{gathered}\sum \tau = 0 \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 0 \\ 0{,}98N \cdot (x - 1m) + 19{,}6N \cdot x + -49N \cdot (2m - x) + 0Nm = 0\end{gathered}$$

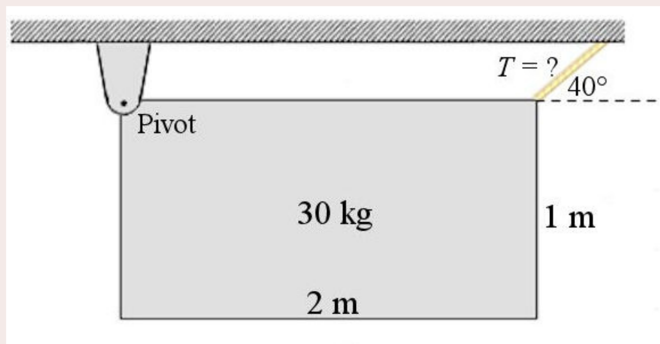
Il ne reste qu'à isoler *x*.

$$19,6N\cdot x+0,98N\cdot(x-1m)+-49N\cdot(2m-x)=0$$
$$19,6N\cdot x+0,98N\cdot x-0,98Nm-98Nm+49N\cdot x=0$$
$$19,6N\cdot x+0,98N\cdot x-98,98Nm+49N\cdot x=0$$
$$19,6N\cdot x+0,98N\cdot x+49N\cdot x=98,98Nm$$
$$x\cdot(19,6N+0,98N+49N)=98,98Nm$$
$$x\cdot 69,58N=98,98Nm$$
$$x=1,4225m$$

Le pivot doit donc être à 1,4225 m du bout de la tige pour qu'il y ait équilibre.

Exemple 9.2.4

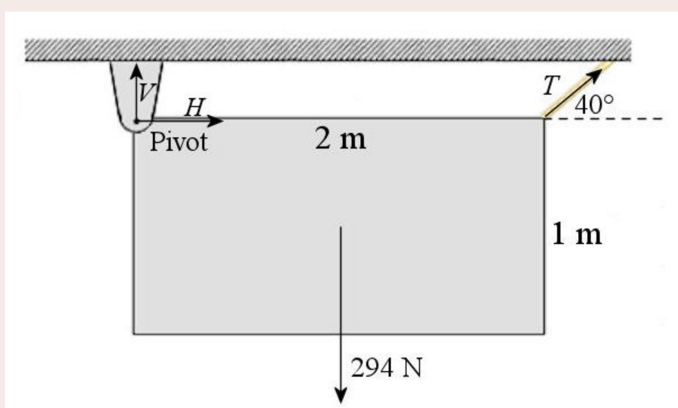
Quelle est la force exercée par la corde qui supporte cette plaque de métal ?



Il y a 3 forces sur la plaque.

1- La force de gravitation sur la plaque ($30kg\cdot 9,8\frac{N}{kg}=294N$).
2- La force faite par le pivot (*H* et *V*).
3- La force faite par la corde (*T*).

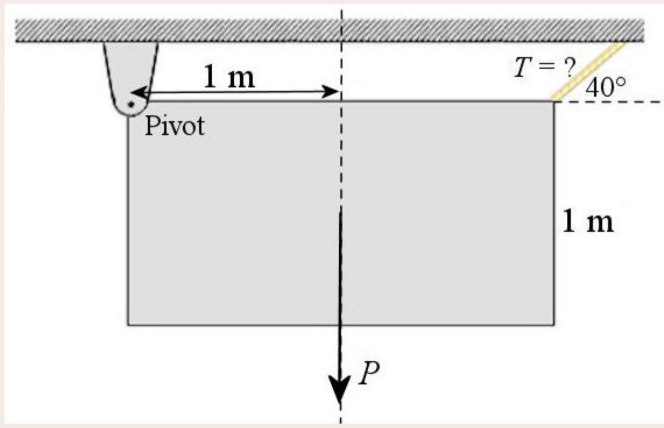
On a donc les forces suivantes sur la tige.



Calculons premièrement le moment de force fait par la gravitation.

$$\tau_1=F_1r_1\sin\theta_1$$

On a affaire au cas où, pour calculer le moment de force, on doit trouver r et θ avec les informations données. Dans ce cas, on peut souvent calculer le moment de force plus rapidement en trouvant le bras de levier. Ce bras de levier est



Le moment de force fait par le poids de la plaque est donc

$$\begin{aligned}\tau_1 &= F_1 r_{1\perp} \\ &= -294N \cdot 1m \\ &= -294Nm\end{aligned}$$

Les moments de force faits par H et V sont nuls puisque ces forces s'appliquent sur l'axe.

$$\tau_2 = 0Nm$$

Le moment de force fait par la tension de la corde est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_3 \sin\theta_3 \\ &= T \cdot 2m \cdot \sin 140° \\ &= T \cdot 1,2856m\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\begin{gathered}\sum \tau = 0 \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \\ -294Nm + 0Nm + T \cdot 1,2856m = 0\end{gathered}$$

Il ne reste qu'à isoler T.

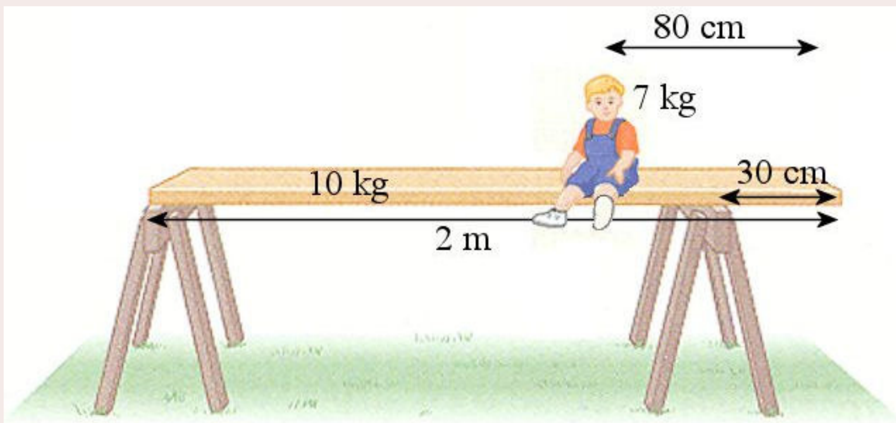
$$\begin{gathered}-294Nm + T \cdot 1,2856m = 0 \\ T \cdot 1,2856m = 294Nm \\ T = 228,7N\end{gathered}$$

Parfois, pour résoudre, il faut aussi utiliser le fait que la somme des forces est aussi égale à 0 à l'équilibre.

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

Exemple 9.2.5

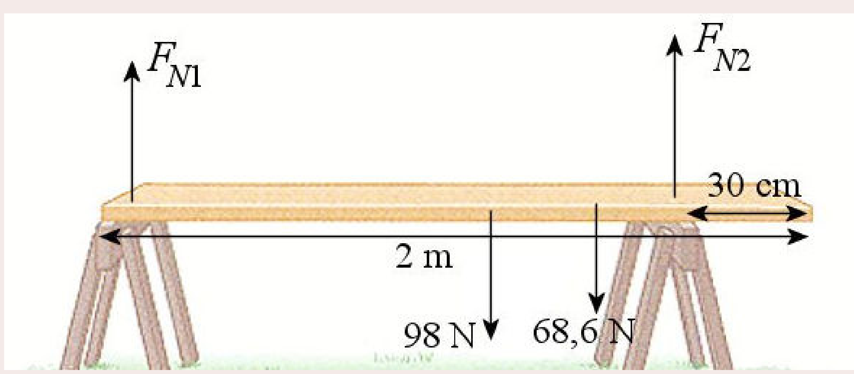
Dans la situation suivante, quelle est la force faite sur la planche par les deux supports qui soutiennent la planche ? Il n'y a pas de friction entre les poteaux et la planche.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/cat-walks-along-uniform-plank-400-m-long-amass-700-kg-plank-supported-two-sawhorses-one-04-q844008
et
whs.wsd.wednet.edu/faculty/busse/mathhomepage/busseclasses/apphysics/studyguides/chapter8/rotationalequilibrium2.html

Il y a 4 forces sur la planche.

1) La force de gravitation sur la planche de 10 kg ($10kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 98N$).
2) La force normale du support de gauche (F_{N1}).
3) La force normale du support de droite (F_{N2}).
4) La force normale faite par l'enfant de 7 kg, qui est égal au poids de l'enfant. ($7kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 68,6N$).



Il faut premièrement déterminer une position pour l'axe de rotation. On choisit normalement l'endroit où il y a le plus de force inconnue comme axe de rotation. Il y a deux possibilités où il y a une force inconnue, soit au contact de chacun des supports. On va prendre le support de gauche comme axe. (Ç'aurait été tout aussi bon de prendre le support de droite comme axe.)

Le moment de force fait par le poids de la planche est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= Fr_1 \sin\theta_1 \\ &= -98N \cdot 1m \cdot \sin 90° \\ &= -98Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par F_{N1} est nul puisque cette force s'applique sur l'axe.

$$\tau_2 = 0Nm$$

Le moment de force fait par F_{N2} est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_3 \sin\theta_3 \\ &= F_{N2} \cdot 1,7m \cdot \sin 90° \\ &= F_{N2} \cdot 1,7m\end{aligned}$$

Le moment de force fait par le bébé est

$$\begin{aligned}\tau_4 &= F_4 r_4 \sin\theta_4 \\ &= -68,6N \cdot 1,2m \cdot \sin 90° \\ &= -82,32Nm\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\begin{gathered}\sum \tau = 0 \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 0 \\ -98Nm + 0Nm + F_{N2} \cdot 1,7m - 82,32Nm = 0\end{gathered}$$

Cette équation nous permet de trouver F_{N2}.

$$\begin{gathered}-98Nm + 0Nm + F_{N2} \cdot 1,7m - 82,32Nm = 0 \\ -180,32Nm + F_{N2} \cdot 1,7m = 0 \\ F_{N2} \cdot 1,7m = 180,32Nm \\ F_{N2} = 106,07N\end{gathered}$$

On a F_{N2}, mais on n'a pas F_{N1}. On trouve cette normale avec la somme des forces en y.

$$\sum F_y = -98N + F_{N1} + F_{N2} - 68,6N = 0$$

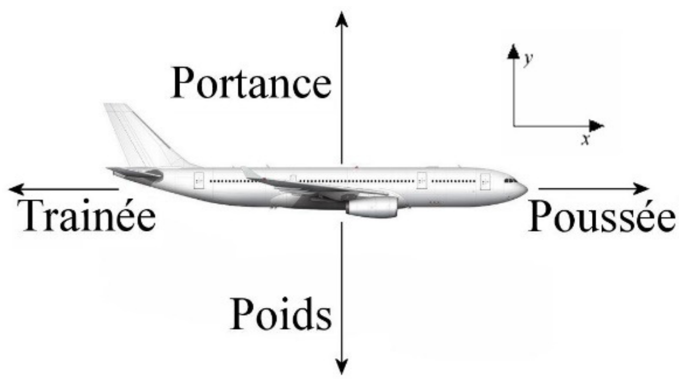
On a alors

$$-98N + F_{N1} + F_{N2} - 68,6N = 0$$
$$-98N + F_{N1} + 106,07N - 68,6N = 0$$
$$F_{N1} - 60,53N = 0$$
$$F_{N1} = 60,53N$$

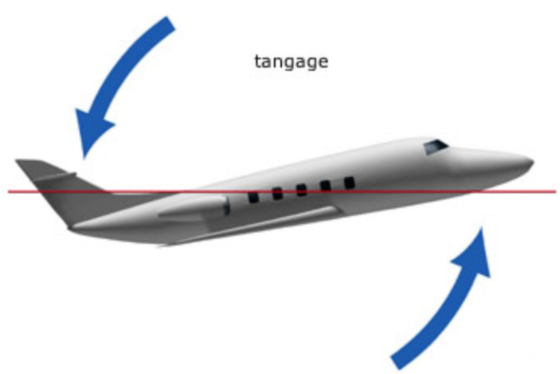
9.3 L'ÉQUILIBRE DE L'AVION

Équilibre longitudinal

Un avion doit être en équilibre de rotation. Pour analyser cet équilibre, examinons les moments de forces faits par les 4 forces qui agissent sur l'avion en vol.



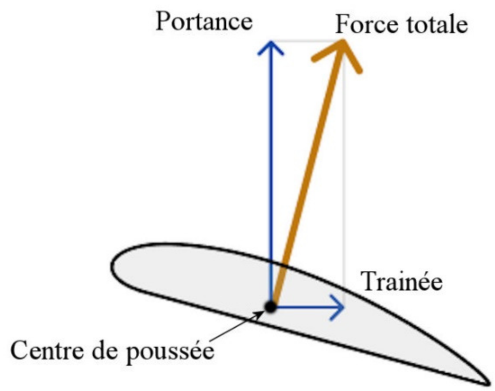
On va s'intéresser principalement à la rotation dans cette direction (tangage ou *pitch*)



www.ikonet.com/fr/ledictionnairevisuel/transport-et-machinerie/transport-aerien/mouvements-de-avion.php

Pour calculer les moments de forces, on doit avoir un axe de rotation. Mais où est l'axe de rotation d'un avion ? En fait, on peut prendre n'importe quel point comme axe de rotation. Ici, on va prendre un point qui s'appelle le centre de poussée de la portance (*centre de la portance* aurait été mieux, mais on l'appelle *centre de poussée* même si on fait référence à la portance et non à la poussée des moteurs.)

La force de portance agit partout sur l'aile : près du bord d'attaque, au milieu, près du bord de fuite, près du fuselage, près du bout de l'aile. Tout comme avec la gravitation, on peut remplacer toutes ces petites forces par une seule force qui s'applique à un endroit très précis sur l'aile. Ce point est choisi pour que l'effet de cette seule force soit identique à l'effet produit par toutes les petites forces. Cette position peut être déterminée grâce à des calculs (assez complexes), des simulations ou des expériences en soufflerie. L'endroit où cette force s'applique est le centre de poussée.

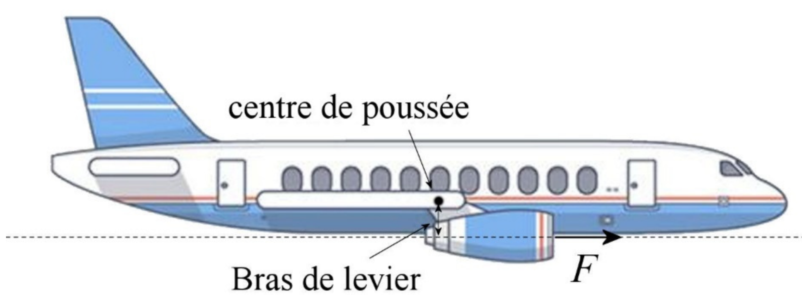


La position de ce point change un peu avec l'angle d'attaque et la vitesse, mais on va faire comme s'il restait toujours à la même place.

Comme le centre de poussée est notre axe de rotation, le moment de force fait par la portance est nul puisque la distance entre le point d'application de la force et l'axe est nulle (le point d'application de la force, c'est notre axe de rotation.)

Examinons maintenant le moment de force fait par les autres forces.

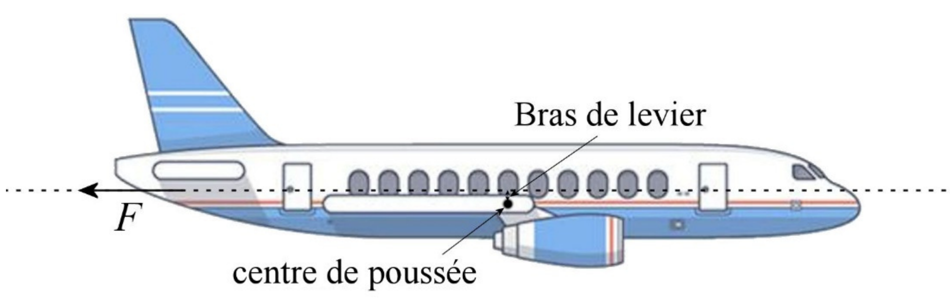
Le moment de force fait par la poussée se trouve en multipliant la force de poussée par le bras de levier montré sur cette figure.



www.pinterest.ca/pin/486036984788436613/

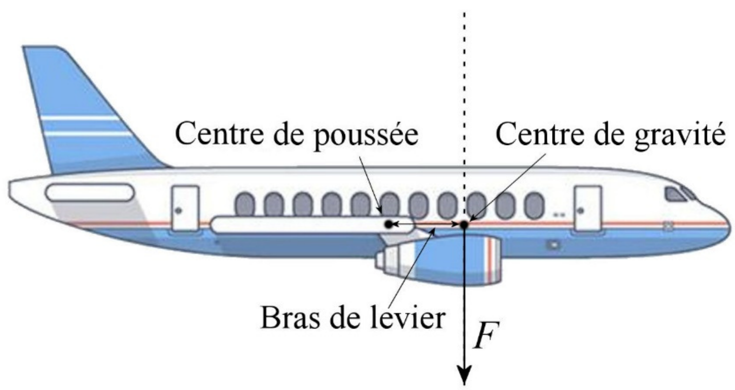
Comme le bras de levier est très petit et que la force est beaucoup plus petite que la portance et le poids (rappelez-vous, la trainée est égale à la portance divisée par la finesse, qui est aux environs de 20), le moment de force est relativement petit.

Le moment de force fait par la trainée est aussi petit parce que la force de trainée est beaucoup plus petite que la portance ou le poids et aussi parce que le bras de levier est petit.



On peut donc simplifiant un peu en disant que les moments de force faits par la poussée et la trainée sont assez petits pour qu'on les néglige (mais rappelons-nous quand même qu'ils ne sont pas nuls).

Il reste le moment de force fait par la gravitation. Cette force s'applique au centre de gravité.



Si le centre de gravité est devant le centre de poussée (comme sur la figure), alors l'avion cherche à tourner pour que le nez descende.

Si le centre de gravité est derrière le centre de poussée, alors l'avion cherche à tourner pour que le nez de l'avion monte.

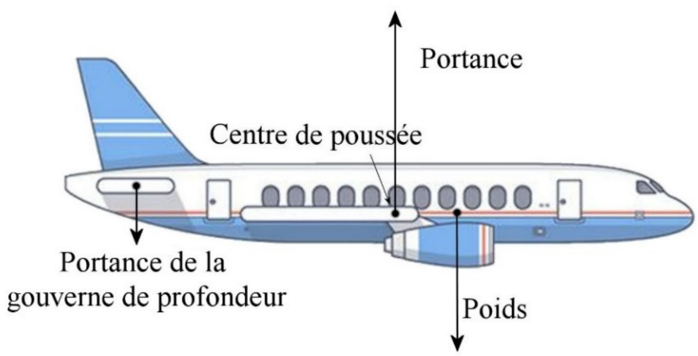
Si le centre de gravité est exactement à la même position en x que le centre de poussée, alors le moment de force est nul et l'avion ne cherche pas à tourner. On dirait donc qu'il faut que le centre de gravité soit à la même position en x que le centre de poussée pour qu'il y ait équilibre de rotation.

Évidemment, cet équilibre serait beaucoup trop précaire. Le moindre mouvement de passagers dans l'avion briserait cet équilibre. Si un passager allait vers l'avant de l'avion, le centre de gravité de l'avion se déplacerait vers l'avant de l'avion, ce qui briserait l'équilibre et l'avion commencerait à piquer du nez. Il faudrait qu'un autre passager se déplace vers l'arrière pour revenir à l'équilibre.

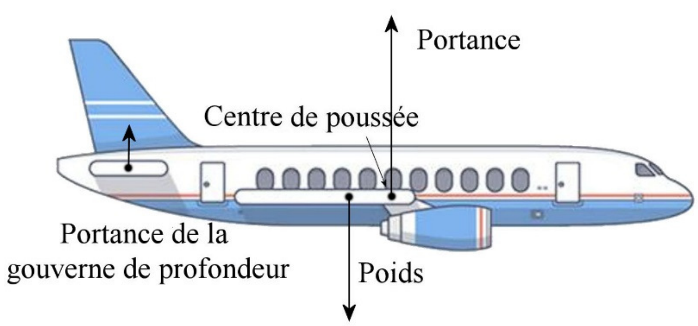
Pour éviter d’avoir un équilibre si fragile, on ajoute une gouverne de profondeur.

www.lavionnaire.fr/CelluleEmpPrim.php

Grâce à la portance de la gouverne de profondeur, on peut générer un moment de force qui va annuler le moment de force fait par le poids de l’avion. Ainsi, si le centre de gravité de l’avion est devant le centre de poussée, la gouverne de profondeur va faire une force vers le bas.



Si le centre de gravité de l’avion est derrière le centre de poussée, la gouverne de profondeur va faire une force vers le haut.

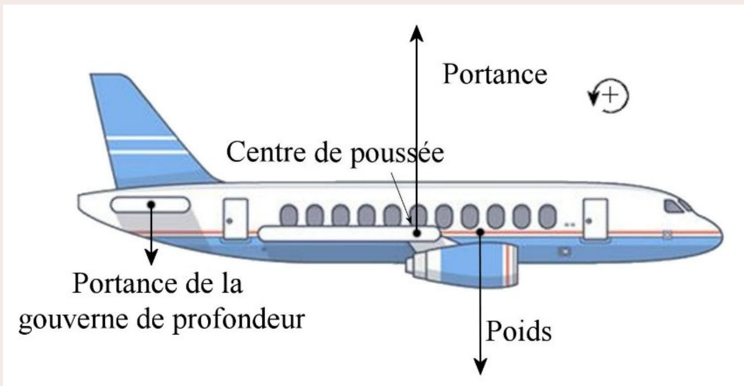


Selon la position de centre de gravité, on ajuste (trim) l’angle d’attaque de la gouverne pour obtenir la bonne force pour qu’il y ait équilibre.

Notez que la portance totale (portance des ailes et la portance de la gouverne de profondeur) est toujours égale au poids en vol horizontal. Toutefois, la répartition de la portance entre les ailes et la gouverne de profondeur change selon la position du centre de gravité.

Exemple 9.3.1

Le centre de gravité d'un avion de 20 000 kg est situé 2 m devant le centre de poussée. Quel doit être la portance des ailes et de la gouverne de profondeur si la distance entre le centre de poussée de la gouverne de profondeur et le centre de poussée des ailes est de 8 m ?



S'il y a équilibre de rotation, alors la somme des moments de force est nul.

$$\sum \tau = 0$$

Il y a 3 forces sur l'avion (qui font un moment de force non négligeable).

1- Le poids (P).
2- La portance faite par les ailes (F_L).
3- La portance faite par la gouverne de profondeur (F_{LG}).

Le poids de l'avion est

$$\begin{aligned} P &= 20\,000kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \\ &= 196\,000N \end{aligned}$$

Le moment de force fait par le poids est (on utilise la direction positive montrée sur la figure)

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -F_1 r_{1\perp} \\ &= -196\,000N \cdot 2m \\ &= -392\,000Nm \end{aligned}$$

Le moment de force fait par la portance des ailes est nul puisque le poids d'application de la force est directement sur l'axe de rotation.

Le moment de force fait par la portance de la gouverne de profondeur est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_{3\perp}\\ &= F_{LG}\cdot 8m\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\sum\tau = 0$$
$$\tau_1+\tau_2+\tau_3 = 0$$
$$-392\,000Nm + 0Nm + F_{LG}\cdot 8m = 0$$

Il ne reste qu'à isoler F_{LG}.

$$-392\,000Nm + F_{LG}\cdot 8m = 0$$
$$F_{LG}\cdot 8m = 392\,000Nm$$
$$F_{LG} = \frac{392\,000Nm}{8m}$$
$$F_{LG} = 49\,000N$$

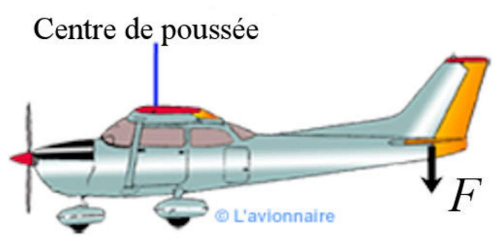
Pour trouver la portance faite par les ailes, on fait la somme des forces verticales.

$$F_L - mg - F_{LG} = 0$$
$$F_L - 196\,000N - 49\,000N = 0$$
$$F_L = 245\,000N$$

La gouverne fait donc une force de 49 000 N vers le bas et les ailes font une force de 245 000 N vers le haut (196 000 N pour soutenir le poids de l'avion et 49 000 N pour compenser la force faite par la gouverne vers le bas).

Contrôle du tangage

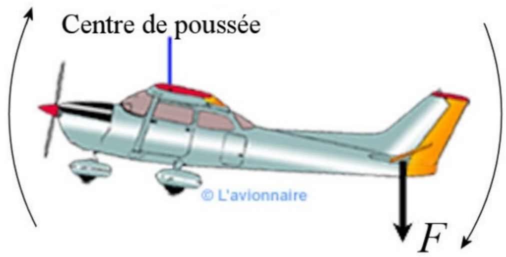
À l'équilibre, on a toujours une force faite par la gouverne dirigée vers le bas puisque le centre de gravité est toujours devant le centre de poussée. (Du moins pour les avions civils, On verra pourquoi plus loin).



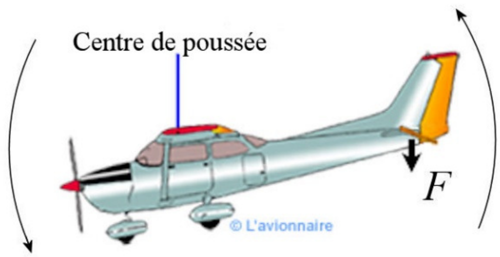
www.lavionnaire.fr/CelluleGouvernes.php

Si le centre de gravité de l'avion change de place (parce que des passagers se déplacent dans l'avion par exemple), on peut garder l'équilibre en modifiant l'angle d'attaque de la gouverne de profondeur pour changer la portance de sorte que le moment de force fait par la portance de la gouverne annule toujours le moment de force fait par la gravitation.

On peut facilement briser cet équilibre avec la gouverne de profondeur pour que l'avion fasse une rotation. Si on diminue l'angle d'attaque de la gouverne de profondeur, on va augmenter la portance vers le bas faite par la gouverne. Il y aura alors un moment de force qui va faire monter le nez de l'avion.



Si on augmente l'angle d'attaque de la gouverne de profondeur, on va diminuer la portance vers le bas faite par la gouverne (et peut-être même avoir une portance vers le haut). Il y aura alors un moment de force qui va faire descendre le nez de l'avion.

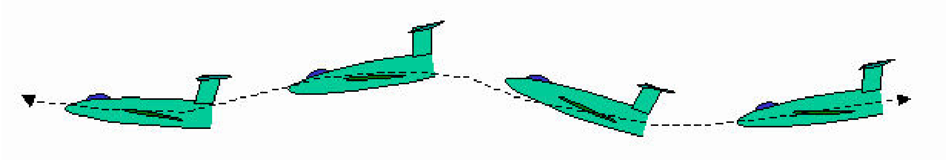


Pourquoi le centre de gravité doit-il être devant le centre de poussée ?

Quand le centre de gravité est devant le centre de poussée, la gouverne de profondeur doit faire une force vers le bas. Cela ne semble pas une bonne idée au départ puisque cette force vers le bas doit être annulée par la portance des ailes. Cela signifie qu'il faut plus de portance pour les ailes et cela augmente la vitesse de décrochage.

Toutefois, cette configuration est avantageuse puisqu'elle donne un équilibre stable à l'avion. Pour comprendre ce que cela veut dire, imaginons qu'on ne touche pas au contrôle de la gouverne pendant le vol de l'avion. Si l'avion commence à piquer du nez, alors la vitesse de l'avion va augmenter et cela va faire augmenter la portance des ailes et de la gouverne. Puisque la force sur la gouverne vers le bas devient plus grande, le moment de force fait par la gouverne augmente, ce qui relève le nez de l'avion. L'avion qui pique du nez remonte donc tout seul. Si le nez de l'avion commence à monter, alors la vitesse de l'avion va diminuer et cela va faire diminuer la portance des ailes et de la gouverne. Puisque la force sur la gouverne vers le bas devient plus petite, le moment de force fait par la gouverne diminue, ce qui fait descendre le nez de l'avion. L'avion qui se relève du nez redescend donc tout seul. Ainsi, la moindre perturbation de l'équilibre aura tendance à se corriger toute seule.

En fait, si on ne touche pas à la gouverne de profondeur, l’avion va suivre une trajectoire phugoïde, qui est une trajectoire où l’avion oscille autour d’une altitude moyenne.



fr.wikipedia.org/wiki/Phugo%C3%AFde

Si le centre de gravité est derrière le centre de gravité, alors la force faite par la gouverne de profondeur doit être vers le haut. Quand l’avion pique du nez, la vitesse augmente et la portance de la gouverne augmente. Comme cette force fait un moment de force qui fait descendre le nez de l’avion, l’avion pique du nez encore plus et ne se redresse pas. C’est donc un équilibre instable. La moindre perturbation de l’équilibre aura tendance à s’amplifier plutôt que se corriger.

Pour les avions civils, on cherche la configuration plus stable en ayant un centre de gravité devant le centre de poussée. Toutefois, on choisit la parfois la configuration instable avec une centre de gravité derrière le centre de poussée pour certains avions militaires pour avoir plus de manœuvrabilité.

Contrôle du tangage sans gouverne

En cas de problème, on peut également contrôler l’avion en utilisant d’autres forces. C’est ce que les pilotes du vol 232 d’United Airlines ont dû faire le 19 juillet 1989. Les problèmes ont commencé quand la soufflante d’un moteur a subi une défaillance. Des pales de la soufflante du moteur central se sont brisées et les débris ont été projetés à grande vitesse dans plusieurs directions. Sur un DC-10, ce moteur est situé juste à la base de la gouverne de direction.

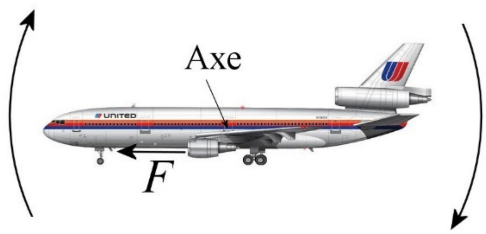
travelupdate.com/dc-10-video/

Les morceaux des pales ont traversé le fuselage et ont sectionné les conduits de chacun des 3 systèmes hydrauliques qui permettent de contrôler les gouvernes et les ailerons. Le système hydraulique est tellement essentiel au bon fonctionnement de l’appareil qu’il y a 3 systèmes indépendants pour être certain qu’on pourra toujours contrôler l’avion même s’il y a défaillance de 2 systèmes. On estimait que la probabilité de défaillance des 3 systèmes en même temps était de 1 sur un milliard.

Les pilotes ne peuvent donc plus contrôler l'avion avec les ailerons et les gouvernes. Sans gouverne, l'avion oscille de haut en bas en suivant la trajectoire phugoïde. Si le centre de gravité avait été derrière le centre de poussée, l'avion serait parti en montant (pour finir par décrocher) ou aurait piqué du nez assez rapidement.

Toutefois, les pilotes ont toujours un certain contrôle puisque les 2 moteurs sous les ailes fonctionnaient encore très bien. En modifiant la poussée des moteurs, les pilotes (aidé d'un passager qui était pilote instructeur de DC-10) ont pu amener l'avion jusque sur la piste de Sioux City, Iowa.

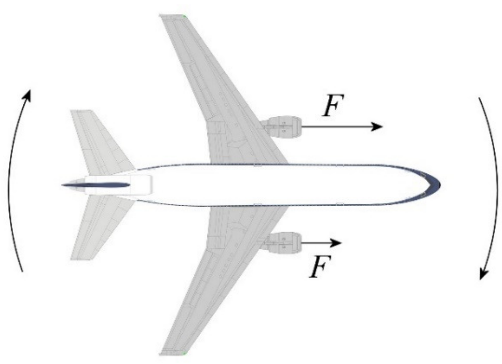
Pour contrôler le tangage, ils augmentaient ou diminuaient la poussée de moteur. Comme les moteurs sont sous les ailes, une augmentation de poussée créait un moment de force qui fait monter le nez de l'avion.



www.pinterest.ca/pin/498562621230177566/

En diminuant la poussée des moteurs, ils pouvaient faire descendre le nez de l'avion. Ils pouvaient donc contrôler l'altitude de l'avion.

Pour contrôler la direction, ils pouvaient augmenter la poussée d'un moteur et diminuer la poussée de l'autre moteur. Ces forces généraient donc un moment de force qui donnait un lacet à l'avion.



www.aim72.co.uk/page13.html

Avec un lacet, une aile est plus exposée à l'air que l'autre ce qui génère une différence de portance entre les ailes. Cette différence de portance fait alors incliner l'avion et l'avion tourne.

Toutefois, sans système hydraulique, ils ne pouvaient pas sortir les volets et les becs de bord d'attaque. Ils ont donc dû se poser avec une vitesse assez élevée tout en ayant un

contrôle précaire de l'avion. L'atterrissage s'est malheureusement terminé de façon catastrophique.
https://www.youtube.com/watch?v=zxpE4NKVtnI
184 personnes ont quand même survécu sur les 296 personnes à bord (Mayday, saison 11 épisode 13).

4 ans plus tôt (le 12 aout 1985), les 4 systèmes hydrauliques d'un Boeing 747 ont été endommagés par la rupture de la cloison de pressurisation arrière. Dans ce cas, l'équipage du vol 123 de Japan Airlines n'est pas parvenu à contrôler l'avion et celui-ci s'est écrasé sur le Mont Takamagahara. 520 des 524 personnes à bord de l'avion ont péri. C'est le pire accident de l'histoire impliquant un seul avion. (Mayday, saison 3 épisode 3 et saison 23 épisode 3)

Le 22 novembre 2003, un missile atteint un Airbus A300 de DHL en Irak. L'explosion endommage l'aile gauche et provoque la perte des 3 systèmes hydrauliques de l'avion. Encore une fois, les pilotes peuvent contrôler l'avion avec la poussée des moteurs et parviennent à se poser 16 minutes plus tard. Le tout se termine par une sortie de piste sans conséquences désastreuses (Mayday, saison 3 épisode 2).

Les problèmes du Boeing 737 Max

Les problèmes du Boeing 737 Max ont commencé quand Airbus a commercialisé l'A320Neo en 2010. Cet avion consommait moins de carburant que le Boeing 737 et cela risquait de provoquer un effondrement des ventes du 737. On devait donc améliorer l'efficacité du 737 et on devait le faire rapidement. Le moyen le plus simple consistait à modifier les moteurs du 737.

Pour économiser du carburant, ils devaient donc améliorer l'efficacité des moteurs. L'équation de l'efficacité

$$\eta = \frac{2v}{v_{\text{exp}} + v}$$

montre que l'efficacité augmente si on diminue la vitesse d'expulsion. Si on diminue la vitesse d'expulsion, alors on doit augmenter la quantité d'air qui passe dans le moteur par seconde (qui est R). En effet, l'équation de la poussée

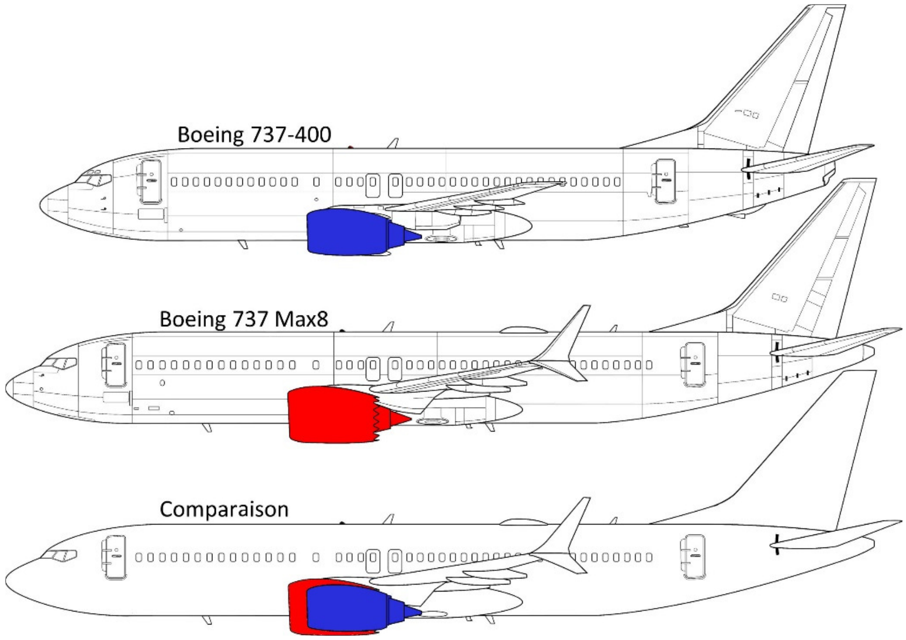
$$F_t = R\left(v_{\text{exp}} - v\right)$$

montre que R doit augmenter si v_{exp} diminue. Or, l'équation de R

$$R = \tfrac{1}{2}\rho A_h\left(v_{\text{exp}} + v\right)$$

montre clairement qu'on doit augmenter l'aire de la soufflante pour augmenter R. Il fallait donc tout simplement installer des moteurs plus gros sur le 737.

Le problème, c'est que la distance entre les ailes et la piste (quand l'avion est au sol) n'était pas assez grande pour qu'on puisse simplement remplacer les anciens moteurs par les nouveaux moteurs. Pour qu'ils ne touchent pas à la piste, on a modifié un peu les fixations des moteurs pour qu'ils soient un peu plus vers le devant de l'avion.



www.allaboutlean.com/boeing-management/boeing-737-400-and-max8-engine-comparison/

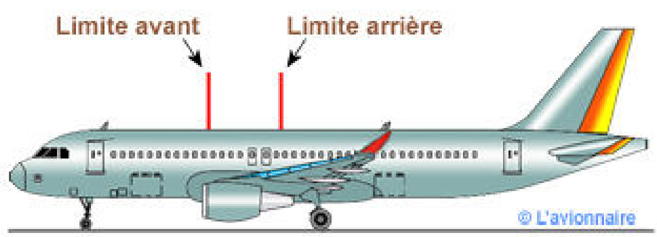
Or, cette modification a fortement modifié l'équilibre de l'avion. La position centre de masse a été déplacée vers l'avant et les moments de force faits par les moteurs, les ailes (qui devaient exercer une force plus grande puisque les moteurs étaient plus lourds) et la trainée (les moteurs et les attaches de moteurs étaient plus grands) ont été modifiés. Les moteurs plus hauts devant les ailes modifiaient également le flux d'air sur les ailes et modifiaient les caractéristiques aérodynamiques de l'avion. Les tests de vol ont rapidement montré qu'en vol à grande incidence (en montée), l'avion avait tendance à trop se cabrer dès qu'on rentrait les volets. Les ingénieurs de Boeing ont alors développé un logiciel (le MCAS pour *Maneuvering Characteristics Augmentation System*) pour aider les pilotes à contrer ce déséquilibre. Ce logiciel surveillait l'inclinaison de l'avion et corrigeait cette inclinaison avec la gouverne de profondeur (en ajustant la compensation, c'est-à-dire le trim) si elle devenait trop grande. Tout fonctionnait bien, sauf en cas de problème avec l'indicateur d'inclinaison utilisé par le logiciel… (Le logiciel utilisait seulement un des indicateurs d'inclinaison.)

C'est ce qui s'est produit le 29 octobre 2018 en Indonésie (vol 610 de Lion Air) (Mayday, épisode 4 saison 21) et le 10 mars 2019 en Éthiopie (vol 302 d'Ethiopian Airlines). Un simple problème d'indicateur d'inclinaison a fait en sorte que le MCAS pensait que l'avion avait un angle d'attaque très élevé alors que ce n'était pas le cas. Le MCAS a alors fait piquer ces avions du nez et provoquer leur écrasement. La manœuvre était soudaine (le MCAS s'active quand on rentre les volets) et les pilotes n'avaient pas été informés de l'existence de ce logiciel. On peut imaginer la surprise des pilotes quand l'avion plongeait subitement vers le sol dès qu'ils rentraient les volets. Le système se désactive si le pilote utilise le compensateur électrique (trim) sur le manche, mais il se réactive soudainement au bout de 5 secondes. Les pilotes tentaient donc d'ajuster le trim pour arrêter la chute et tout redevenait alors normal pendant 5 secondes jusqu'à ce que l'avion plonge de nouveau vers le sol.

Limites pour la position du centre de gravité

Il y a une limite à ce que peut faire la gouverne de profondeur. Par exemple, si le centre de gravité était situé exactement à mi-chemin entre le centre de poussée des ailes et le centre de poussée de la gouverne, alors la portance de la gouverne de profondeur devrait être égale à la portance des ailes. Toutefois, l'aire de la gouverne est nettement plus petite que l'aire des ailes et la gouverne ne pourrait pas faire une portance aussi grande. Cela signifie que le centre de gravité ne peut être trop loin du centre de poussée. Il y a donc des limites à respecter pour la position du centre de gravité. Si le centre de gravité est trop vers l'avant de l'avion, la gouverne ne pourra pas compenser le moment de force fait par le poids et l'avion va piquer du nez. Si le centre de gravité est trop vers l'arrière de l'avion, la gouverne ne pourra pas compenser le moment de force fait par le poids et le nez de l'avion sera toujours vers le haut.

Il est donc très important de garder le centre de gravité de l'avion à l'intérieur de ces limites.



www.lavionnaire.fr/MecaGravite.php

Si le centre de gravité n'est pas à l'intérieur de la plage permise par le fabricant, les conséquences peuvent être catastrophiques.

Le 8 janvier 2003, le vol 5481 d'Air Midwest tente de décoller de l'aéroport de Charlotte en Caroline du Nord alors que la masse de l'avion est 580 livres au-dessus de la masse maximale permise au décollage pour ce Beechcraft 1900D. Comme la masse supplémentaire est située à l'arrière de l'avion, le centre de gravité est trop en arrière de l'avion. Cela fait en sorte que la rotation de l'avion au décollage est trop importante. À une altitude de 90 pieds, l'inclinaison de l'avion est déjà de 20°. Malgré leurs efforts, les pilotes ne parviennent pas à faire redescendre le nez de l'avion. Après une montée de 1150 pieds, l'avion décroche. Les 21 personnes à bord périssent toutes dans l'écrasement. Deux éléments ont contribué à cet écrasement. Premièrement, la position du centre de gravité et la masse ont été calculées avec une formule plus ancienne qui sous-estimait la masse des passagers (les Américains sont de plus en plus gros). Deuxièmement, il y avait eu un entretien de l'avion 2 jours plus tôt et les commandes avaient été mal ajustées et cela empêchait les pilotes de descendre le nez de l'avion (Mayday, épisode 5 saison 5).

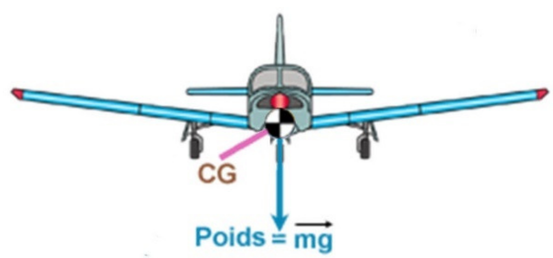
En juillet 2013, un DHC-3 Otter d'école de l'aéroport de Soldotna en Alaska. Ici aussi, le centre de gravité est trop vers l'arrière, ce qui a, encore une fois, provoqué une rotation trop importante lors du décollage. L'avion finit par décrocher et s'écrase 700 m après avoir quitté la piste. Les 10 occupants de l'avion ont péri.

Le 7 aout 1997, un avion-cargo s'écrase au décollage à Miami. L'équipe au sol a modifié la distribution du chargement sans aviser les pilotes. Le centre de masse s'est retrouvé beaucoup plus à l'arrière que prévu, peut-être même à l'extérieur des limites permises. Le « trim » de la gouverne a donc été mal ajusté par les pilotes et le DC-8 s'est beaucoup trop cabré au décollage. Il a alors décroché. Les pilotes sont parvenus à récupérer l'avion, mais il a décroché de nouveau pour finalement s'écraser près d'un centre commercial (Mayday, épisode 5 saison 19).

En février 2005, un Challenger 600 tente de décoller de Teterboro au New Jersey alors que le centre de gravité est beaucoup trop en avant de l'avion. Le nez de l'avion n'a jamais pu lever du sol pour faire la rotation et l'avion a ensuite percuté une clôture et un édifice. 3 personnes ont été blessées lors de la collision.

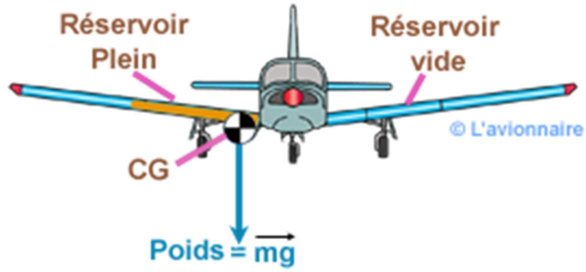
Équilibre transversal

Généralement, l'avion est symétrique. Ainsi, le centre de gravité de l'avion est au centre de l'avion dans le sens transversal. Cela signifie que le centre de gravité n'est pas d'un côté ou de l'autre de l'avion quand on le regarde de face.



www.lavionnaire.fr/MecaGravite.php

Il est possible que le centre de gravité se déplace d'un côté ou de l'autre. Par exemple, cela peut se produire si un réservoir de carburant dans une aile contient davantage de carburant que le réservoir dans l'autre aile.



www.lavionnaire.fr/MecaGravite.php

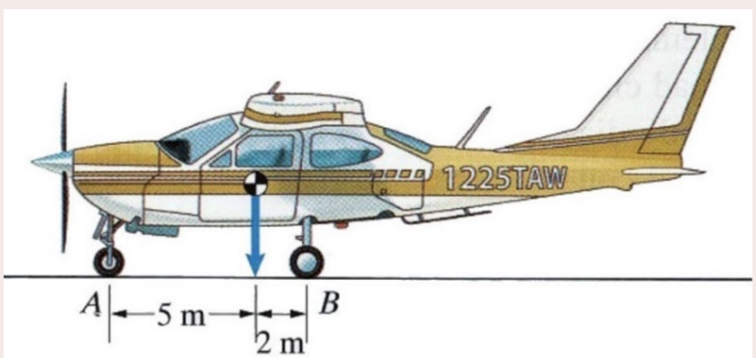
Dans ce cas, le poids de l'avion cherche à faire tourner l'avion (sur la figure, l'avion cherche à tourner dans le sens contraire des aiguilles d'une montre). Pour empêcher cette rotation, on va devoir augmenter la portance de l'aile du côté où est le centre de gravité et diminuer la portance de l'autre aile pour faire un moment de force dans la direction opposée pour faire un moment de force dans la direction opposée. Cela se fait en montant un aileron sur une aile et en descendant l'autre aileron sur l'autre aile, comme quand on veut faire tourner l'avion. On garde donc l'avion en équilibre en tournant constamment le manche d'un côté. Toutefois, cela n'est pas souhaitable puisque l'angle des ailerons fait augmenter la trainée et cela va entrainer une augmentation de la consommation de carburant. On suggère donc de transférer le carburant d'une aile à l'autre pour garder le centre de gravité au centre de l'avion.

Équilibre sur la piste

Quand l'avion est sur la piste, le train d'atterrissage supporte le poids de l'avion. Toutefois, il y a le train avant et le train arrière. Avec nos équations de l'équilibre de rotation, on peut maintenant déterminer quelle proportion du poids de l'avion est supportée par le train arrière et quelle proportion du poids est supportée par le train avant.

Exemple 9.3.2

Quelle proportion du poids de cet avion de 800 kg est soutenue par les trains avant et arrière quand l'avion est au repos ?



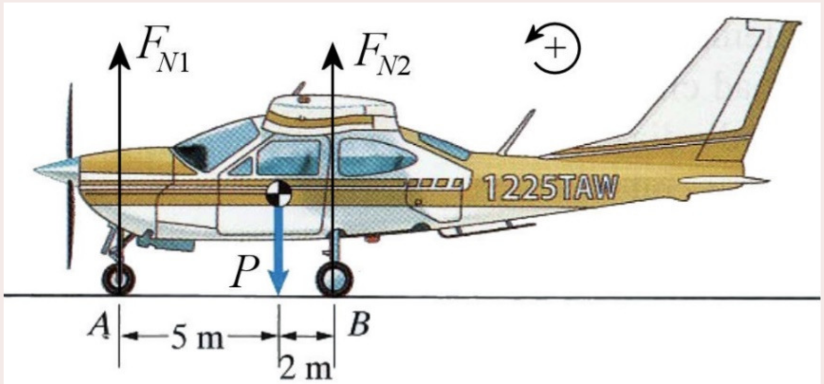
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/183-2800-n-airplane-begins-takeoff-run-t-propeller-exerts-horizontal-force-t-1000-n-neglec-q56576776

S'il y a équilibre de rotation, alors la somme des moments de force est nulle.

$$\sum \tau = 0$$

Il y a 3 forces sur l'avion.

1- Le poids ($800kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 7840N$).
2- La normale faite par le train avant (F_{N1}).
3- La normale faite par le train arrière (F_{N2}).



On va prendre le train avant comme axe de rotation.

Le moment de force fait par le poids de l'avion est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= Fr_{1\perp} \\ &= -7840N \cdot 5m \\ &= -39\,200Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par F_{N1} est nul puisque cette force s'applique sur l'axe.

$$\tau_2 = 0Nm$$

Le moment de force fait par F_{N2} est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_3 \sin\theta_3 \\ &= F_{N2} \cdot 7m \cdot \sin 90° \\ &= F_{N2} \cdot 7m\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\sum \tau = 0$$
$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$
$$-39\,200Nm + 0Nm + F_{N2} \cdot 7m = 0$$

Cette équation nous permet de trouver F_{N2}.

$$-39\,200Nm + 0Nm + F_{N2} \cdot 7m = 0$$
$$F_{N2} \cdot 7m = 39\,200Nm$$
$$F_{N2} = 5600N$$

On a F_{N2}, mais on n'a pas F_{N1}. On trouve cette normale avec la somme des forces en y.

$$\sum F_y = -7840N + F_{N1} + F_{N2} = 0$$

On a alors

$$-7840N + F_{N1} + F_{N2} = 0$$
$$-7840N + F_{N1} + 5600N = 0$$
$$F_{N1} - 2200N = 0$$
$$F_{N1} = 2200N$$

Comme le train avant supporte 2200 N des 7840 N du poids, le train avant supporte 28,6 % du poids de l'avion.

Comme le train arrière supporte 5600 N des 7840 N du poids, le train arrière supporte 71,4 % du poids de l'avion.

Notez que si on déplace le centre de gravité vers l'avant de l'avion, la normale sur le train arrière va diminuer et la normale sur le train avant va augmenter. Une plus grande proportion du poids sera alors soutenue par le train avant.

Si on déplace le centre de gravité vers l'arrière de l'avion, la normale sur le train arrière va augmenter et la normale sur le train avant va diminuer. Une plus grande proportion du poids sera alors soutenue par le train arrière.

Si le centre de gravité était derrière le train arrière, la normale sur le train avant devrait être négative pour qu'il y ait équilibre. Cela voudrait dire que la piste devrait tirer sur le train avant. Évidemment, la piste ne peut pas tirer sur la roue et cela signifie qu'il ne peut pas y avoir d'équilibre quand l'avion est sur la piste si le centre de gravité est derrière le train arrière. Si cela se produit, l'avion va basculer vers l'arrière. Sur la figure, le centre de gravité est passé derrière le train arrière quand on a enlevé les moteurs et l'avion a basculé.

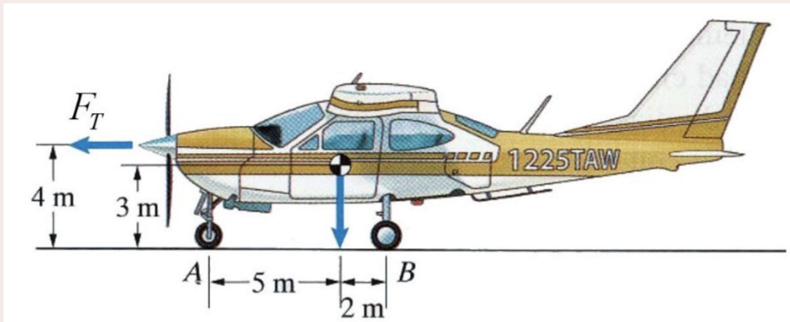
en.wikipedia.org/wiki/Center_of_gravity_of_an_aircraft

Examinons maintenant des situations dans lesquelles l'avion accélère.

Attention : si l'avion accélère (comme au décollage et à l'atterrissage), **on doit obligatoirement prendre le centre de gravité de l'avion comme axe de rotation.**

Exemple 9.3.4

Quelle proportion du poids de cet avion de 800 kg est soutenue par les trains avant et arrière quand l'avion est au début du décollage et que le moteur exerce une force de 1000 N ?

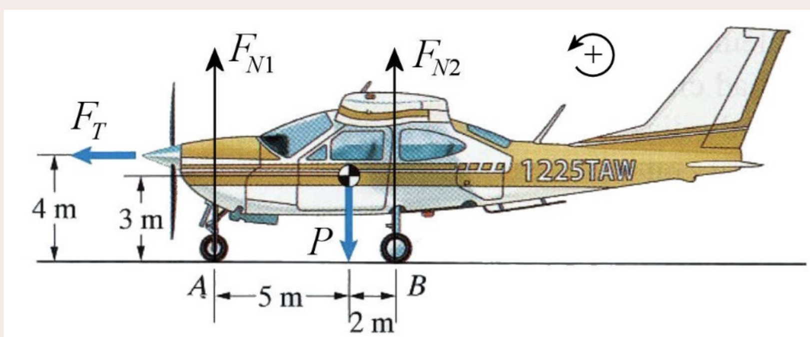


S'il y a équilibre de rotation, alors la somme des moments de force est nulle.

$$\sum \tau = 0$$

Il y a 4 forces sur l'avion.

1- Le poids ($800kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 7840N$).
2- La normale faite par le train avant (F_{N1}).
3- La normale faite par le train arrière (F_{N2}).
4- La poussée des moteurs (F_T = 1000 N).



On doit prendre le centre de gravité comme axe de rotation.

Le moment de force fait par le poids de l'avion est nul puisque cette force s'applique sur l'axe.

$$\tau_1 = 0$$

Le moment de force fait par F_{N1} est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= F_2 r_{2\perp} \\ &= -F_{N1} \cdot 5m\end{aligned}$$

Le moment de force fait par F_{N2} est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_{3\perp}\\ &= F_{N2}\cdot 2m\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la poussée est

$$\begin{aligned}\tau_4 &= F_4 r_{4\perp}\\ &= 1000N\cdot 1m\\ &= 1000Nm\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\begin{gathered}\sum \tau = 0\\ \tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4 = 0\\ 0Nm + -F_{N1}\cdot 5m + F_{N2}\cdot 2m + 1000Nm = 0\\ F_{N1}\cdot 5m - F_{N2}\cdot 2m = 1000Nm\end{gathered}$$

Cette équation ne permet pas de trouver les normales et il nous faut une autre équation. Cette 2e équation est la somme des forces en *y*.

$$\sum F_y = -7840N + F_{N1} + F_{N2} = 0$$

On a donc les deux équations suivantes.

$$\begin{gathered}F_{N1}\cdot 5m - F_{N2}\cdot 2m = 1000Nm\\ F_{N1} + F_{N2} = 7840N\end{gathered}$$

Si on isole F_{N2} dans la 2e équation

$$F_{N2} = 7840N - F_{N1}$$

et qu'on remplace dans la 1re équation, on a

$$\begin{gathered}F_{N1}\cdot 5m - \left(7840N - F_{N1}\right)\cdot 2m = 1000Nm\\ F_{N1}\cdot 5m - 15\,680Nm + F_{N1}\cdot 2m = 1000Nm\\ F_{N1}\cdot 7m = 16\,680Nm\\ F_{N1} = 2383N\end{gathered}$$

On peut ensuite trouver F_{N2} avec la 2e équation.

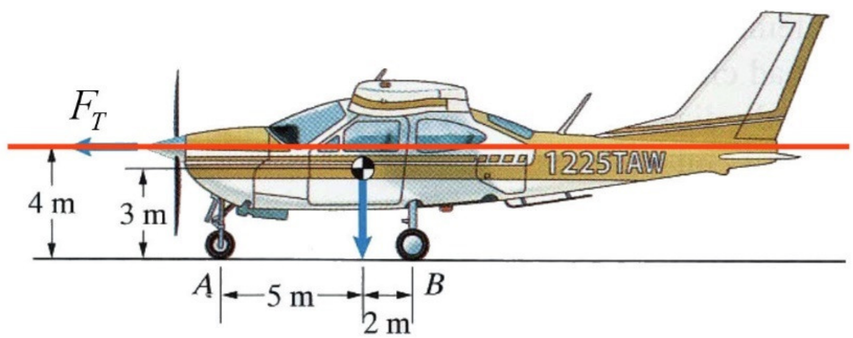
$$\begin{gathered}F_{N1} + F_{N2} = 7840N\\ 2383N + F_{N2} = 7840N\\ F_{N2} = 5457N\end{gathered}$$

Comme le train avant supporte 2383 N des 7840 N du poids, le train avant supporte 30,4 % du poids de l'avion.

Comme le train arrière supporte 5457 N des 7840 N du poids, le train arrière supporte 69,6 % du poids de l'avion.

On remarque que le poids est maintenant un peu plus supporté par le train avant que le train arrière. C'est le contraire de ce qui se passe avec une voiture. Quand on accélère avec une voiture, la normale augmente sur les roues arrière et diminue sur les roues avant.

En fait, le changement de normales dépend du point d'application de la force qui fait accélérer l'objet. Dans notre exemple, la force de poussée est située sur une ligne qui passe au-dessus du centre de gravité de l'avion.



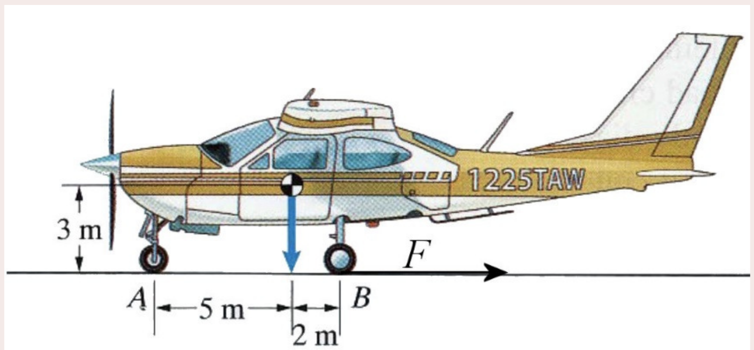
Dans ce cas, la poussée fait un moment de force qui cherche à faire descendre le nez de l'avion, ce qui écrase davantage le train avant sur la piste. Cela entraine une augmentation de la normale sur le train avant.

Si la force de poussée est sur une ligne qui passe en dessous de centre de gravité, alors la poussée fait un moment de force qui cherche à faire monter le nez de l'avion ce qui entraine une diminution de la normale sur le train avant. C'est ce qui arrive si les moteurs sont sous les ailes de l'avion. C'est aussi ce qui arrive avec une voiture qui accélère puisque la force qui fait accélérer la voiture est la force de friction entre les roues et le sol. Cette force parallèle au sol est évidemment sur une ligne passant sous le centre de gravité de la voiture.

Voyons ce qui arrive quand on freine.

Exemple 9.3.5

Quelle proportion du poids de cet avion de 800 kg est soutenue par les trains avant et arrière quand l'avion freine sur la piste avec une force de 1600 N (ce qui donne une décélération de 2 m/s² à l'avion) ? (On suppose ici que la friction avec le sol est la seule force qui fait ralentir l'avion.)

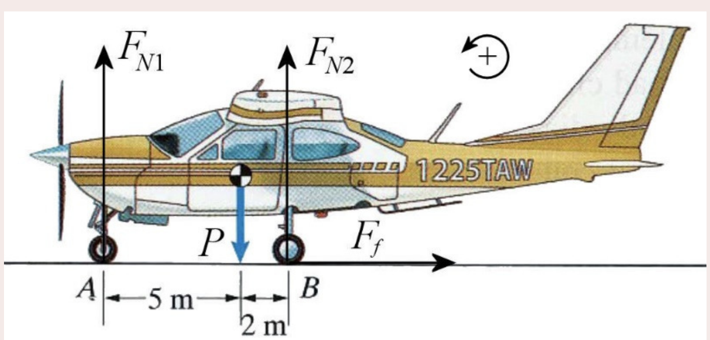


S'il y a équilibre de rotation, alors la somme des moments de force est nulle.

$$\sum \tau = 0$$

Il y a 4 forces sur l'avion.

1- Le poids ($800kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg} = 7840N$).
2- La normale faite par le train avant (F_{N1}).
3- La normale faite par le train arrière (F_{N2}).
4- La force de freinage (force de friction F_f = 1600 N).



On doit prendre le centre de gravité comme axe de rotation.

Le moment de force fait par le poids de l'avion est nul puisque cette force s'applique sur l'axe.

$$\tau_1 = 0$$

Le moment de force fait par F_{N1} est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= F_2 r_{2\perp}\\ &= -F_{N1}\cdot 5m\end{aligned}$$

Le moment de force fait par F_{N2} est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_{3\perp}\\ &= F_{N2}\cdot 2m\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la friction est

$$\begin{aligned}\tau_4 &= F_4 r_{4\perp}\\ &= 1600N\cdot 3m\\ &= 4800Nm\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\sum \tau = 0$$
$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 0$$
$$0Nm + -F_{N1}\cdot 5m + F_{N2}\cdot 2m + 4800Nm = 0$$
$$F_{N1}\cdot 5m - F_{N2}\cdot 2m = 4800Nm$$

Cette équation ne permet pas de trouver les normales et il nous faut une autre équation. Cette 2e équation est la somme des forces en y.

$$\sum F_y = -7840N + F_{N1} + F_{N2} = 0$$

On a donc les deux équations suivantes.

$$F_{N1}\cdot 5m - F_{N2}\cdot 2m = 4800Nm$$
$$F_{N1} + F_{N2} = 7840N$$

Si on isole F_{N2} dans la 2e équation

$$F_{N2} = 7840N - F_{N1}$$

et qu'on remplace dans la 1re équation, on a

$$F_{N1}\cdot 5m - \left(7840N - F_{N1}\right)\cdot 2m = 4800Nm$$
$$F_{N1}\cdot 5m - 15\,680Nm + F_{N1}\cdot 2m = 4800Nm$$
$$F_{N1}\cdot 7m = 20\,480Nm$$
$$F_{N1} = 2926N$$

On peut ensuite trouver F_{N1}.

$$F_{N1} + F_{N2} = 7840N$$

$$2926N + F_{N2} = 7840N$$
$$F_{N2} = 4914N$$

Comme le train avant supporte 2926 N des 7840 N du poids, le train avant supporte 37,3 % du poids de l'avion.

Comme le train arrière supporte 4914 N des 7840 N du poids, le train arrière supporte 62,7 % du poids de l'avion.

Il y a quand même un transfert important du poids supporté vers l'avant de l'avion. L'arrière support 71,4 % du poids quand l'avion est au repos et 62,7 % du poids quand l'avion freine.

Comme la force de friction est toujours au sol, elle est toujours sous le centre de gravité. Ce freinage vers l'arrière cherche donc toujours à faire tourner l'avion pour que le nez descende, ce qui fait augmenter la normale sur l'avant.

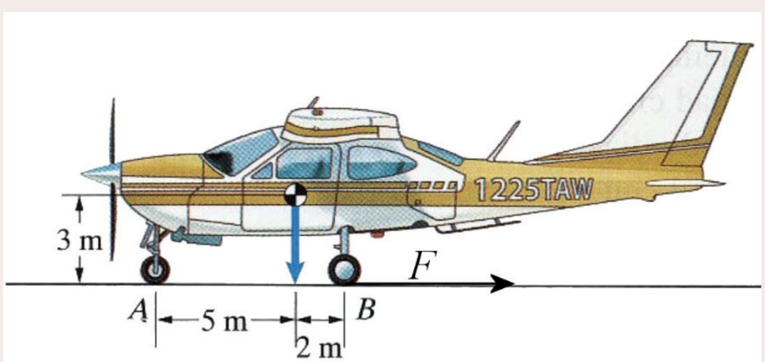
Ce transfert de normal vers l'avant a cependant une conséquence fâcheuse parce que le freinage se fait uniquement sur la roue arrière. En diminuant la normale sur la roue arrière, on diminue la force de friction maximale puisque

$$F_{f\max} = \mu_s F_N$$

Si la normale sur la roue arrière n'est que de 60 % du poids, alors cela diminue la friction maximale qu'on peut avoir.

Exemple 9.3.6

Cet avion de 800 kg freine sur une piste. Quelle est la décélération maximale qu'on peut avoir sur la piste si le coefficient de friction est μ_s ?

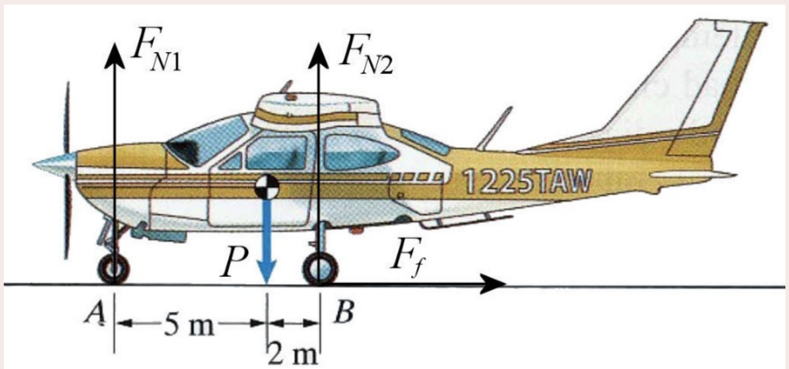


S'il y a équilibre de rotation, alors la somme des moments de force est nulle.

$$\sum \tau = 0$$

Il y a 4 forces sur l'avion.

1- Le poids ($800kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg} = 7840N$).
2- La normale faite par le train avant (F_{N1}).
3- La normale faite par le train arrière (F_{N2}).
4- La force de freinage (force de friction maximale = $\mu_s F_{N2}$).



On doit prendre le centre de gravité comme axe de rotation.

Le moment de force fait par le poids de l'avion est nul puisque cette force s'applique sur l'axe.

$$\tau_1 = 0$$

Le moment de force fait par F_{N1} est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= F_2 r_{2\perp} \\ &= -F_{N1} \cdot 5m\end{aligned}$$

Le moment de force fait par F_{N2} est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_{3\perp} \\ &= F_{N2} \cdot 2m\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la friction est

$$\begin{aligned}\tau_4 &= F_4 r_{4\perp} \\ &= \mu_s F_{N2} \cdot 3m\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\sum \tau = 0$$
$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 0$$
$$0Nm + -F_{N1} \cdot 5m + F_{N2} \cdot 2m + \mu_s F_{N2} \cdot 3m = 0$$

Cette équation ne permet pas de trouver les normales et il nous faut une autre équation. Cette 2e équation est la somme des forces en y.

$$\sum F_y = -7840N + F_{N1} + F_{N2} = 0$$

On a donc les deux équations suivantes.

$$-F_{N1} \cdot 5m + F_{N2} \cdot 2m + \mu_s F_{N2} \cdot 3m = 0$$
$$F_{N1} + F_{N2} = 7840N$$

Si on isole F_{N1} dans la 2e équation

$$F_{N1} = 7840N - F_{N2}$$

et qu'on remplace dans la 1re équation, on a

$$\begin{aligned} -\left(7840N - F_{N2}\right) \cdot 5m + F_{N2} \cdot 2m + \mu_s F_{N2} \cdot 3m &= 0 \\ -39\,200Nm + F_{N2} \cdot 5m + F_{N2} \cdot 2m + \mu_s F_{N2} \cdot 3m &= 0 \\ F_{N2} \cdot 5m + F_{N2} \cdot 2m + \mu_s F_{N2} \cdot 3m &= 39\,200Nm \\ F_{N2} \cdot \left(5m + 2m + \mu_s \cdot 3m\right) &= 39\,200Nm \\ F_{N2} \cdot \left(7m + \mu_s \cdot 3m\right) &= 39\,200Nm \\ F_{N2} &= \frac{39\,200Nm}{7m + \mu_s \cdot 3m} \end{aligned}$$

La force de freinage maximale est donc

$$\begin{aligned} F_f &= \mu_s F_{N2} \\ &= \mu_s \frac{39\,200Nm}{7m + \mu_s \cdot 3m} \end{aligned}$$

Cette force est la seule force en x. On a donc

$$\sum F_{x\max} = ma_{\max}$$
$$\mu_s \frac{39\,200Nm}{7m + \mu_s \cdot 3m} = ma_{\max}$$

L'accélération maximale est donc de

$$a_{\max} = \frac{\mu_s}{m} \cdot \frac{39\,200Nm}{7m + \mu_s \cdot 3m}$$

Si le coefficient est de 0,9 (piste sèche), la décélération maximale est

$$a_{\max} = \frac{0,9}{800kg} \cdot \frac{39\,200Nm}{7m + 0,9 \cdot 3m} = 4,55 \tfrac{m}{s^2}$$

C'est plus petit que ce qu'on calcule quand on prend toute la normale pour calculer la friction maximale (on obtiendrait alors 8,82 m/s²).

Si le coefficient est de 0,4 (piste humide), la décélération maximale est

$$a_{\max} = \frac{0,4}{800kg} \cdot \frac{39\,200Nm}{7m + 0,4 \cdot 3m} = 2,39 \tfrac{m}{s^2}$$

C'est plus petit que ce qu'on calcule quand on prend toute la normale pour calculer la friction maximale (on obtiendrait alors 3,92 m/s²).

On remarque aussi qu'une décélération à 2 m/s² sur une piste humide demande une force qui s'approche dangereusement de la force de friction maximale qui donne au maximum une décélération de 2,39 m/s².

9.4 LA POSITION DU CENTRE DE GRAVITÉ

Tous ces calculs montrent que la position du centre de gravité d'un avion est d'une importance capitale pour l'équilibre de l'avion.

Cela amène une question très importante : comment calcule-t-on la position du centre de gravité d'un avion ? C'est ce que nous allons trouver ici, en commençant par la formule générale de la position du centre de gravité.

Centre de gravité d'un système fait de particules

La position du centre de gravité est

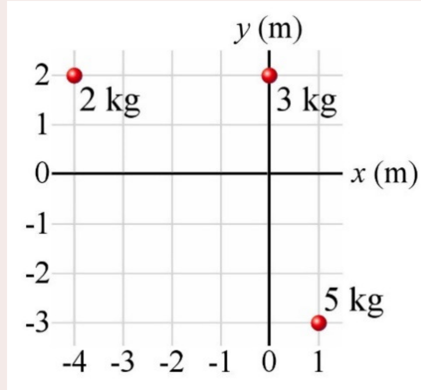
Centre de gravité d'un système composé de particules

$$x_{cg} = \frac{1}{m}\sum x_i m_i \qquad y_{cg} = \frac{1}{m}\sum y_i m_i \qquad z_{cg} = \frac{1}{m}\sum z_i m_i$$

Dans ces formules, m est la masse totale du système et $\sum x_i m_i$ est la somme de la position en x multipliée par la masse de chaque particule. Les petits i sont là pour identifier les masses puisqu'on va donner un numéro à chaque masse du système.

Le centre de gravité est un concept utilisé depuis très longtemps. Déjà, Archimède l'utilisait au 3e siècle av. J.-C.

Exemple 9.4.1



Où est le centre de gravité de ces trois particules ?

La position de centre de gravité en x est

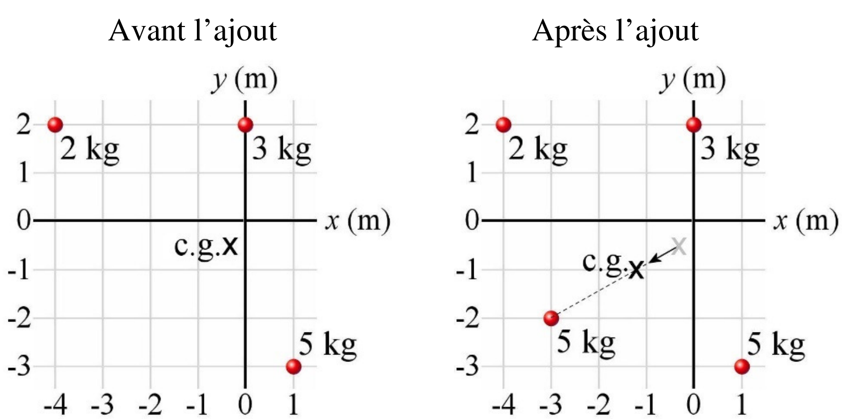
$$\begin{aligned} x_{cg} &= \frac{1}{m}\sum xm \\ &= \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3\right) \\ &= \frac{1}{10kg}\left(\left(-4m\right)\cdot 2kg + 0m\cdot 3kg + 1m\cdot 5kg\right) \\ &= \frac{-3kg\ m}{10kg} \\ &= -0,3m \end{aligned}$$

La position de centre de gravité en y est

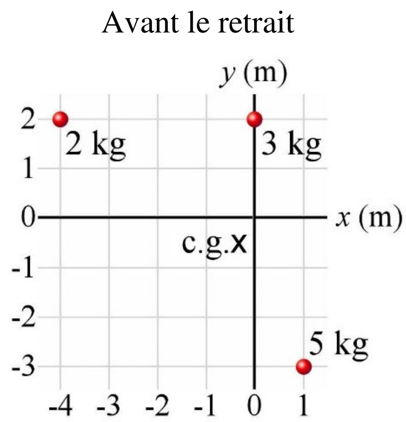
$$\begin{aligned} y_{cg} &= \frac{1}{m}\sum ym \\ &= \frac{1}{m}\left(y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3\right) \\ &= \frac{1}{10kg}\left(2m\cdot 2kg + 2m\cdot 3kg + \left(-3m\right)\cdot 5kg\right) \\ &= \frac{-5kg\ m}{10kg} \\ &= -0,5m \end{aligned}$$

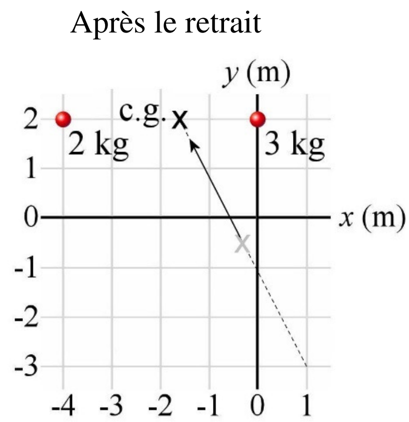
Le centre de gravité est donc à la position (-0,3 m, -0,5 m).

Notez que si on ajoute de la masse dans un système, le centre de gravité se déplace vers la masse ajoutée.



Si on enlève de la masse dans un système, le centre de gravité se déplace dans la direction opposée à la masse enlevée.

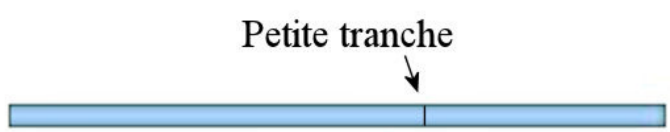




Utilisation des symétries pour trouver le centre de gravité d'un objet

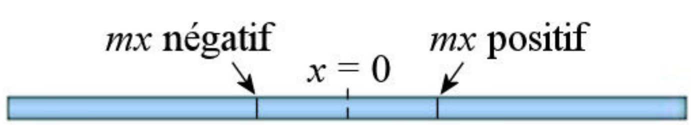
Pour trouver le centre de gravité d'un objet qui a une certaine grosseur, on pourrait utiliser les mêmes formules. On prendrait l'objet et on le séparerait en particules minuscules. On appliquerait ensuite les formules de la position du centre de gravité d'un système de particules avec toutes ces particules. Plus il y a de petits morceaux, plus le calcul de la position de centre de gravité est précis.

Par exemple, on pourrait trouver le centre de gravité d'une tige en séparant la tige en plusieurs petites tranches très minces. Voici une de ces tranches.



Avec plusieurs tranches, genre 1 million de tranches, on pourrait faire le calcul de la position du centre de gravité. Évidemment, ce calcul serait très long à faire…

Toutefois, il y a un moyen d'aller plus vite en utilisant la symétrie. Par exemple, avec une tige de densité uniforme, on peut facilement montrer que le centre de gravité doit être au milieu de la tige. Si on utilise un $x = 0$ au milieu de la tige, alors on se rend compte que les tranches s'annulent mutuellement deux à deux. En effet, pour chaque petite tranche à droite du centre, il y a une petite tranche à gauche du centre qui va donner un mx de même grandeur, mais de signe opposé que celle de droite.



Comme les *mx* s'annulent deux à deux, la somme de tous les *mx* sera nulle et la position du centre de gravité sera donc

$$x_{cg} = \frac{1}{m}\sum xm = \frac{1}{m}\cdot 0 = 0$$

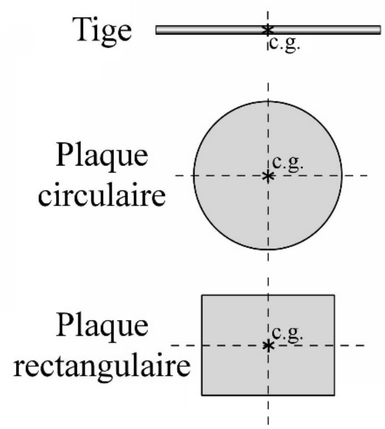
Le centre de gravité de la tige est donc à $x = 0$, donc au centre de la tige.

On se doutait bien que le centre de gravité devait être au centre de la tige, puisqu'elle est symétrique. Rappelons la règle suivante.

Centre de gravité et axe de symétrie

Si l'objet possède un axe de symétrie, le centre de gravité doit être sur cet axe. S'il y a plusieurs axes de symétrie, le centre de gravité est au croisement des axes de symétrie.

On a donc simplement prouvé que cette règle est vraie pour une tige.



Ce truc permet de trouver facilement la position du centre de masse d'objets symétriques (figure de droite).

Les principes donnés plus tôt restent valides : si on ajoute de la masse, le centre de masse se déplace vers la masse ajoutée et si on enlève de la masse, le centre de masse se déplace dans la direction opposée à la masse enlevée.

Si vous avez affaire à un objet qui n'est pas symétrique, mais qui est composé d'objets symétriques, vous pouvez trouver son centre de gravité en utilisant le truc suivant :

> Si un objet est composé d'éléments plus petits dont vous connaissez la position du centre de gravité, remplacez chaque élément par une masse ponctuelle située au centre de gravité de l'élément. Appliquer ensuite les formules pour trouver le centre de gravité d'un système formé de masse ponctuelle pour trouver le centre de gravité.

Trois quantités sont souvent utilisées selon la forme de l'objet pour déterminer la position du centre de gravité. Ce sont :

a) La masse linéique (λ)

Utilisée pour des objets en 1 dimension (tiges ou fil), elle nous indique la masse par unité de longueur. Elle est donc en *kg/m*. On a donc

$$\lambda = \frac{masse}{longueur} \qquad\qquad masse = \lambda \cdot longueur$$

b) La masse surfacique (σ)

Utilisée pour des objets en 2 dimensions (plaques), elle nous indique la masse par unité de surface. Elle est donc en *kg/m²*. On a donc

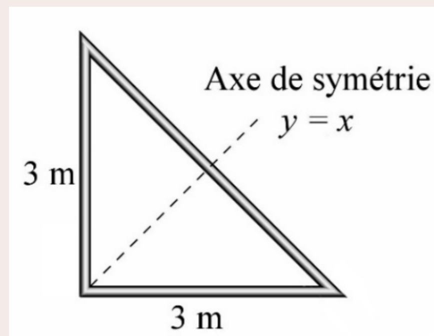
$$\sigma = \frac{masse}{aire} \qquad\qquad masse = \sigma \cdot aire$$

c) La masse volumique (ρ)

Utilisée pour des objets en trois dimensions, elle nous indique la masse par unité de volume. Elle est donc en *kg/m³*. On a donc

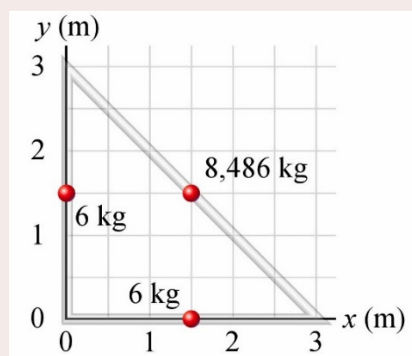
$$\rho = \frac{masse}{volume} \qquad\qquad masse = \rho \cdot volume$$

Exemple 9.4.2



Où est le centre de gravité de cet assemblage de 3 tiges ? La masse linéique de toutes les tiges est de 2 kg/m.

On remarque premièrement qu'il y a un axe de symétrie à 45°. Cet axe a pour équation $y = x$. Il ne sera donc pas nécessaire de faire les calculs de la position du centre de gravité pour les deux coordonnées. Quand on aura trouvé la position en x du centre de gravité, on aura automatiquement celle en y, car les deux doivent être égales.



Comme on sait que le centre de gravité d'une tige uniforme est au milieu de la tige, nous allons remplacer chaque tige par une masse ponctuelle située au milieu de la tige. La masse des tiges de 3 m est de 2 kg/m x 3 m = 6 kg alors que celle de la tige qui forme l'hypoténuse est de 2 kg/m x 4,243 m = 8,486 kg. On a alors la situation illustrée sur la figure de droite.

Vous vous demandez peut-être comment on a trouvé le centre de la tige à 45°. En fait, c'est assez facile. En x, un des bouts de la tige est à $x = 0$ et l'autre bout est à $x = 3$ m. Le milieu est donc à $x = 1,5$ m. En y, un des bouts de la tige est à $y = 0$ et l'autre bout est à $y = 3$ m. Le milieu est donc à $y = 1,5$ m. On applique ensuite la formule du centre de gravité pour trouver sa position.

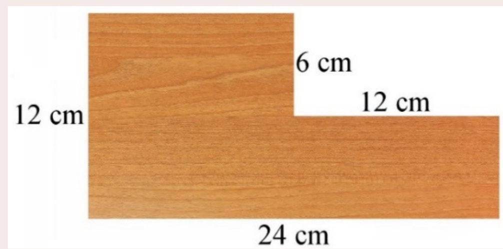
$$x_{cg} = \frac{1}{m}\sum x_i m_i$$

$$= \frac{1}{20,486kg}\left(0m \cdot 6kg + 1,5m \cdot 6kg + 1,5m \cdot 8,486kg\right)$$
$$= \frac{21,729kg\ m}{20,486kg}$$
$$= 1,0607m$$

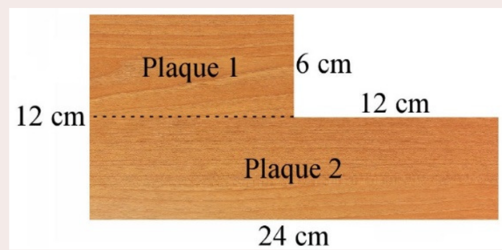
Le centre de gravité est donc à la position (1,0607 m, 1,0607 m).

Exemple 9.4.3

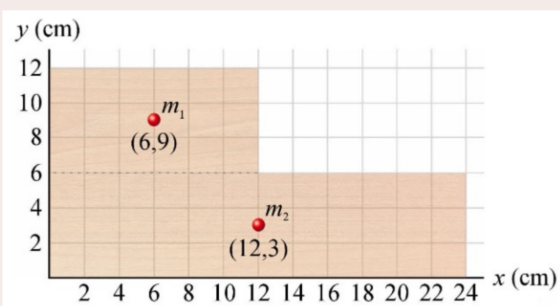
Où est le centre de gravité de cette plaque de bois si la masse surfacique est de σ = 20 kg/m² ?



Ici, il n'y a aucun axe de symétrie. On devra donc calculer la position du centre de gravité en *x* et en *y*. Pour y arriver, on sépare la plaque en deux plaques rectangulaires.



Comme on sait que le centre de gravité d'une plaque uniforme est au milieu de la plaque, nous allons remplacer chaque plaque par une masse ponctuelle située au milieu de la plaque. La masse des plaques est



$$m_1 = \sigma \cdot aire$$
$$= 20\tfrac{kg}{m^2} \cdot \left(0,12m \times 0,06m\right) = 0,144kg$$
$$m_2 = \sigma \cdot aire$$
$$= 20\tfrac{kg}{m^2} \cdot \left(0,24m \times 0,06m\right) = 0,288kg$$

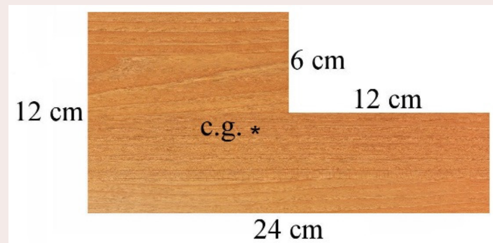
On a donc la situation montrée sur la figure.

On utilise ensuite la formule de la position de centre de gravité.

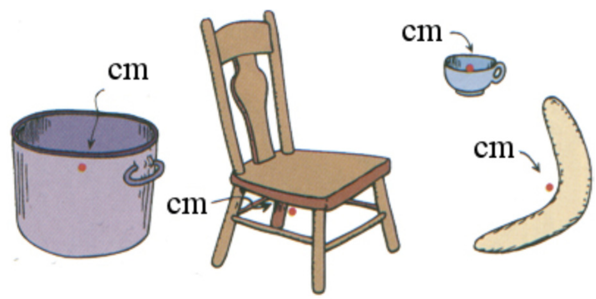
$$x_{cg} = \frac{1}{m}\sum x_i m_i$$
$$= \frac{0,06m \cdot 0,144kg + 0,12m \cdot 0,288kg}{0,144kg + 0,288kg}$$
$$= \frac{0,0432kgm}{0,432kg}$$
$$= 0,1m$$

$$\begin{aligned} y_{cg} &= \frac{1}{m}\sum y_i m_i \\ &= \frac{0,09m \cdot 0,144kg + 0,03m \cdot 0,288kg}{0,144kg + 0,288kg} \\ &= \frac{0,0210kgm}{0,432kg} \\ &= 0,05m \end{aligned}$$

Le centre de gravité est donc à la position (10 cm, 5 cm).



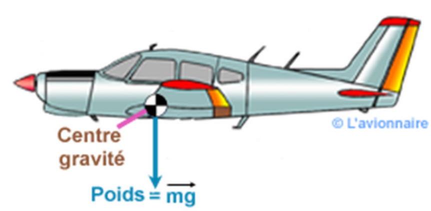
Notez que le centre de gravité n'est pas nécessairement à l'intérieur de la matière qui compose l'objet. L'image montre la position du centre de gravité de 4 objets. Pour tous ces objets, le centre de gravité est à l'extérieur de la matière qui compose l'objet, ce qui signifie qu'on pourrait toucher le centre de gravité avec notre doigt. (On ne sentirait rien avec notre doigt en touchant le centre de gravité.)



schools.wikia.com/wiki/Center_of_Mass

9.5 CENTRE DE GRAVITÉ D'UN AVION

On doit trouver la position du centre de gravité dans la direction longitudinale, c'est-à-dire la position du centre de gravité entre le nez et la quelques de l'avion.



www.lavionnaire.fr/MecaGravite.php

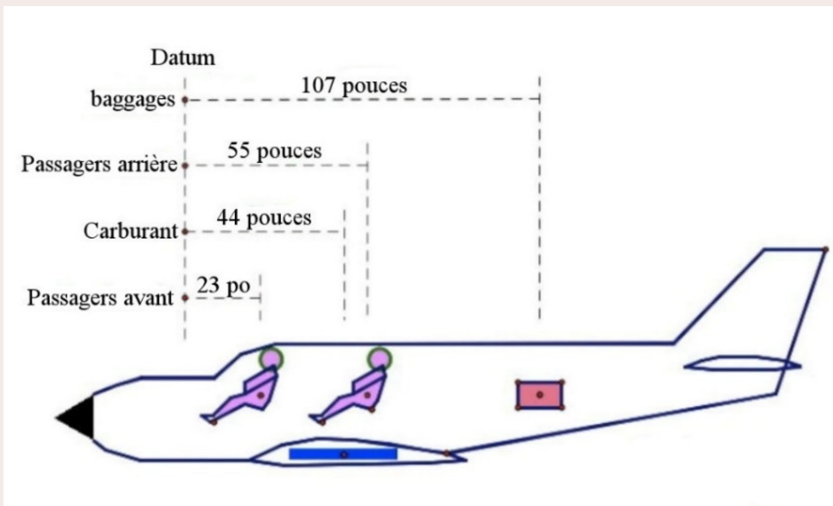
La position du centre de gravité dans cette direction est d'une importance capitale pour l'équilibre de l'avion. C'est la responsabilité du pilote de s'assurer que le centre de gravité n'est pas trop en avant de l'avion ou pas trop en arrière de l'avion. C'est le fabricant de l'appareil qui fournit les limites à ne pas dépasser. Ce sont les limites de centrage.

Pour calculer la position du centre de gravité d'un avion, le fabricant nous donne la position de centre de gravité des différentes composantes de l'avion. Ces positions sont toutes données à partir d'une position de référence qui s'appelle le *datum.* C'est le constructeur qui décide de la position du datum. Cette position est parfois à un endroit dans l'avion (le bord d'attaque de l'aile, la cloison pare-feu ou tout autre point), mais elle est parfois située en avant du nez de l'avion. Chose certaine, le datum est très près du devant de l'avion pour faire en sorte que les positions des centres de masse de tous les objets dans l'avion soient positives.

Évidemment, le calcul de la position du centre de gravité d'un avion se fait en livres et en pieds ou en pouces.

Exemple 9.5.1

Un avion de 2450 livres (quand il est vide) a un centre de gravité à 28 pouces derrière le datum. On ajoute ensuite deux rangées de passagers, du carburant et un bagage. La figure suivante donne la position du centre de gravité de ces différents éléments par rapport au datum. Les passagers avant ont une masse de 380 livres, les passagers arrière ont une masse de 310 livres, le carburant a une masse de 290 livres et le bagage a une masse de 550 livres. Quelle est la position du centre de gravité de cet avion ?



www.youtube.com/watch?v=OLx6zUPmrrY

La position en x du centre de gravité est donnée par

$$x_{cg} = \frac{1}{m}\sum x_i m_i$$

Pour trouver la masse totale et la somme des xm, on peut utiliser une table comme celle-ci.

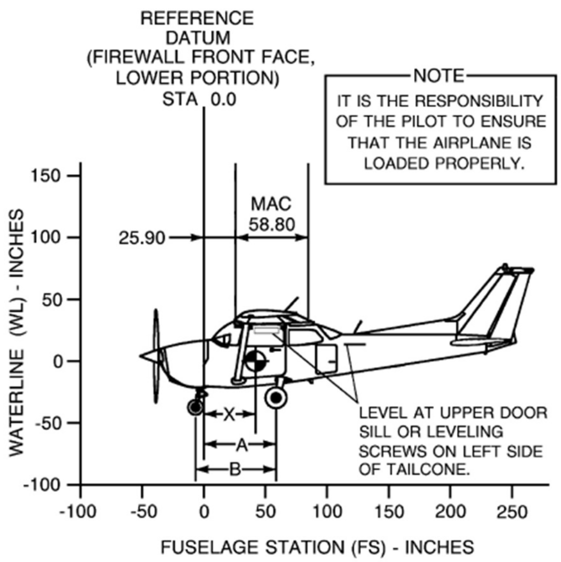
	m (lbs)	x (po)	xm (lbs·po)
Avion	2450	28	68 600
Passagers avant	380	23	8 740
Passagers arrière	310	55	17 050
Carburant	290	44	12 760
Bagage	550	107	58 850
Total	3980		166 000

La position du centre de gravité est donc

$$x_{cg} = \frac{\sum x_i m_i}{m}$$
$$= \frac{166\,000}{3980}$$
$$= 41,71 po$$

On recommande même d'ajouter le poids des vêtements au poids des personnes. On recommande d'ajouter 8 livres par personne l'été et 14 livres par personne l'hiver.

Souvent, il y a des tables préparées d'avance pour faire ce calcul. Par exemple, dans la section sur l'équilibre de rotation dans la documentation du Cessna 172S. On voit premièrement que le datum est au mur coupe-feu entre le moteur et le cockpit.



Ensuite, on nous donne les valeurs suivantes pour les distances des centres de masse des composantes à partir du datum :

Avion vide : 39,6 pouces

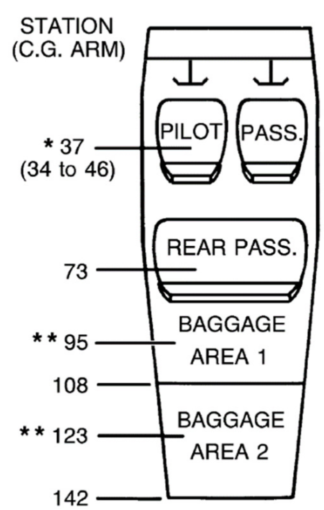
Carburant : 48 pouces

Pilote et passager avant : 37 pouces (mais ajustable de 34 à 46)

Passager arrière : 73 pouces

Section bagage 1 : 95

Section bagage 2 : 123



Le siège du pilote est ajustable, ce qui permet, par exemple, de s'avancer si le centre de gravité est trop vers l'arrière de l'avion.

Ensuite, on montre ce tableau (à droite) qui permet de calculer les *xm* (appelés *moment* dans la table). Comme les *xm* donnent de gros chiffres, on les divise par 1000.

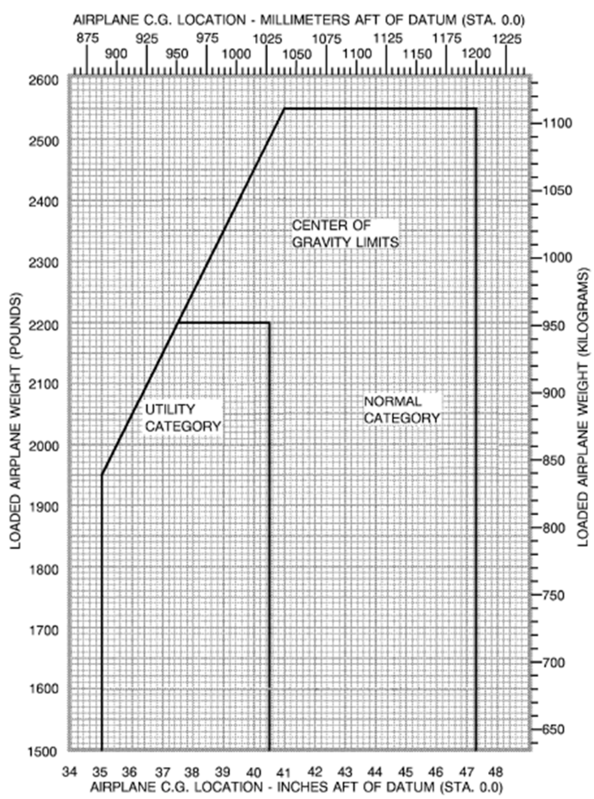
ITEM DESCRIPTION	WEIGHT AND MOMENT TABULATION			
	SAMPLE AIRPLANE		YOUR AIRPLANE	
	Weight (lbs.)	Moment (Lb-ins. /1000)	Weight (lbs.)	Moment (Lb-ins. /1000)
1. Basic Empty Weight (Use the data pertaining to your airplane as it is presently equipped. Includes unusable fuel and full oil)	1642	62.6		
2. Usable Fuel (At 6 Lbs./Gal.)				
53 Gallons Maximum				
30 Gallons (Quantity used for example)	180	8.6		
3. Pilot and Front Passenger (Station 34 to 46)	340	12.6		
4. Rear Passengers	340	24.8		
5. *Baggage Area 1 (Station 82 to 108; 120 Lbs. Max.)	56	4.6		
6. *Baggage Area 2 (Station 108 to 142; 50 Lbs. Max.)				
7. **RAMP WEIGHT AND MOMENT** (add columns)	**2558**	**113.2**		
8. Fuel allowance for engine start, taxi and runup	-8.0	-0.4		
9. **TAKEOFF WEIGHT AND MOMENT** (Subtract Step 8 from Step 7)	**2550**	**112.8**		

10. Locate this point (2550 at 112.8) on the Center of Gravity Moment Envelope, and since this point falls within the envelope, the loading is acceptable.
* The maximum allowable combined weight capacity for baggage areas 1 and 2 is 120 pounds.

Une fois qu'on a la masse totale et le moment total (ligne 9), on divise le moment par la masse et on multiplie par 1000 (puisqu'on avait divisé les moments par 1000) pour obtenir la position du centre de gravité. Ici, on obtient

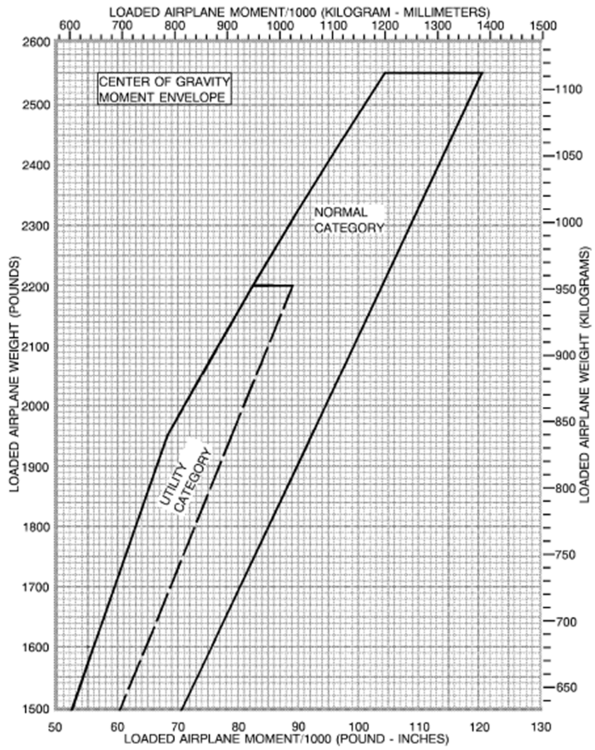
$$\frac{112,8}{2550}\cdot 1000 = 44,2\,po$$

La position obtenue doit se situer à l'intérieur des limites indiquées par le manufacturier de l'appareil. Pour le Cessna 172S, les limites acceptables sont données par ce graphique.



Dans l'exemple donné, l'avion a une masse de 2550 livres, ce qui nous amène complètement en haut de la zone acceptable. À cette masse, les limites de la position du centre de gravité sont de 41 pouces et 47,2 pouces. Un centre de gravité à 44,2 pouces est donc acceptable.

On donne aussi un graphique avec la masse de l'avion et le moment total.

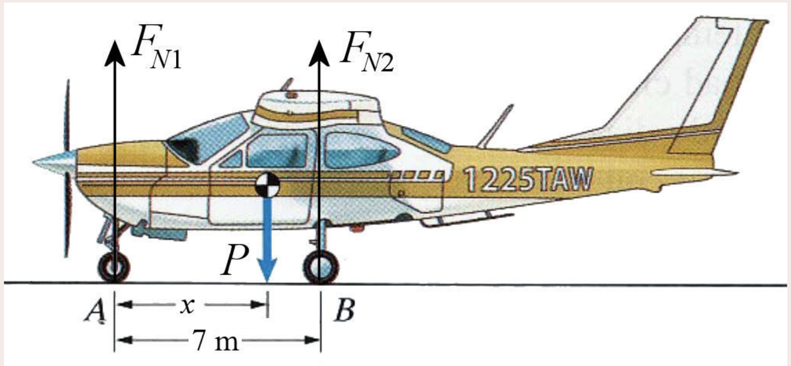


Dans l'exemple, l'avion a une masse de 2550 livres et un moment total de 112,8. Ces valeurs nous placent dans la zone acceptable.

On peut également trouver la position du centre de gravité à partir des normales sur les trains avant et arrière. On peut simplement obtenir ces normales avec une balance placée sous chacune des roues.

Exemple 9.5.2

François place une balance sous les roues de son avion pour connaitre la position du centre de gravité. Quand il place la balance sous le train avant, la balance indique 200 kg. Quand il place la balance sous la roue droite du train arrière, il obtient 300 kg et quand il place la balance sous la roue gauche du train arrière, il obtient encore 300 kg. Où est le centre de gravité de l'avion ? (Une balance mesure la normale, mais affiche une valeur en kg en divisant la normale par 9,8. Pour connaitre la normale, on doit donc simplement multiplier la valeur affichée par la balance par 9,8.)



Il y a 3 forces sur l'avion.

1- Le poids ($800kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg} = 7840N$).
2- La normale faite par le train avant ($F_{N1} = 200kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg} = 1960N$).
3- La normale faite par le train arrière ($F_{N2} = 600kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg} = 5880N$).

On va prendre le train avant comme axe de rotation.

Le moment de force fait par le poids est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= F_1 r_{1\perp}\\ &= -7840N \cdot x\end{aligned}$$

Le moment de force fait par le train avant est nul puisque la force est appliquée à l'axe de rotation.

$$\tau_2 = 0$$

Le moment de force fait par le train arrière est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_{3\perp}\\ &= 5880N \cdot 7m\\ &= 41160Nm\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\begin{gathered}\sum \tau = 0\\ -7840N \cdot x + 0Nm + 41160Nm = 0\end{gathered}$$

Il ne reste qu'à isoler *x*.

$$\begin{gathered}-7840N \cdot x = -41160Nm\\ x = 5{,}25m\end{gathered}$$

Le centre de gravité est donc à 5,25 m du train avant.

Si la position est en dehors des limites fournies, on doit enlever du poids ou redistribuer la masse à l'intérieur de l'avion pour amener le centre de gravité à l'intérieur des limites prescrites. Cela peut se faire en déplaçant un objet dans l'avion.

Trouvons la formule pour calculer de combien on doit déplacer une masse dans l'avion pour avoir un centre de gravité dans les limites imposées par le fabricant.

Au départ, la position du centre de gravité est

$$x_{cg} = \frac{1}{m}\left(x_A m_A + \sum x_i m_i\right)$$

On va déplacer l'objet A et la somme représente la somme des xm pour tous les autres objets qui ne seront pas déplacés. On veut un nouveau centre de gravité à la position

$$x'_{cg} = \frac{1}{m}\left(x'_A m_A + \sum x_i m_i\right)$$

Le déplacement du centre de gravité est $x'_{cg} - x_{cg}$. Ce déplacement est

$$\begin{aligned} x'_{cg} - x_{cg} &= \frac{1}{m}\left(x'_A m_A + \sum x_i m_i\right) - \frac{1}{m}\left(x_A m_A + \sum x_i m_i\right) \\ &= \frac{1}{m} x'_A m_A + \frac{1}{m}\sum x_i m_i - \frac{1}{m} x_A m_A - \frac{1}{m}\sum x_i m_i \\ &= \frac{1}{m} x'_A m_A - \frac{1}{m} x_A m_A \\ &= \frac{m_A}{m}\left(x'_A - x_A\right) \end{aligned}$$

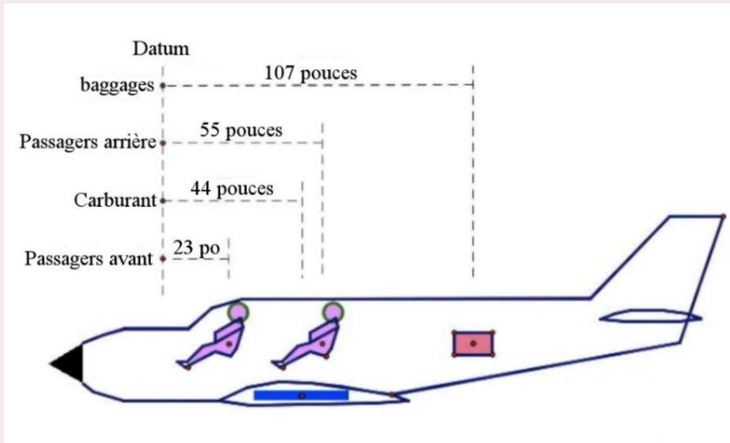
On a donc

Lien entre le déplacement d'un objet et le déplacement du centre de gravité

$$\Delta x_{cg} = \frac{m_A}{m}\Delta x_A$$

Exemple 9.5.3

Un avion de 2450 livres (quand il est vide) a un centre de gravité à 28 pouces derrière le datum. On ajoute ensuite deux rangées de passagers, du carburant et un bagage. La figure suivante donne la position du centre de gravité de ces différents éléments par rapport au datum. Les passagers avant ont une masse de 380 livres, les passagers arrière ont une masse de 310 livres, le carburant a une masse de 290 livres et le bagage a une masse de 550 livres. On sait que dans cette configuration, le centre de gravité est à 41,71 pouces du datum (exemple précédent). Toutefois, supposons que le fabricant indique que le centre de gravité de cet avion doit être entre 30 et 38 pouces du datum. On doit alors déplacer le bagage vers l'avant pour déplacer le centre de gravité vers l'avant de l'avion. De combien doit-on déplacer le bagage pour que le centre de gravité soit à 38 pouces du datum ?



On doit déplacer le centre de gravité de 3,71 pouces vers l'avant (de 41,71 pouces à 38 pouces). On a donc

$$\Delta x_{cg} = -3,71 po$$

(C'est négatif quand on déplace vers l'avant et positif quand on déplace vers l'arrière.) Sachant cela, on a

$$\Delta x_{cg} = \frac{m_A}{m} \Delta x_A$$

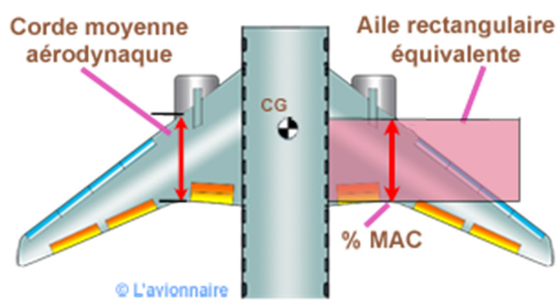
$$-3,71 po = \frac{550 lbs}{3980 lbs} \Delta x_A$$

$$\Delta x_A = -26,8 po$$

On doit déplacer le bagage de 26,8 pouces vers le devant de l'avion.

Pour de avions plus gros, le calcul de la position du centre de gravité se fait un peu de la même façon. Toutefois, on ne va pas demander le poids de chaque personne. On va plutôt utiliser un poids moyen de 170 livres.

Aussi, on donne souvent la position en pourcentage de la corde aérodynamique moyenne (MAC pour *mean aerodynamic chord*). La corde est la distance entre le bord d'attaque et le bord de fuite de l'aile. Généralement, la corde diminue à mesure qu'on s'approche du bout de l'aile et on doit faire la moyenne pour obtenir la corde aérodynamique moyenne. Cette moyenne se trouve en trouvant la corde d'une aile rectangulaire qui aura la même portance et la même surface que l'aile réelle.



www.lavionnaire.fr/MecaGravite.php

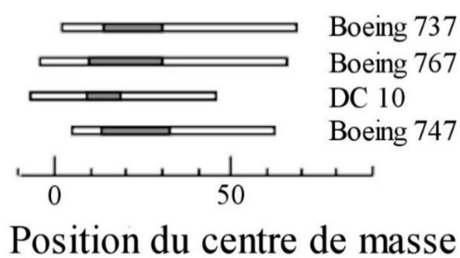
Les valeurs du MAC sont établies par le fabricant qui donne la position de son bord d'attaque et de son bord de fuite en pouces ou en mètres par rapport au datum.

www.lavionnaire.fr/MecaGravite.php

La position du centre de gravité de l'avion est alors donnée en pourcentage du MAC. Par exemple, supposons que le bord d'attaque de MAC est à 900 pouces du datum et que le bord de fuite du MAC est à 1025 pouces du datum. Le MAC a donc 125 pouces de long. Si le centre de gravité est à 40 pouces derrière le bord d'attaque du MAC, alors le pourcentage est de

$$40/125 = 32\ \%$$

Généralement, la position du centre de gravité de l'avion doit être entre 25 % et 35 % du MAC. Voici un graphique montrant la plage acceptable de position du centre de gravité de quelques modèles d'avion (la position est donnée est % du MAC).



en.wikipedia.org/wiki/Center_of_gravity_of_an_aircraft

La partie en blanc correspond à la plage permise pendant que l'avion est sur la piste, donc pendant le chargement. La partie en gris représente la plage permise pendant le vol.

Exemple 9.5.4

Un avion a les caractéristiques suivantes.

	Quantité	Position du c.m.
BOW	105 500 livres	880 po
Passagers avant	18 passagers	582 po
Passagers arrière	95 passagers	1028 po
Cargo avant	1500 livres	680 po
Cargo arrière	2500 livres	1166 po
Réservoir de carburant 1	10 500 livres	995 po
Réservoir de carburant 3	10 500 livres	995 po
Réservoir de carburant 2	28 000 livres	914 po

(Le BOW est le *basic operating weight*. C'est le poids de l'avion sans les passagers, le cargo et le carburant. Parfois, le BOW inclut le poids de l'équipage.) Le bord d'attaque du MAC est 860,5 pouces et MAC est de 180,9 pouces. Où est le centre de gravité de cet avion (en % du MAC) ?

Pour trouver le centre de gravité, on va faire la somme des *xm*. Pour chaque composante, ce calcul correspond à multiplier le poids par la position du centre de gravité de cette partie (donc à multiplier les deux dernières colonnes de la table.) Toutefois, il nous faut la masse des passagers. Avec une moyenne de 170 livres par passager, la masse des passagers dans le compartiment avant est de 3 060 livres et la masse des passagers dans le compartiment arrière est 16 150 livres. On a donc

	m (lbs)	*x* (po)	*xm*/1000
BOW	105 500	880	92 840
Passagers avant	3 060	582	1 781
Passagers arrière	16 150	1028	16 602
Cargo avant	1 500	680	1 020
Cargo arrière	2 500	1166	2 915
Réservoir de carburant 1	10 500	995	10 448
Réservoir de carburant 3	10 500	995	10 448
Réservoir de carburant 2	28 000	914	25 592
Total	177 710		161 646

La position du centre de gravité est donc

$$\begin{aligned} x_{cg} &= \frac{\sum xm}{m} \\ &= \frac{161\,646\,000}{177\,710} \\ &= 909,6\,po \end{aligned}$$

Comme le début du MAC est à 860,5 pouces, le centre de gravité est 49,1 pouces derrière le bord d'attaque du MAC.

Puisque le MAC a une longueur de 180,9 pouces, la position du centre de gravité en pourcentage du MAC est

$$\begin{aligned} \text{cm \% MAC} &= \frac{49,1}{180,9}\cdot 100 \\ &= 27,1\% \end{aligned}$$

Le calcul peut être un peu plus raffiné pour les réservoirs de carburant, car la position du centre de gravité des réservoirs change selon la quantité de carburant qu'il y a dans les réservoirs. Pour tenir compte de cela, on peut fournir une table qui ressemble à celle-ci.

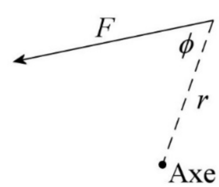
FUEL LOADING TABLE

TANKS 1 & 3 (EACH)			TANKS 2 (3 CELL)					
Weight lbs	Arm	Moment/1000	Weight lbs	Arm	Moment/1000	Weight lbs	Arm	Moment/1000
8,500	992.1	8,433	8,500	917.5	7,799	22,500	914.5	20,576
9,000	993.0	8,937	9,000	917.2	8,255	23,000	914.5	21,034
9,500	993.9	9,442	9,500	917.0	8,711	23,500	914.4	21,488
10,000	994.7	9,947	10,000	916.8	9,168	24,000	914.3	21,943
10,500	995.4	10,451	10,500	916.6	9,624	24,500	914.3	22,400
11,000	996.1	10,957	11,000	916.5	10,082	25,000	914.2	22,855
11,500	996.8	11,463	11,500	916.3	10,537	25,500	914.2	23,312
12,000	997.5	11,970	12,000	916.1	10,993	26,000	914.1	23,767
FULL CAPACITY			**(See note at lower left)			26,500	914.1	24,244
						27,000	914.0	24,678
**Note: Computations for Tank 2 weights for 12,500 lbs to 18,000 lbs have been purposely omitted.			18,500	915.1	16,929	27,500	913.9	25,132
			19,000	915.0	17,385	28,000	913.9	25,589
			19,500	914.9	17,841	28,500	913.8	26,043
			20,000	914.9	18,298	29,000	913.7	26,497
			20,500	914.8	18,753	29,500	913.7	26,954
			21,000	914.7	19,209	30,000	913.6	27,408
			21,500	914.6	19,664			
			22,000	914.6	20,121	FULL CAPACITY		

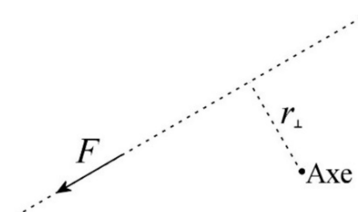
La position du centre de gravité du réservoir est le *ARM*. On voit que cette position change un peu selon la quantité de carburant présente dans le réservoir.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Moment de force



$$\tau = Fr\sin\phi$$



$$\tau = Fr_\perp$$

Moment de force net ou moment de force résultant

$$\tau_{net} = \sum \tau$$

Conditions d'équilibre de rotation

$$\sum \tau = 0$$

Centre de gravité d'un système composé de particules

$$x_{cg} = \frac{1}{m}\sum x_i m_i \qquad y_{cg} = \frac{1}{m}\sum y_i m_i \qquad z_{cg} = \frac{1}{m}\sum z_i m_i$$

Lien entre le déplacement d'un objet et le déplacement du centre de gravité

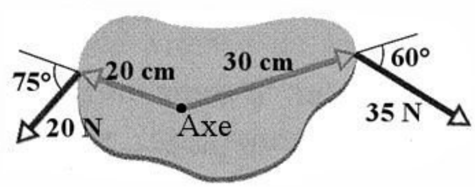
$$\Delta x_{cg} = \frac{m_A}{m}\Delta x_A$$

EXERCICES

9.1 Le moment de force

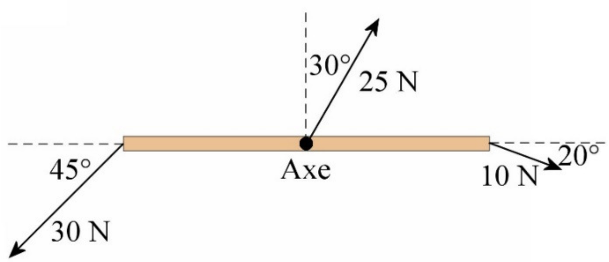
1. Dans la situation montrée sur la figure…

    a) quel est le moment de force fait par la force de 20 N ?
    b) quel est le moment de force fait par la force de 35 N ?
    c) quel est le moment de force net ?



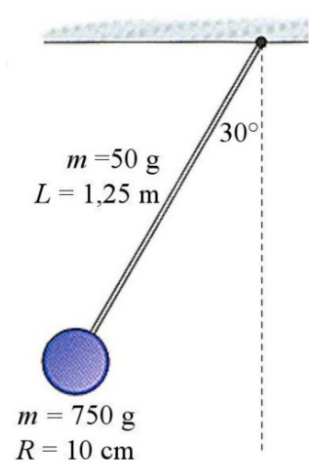
2. Quel est le moment de force net sur cette tige ?

    (L'axe de rotation est au centre de la tige et la tige a 4 m de long.)



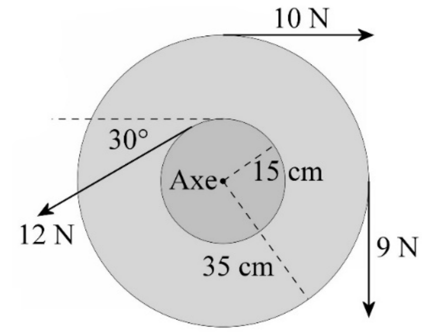
3. Une petite balle de 750 g est attachée à une extrémité d'une tige de 50 g et d'une longueur de 1,25 m. L'autre extrémité est fixée à un pivot au plafond. Lorsque la tige fait un angle de 30° avec la verticale,

    a) Quel est le moment de force fait par le poids de la balle ?
    b) Quel est le moment de force fait par le poids de la tige ?
    c) Quel est le moment de force total ?



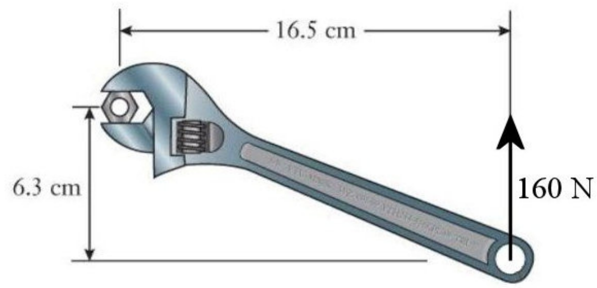
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/pendulum-bob-swings-alongthe-circular-arc-indicated-figure--motion-tob-1-indicate-whether--q232430

4. Quel est le moment de force net sur cette roue ?



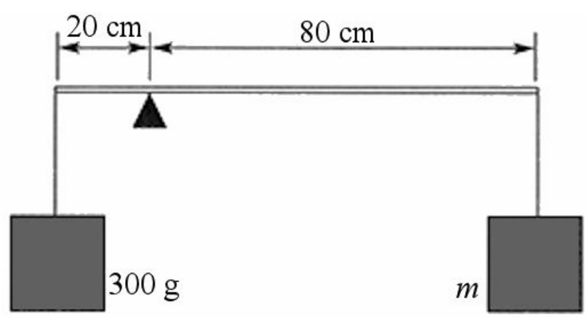
5. Quel est le moment de force fait par la force de 160 N sur la clé ?

www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/mechanical-engineering-archive-2012-september-23



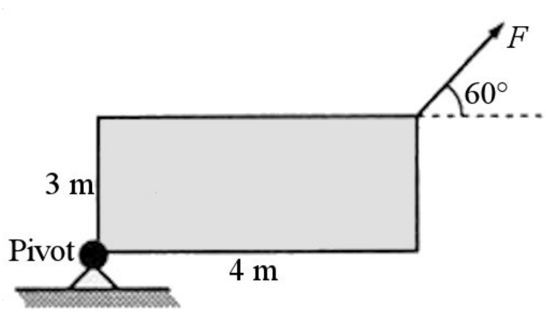
9.2 L'équilibre de rotation

6. Dans la figure ci-dessous, une tige sans masse est en équilibre sur un pivot (triangle). Deux masses sont fixées à chaque bout de la tige. La première, d'une masse de 300 g, est à 20 cm du pivot et la deuxième est à 80 cm du pivot. Quelle doit être la valeur de la deuxième masse pour que la tige soit en équilibre ?

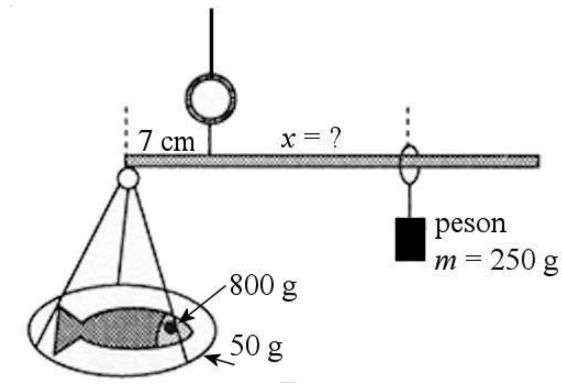


7. Reprenez la question précédente, mais en donnant une masse de 100 g à la tige.

8. Une plaque d'aluminium de 50 kg est fixée à un pivot sur son coin inférieur gauche. Quelle force F sera nécessaire pour la maintenir en équilibre ?

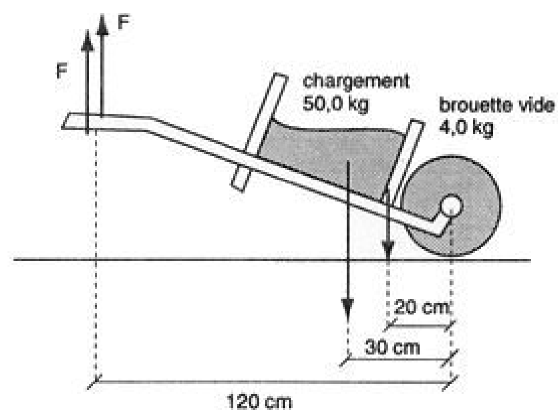


9. Pour déterminer la masse de certains objets, on utilisait autrefois une balance romaine. Celle-ci est constituée d'un plateau fixé à l'extrémité d'une tige. De l'autre côté de la tige, on déplace un peson jusqu'à ce que la balance soit en équilibre en position horizontale. Si on a placé un poisson de 800 g dans le plateau de 50 g et que ce plateau est fixé à 7 cm du support de la tige, où doit être placé le peson de 250 g pour qu'il y ait équilibre (on néglige la masse de la tige) ?



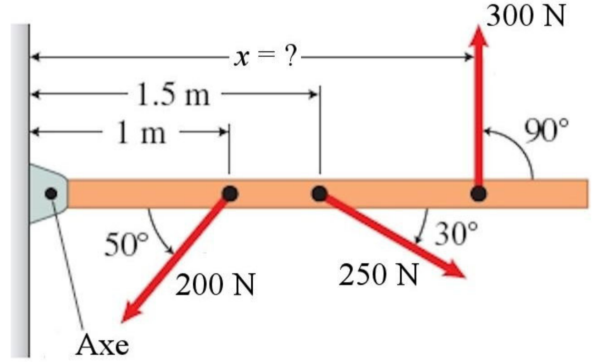
10. On soutient une brouette avec deux mains. Chaque main exerce une force F de manière à ce que la brouette soit en équilibre. Les dimensions et les masses sont indiquées sur la figure.

a) Calculer le moment de force exercée par le poids de la brouette (4 kg).
b) Calculer le moment de force exercée par le poids du chargement (50 kg).
c) Calculer le moment de force que les forces F devront exercer.
d) Calculer la grandeur de F.

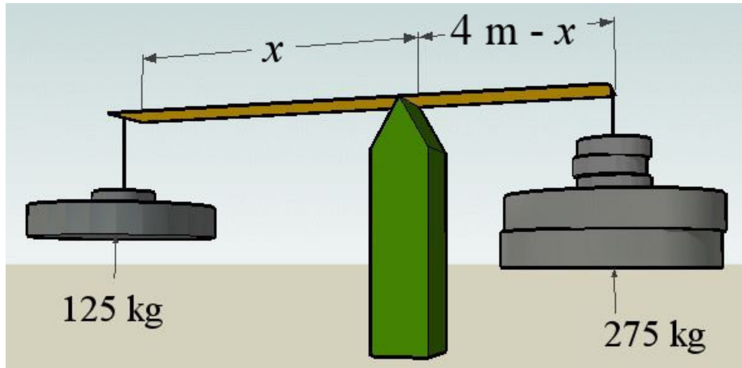


11. Quelle doit être la valeur de x pour qu'il y ait équilibre de rotation dans la situation montrée sur la figure ? (La poutre a une masse de 20 kg et une longueur de 2,8 m.)

www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/three-200-n-forces-exerted-beam-shown-figure-figure -1--determine-torque-axis-rotation-left-q5540310



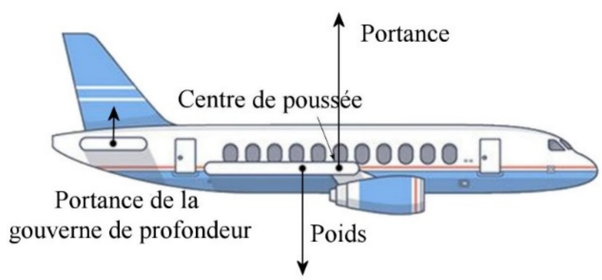
12. Des masses de 125 et 275 kg sont attachées à chaque bout d'une planche de 4 m ayant une masse négligeable. Où doit-on placer le pivot pour qu'il y ait équilibre (on cherche x sur la figure) ?



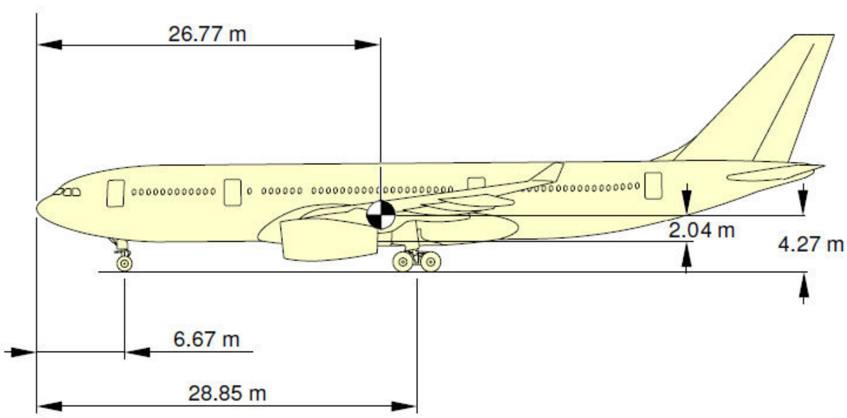
mathcentral.uregina.ca/QQ/database/QQ.09.07/s/eric1.html

9.3 L'équilibre de l'avion

13. Le centre de gravité d'un avion de 15 000 kg est situé 1 m derrière le centre de poussée. Quel doit être la portance des ailes et de la gouverne de profondeur si la distance entre le centre de poussée de la gouverne de profondeur et le centre de poussée des ailes est de 5 m ?



Utilisez cette image montrant les dimensions d'un Airbus A330-200 de 220 tonnes pour les 4 prochaines questions. (Le 26,77 m est la position du centre de gravité.)



14. Quelles sont les proportions du poids de cet Airbus A330-200 soutenu par le train avant et arrière quand l'avion est au repos sur la piste ?

15. Quelles sont les proportions du poids de cet Airbus A330-200 soutenu par le train avant et arrière quand l'avion est au début du décollage et que les moteurs exercent une force de 550 000 N ?

16. Notre Airbus A330-200 se pose sur une piste. En fin de piste, la vitesse de l'avion est très faible de sorte qu'il n'y a pas de portance et de trainée. Les freins exercent une force de 340 000 N et les inverseurs de poussée exercent une force de 80 000 N.

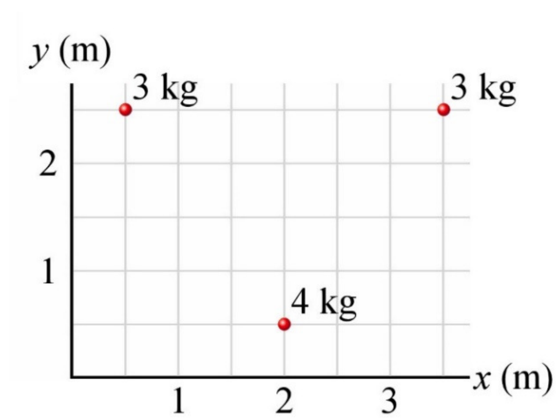
a) Quelles sont les proportions du poids soutenu par le train avant et arrière en fin de piste ?
b) Avec cette force de freinage, on est à quelle pourcentage de la force de freinage maximale qu'on peut avoir en fin de piste sur piste sèche ($\mu_s = 0{,}9$) sachant que la force de freinage s'exerce uniquement sur le train arrière ?

17. Notre Airbus A330-200 se pose sur une piste. La vitesse est début de piste est de 140 nœuds, ce qui signifie qu'il y a de la portance et de la trainée à ce moment. Quand l'avion roule sur la piste avec les réducteurs de portance, le coefficient de portance C_L est de 0,7. Les inverseurs de poussée exercent une force de 80 000 N et on freine avec une force de 340 000 N. L'altitude de la piste est de 2000 pieds (ce qui signifie que la masse volumique de l'air est de 1,155 kg/m²). On suppose que la trainée et la portance ne font pas de moment de force. L'aire des ailes de cet avion est de 361,6 m².

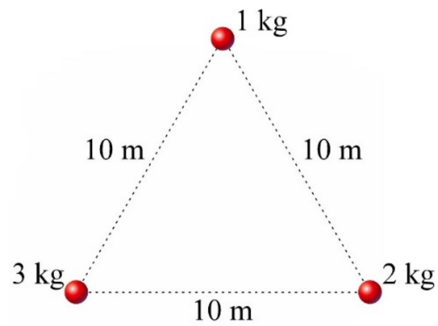
a) Quelles sont les proportions du poids soutenu par la portance, par le train avant et par arrière en début de piste ?
c) Avec cette force de freinage, on est à quelle pourcentage de la force de freinage maximale qu'on peut avoir en fin de piste sur piste sèche ($\mu_s = 0{,}9$) sachant que la force de freinage s'exerce uniquement sur le train arrière ?

9.4 Position du centre de gravité

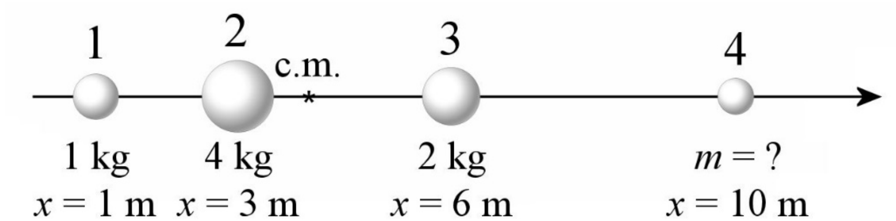
18. Où est le centre de gravité de ces trois masses ?



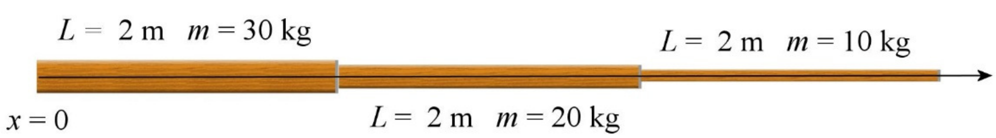
19. Où est le centre de gravité de ces trois masses ? (Mettez l'origine de vos axes à la position de la masse de 3 kg.)



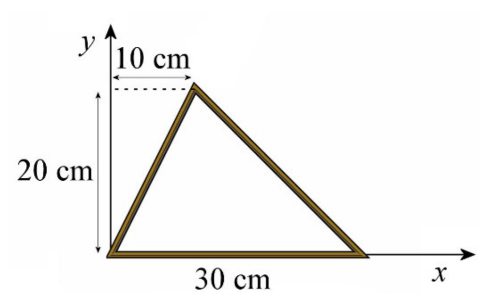
20. Sachant que le centre de gravité de ces 4 masses est à x = 4 m, déterminer la masse de la masse 4.



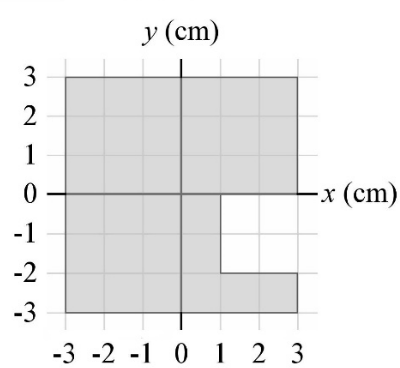
21. Où est le centre de gravité de cette poutre composée de 3 tiges ?



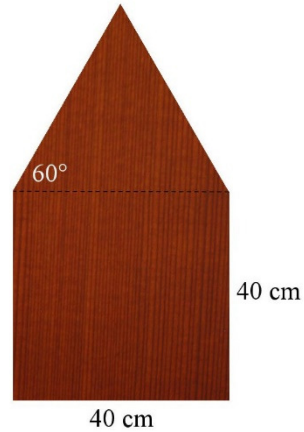
22. Où est le centre de gravité de cet objet formé de trois tiges si la masse linéique est de λ = 3 kg/m ?



23. Où est le centre de gravité de cette plaque si la masse surfacique est de σ = 100 kg/m² ?

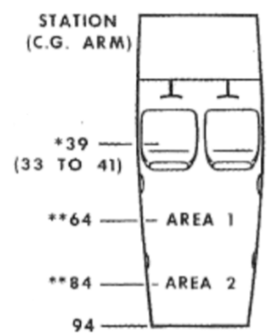


24. Où est le centre de gravité de cette plaque de bois ayant une masse surfacique de σ = 60 kg/m² ?



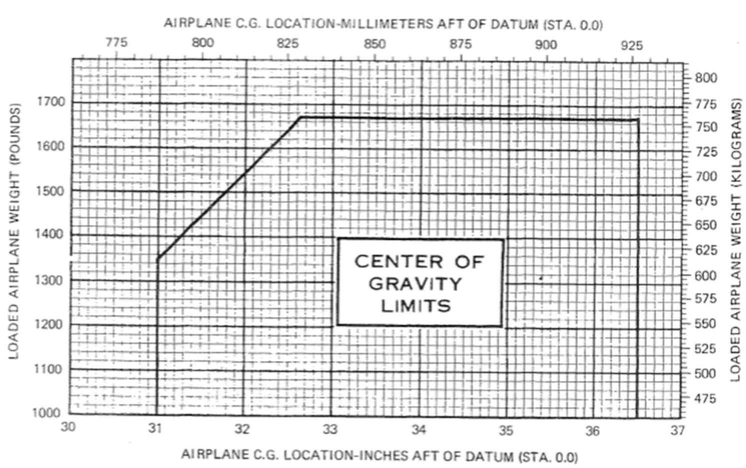
9.5 Le centre de gravité d'un avion

25. Un Cessna 152 de 1136 livres (quand il est vide). On ajoute ensuite un pilote et un passager, du carburant et des bagages. Le tableau suivant donne la masse et la position du centre de gravité de ces différents éléments par rapport au datum.



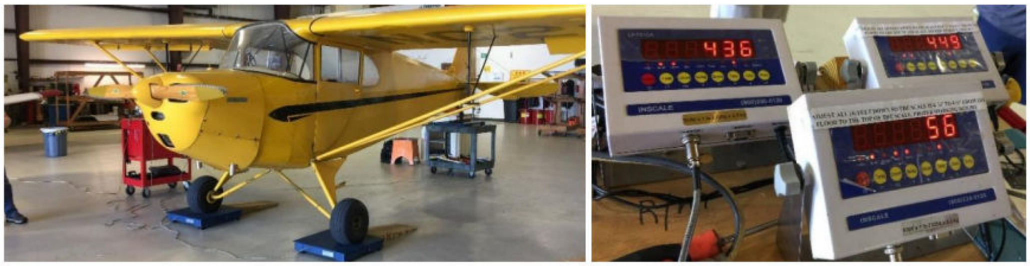
	m (lbs)	*x* (po)
Avion	1136	34
Pilote et passager	300	39
Carburant	90	40
Zone bagage 1	50	64
Zone bagage 2	50	84

a) Dépasse-t-on les 1675 livres maximales permises pour cet appareil ?
b) Quelle est la position du centre de gravité de cet avion ?
c) Selon ce graphique, la position du centre de gravité est-elle à l'intérieur des limites fournies par le fabricant ?



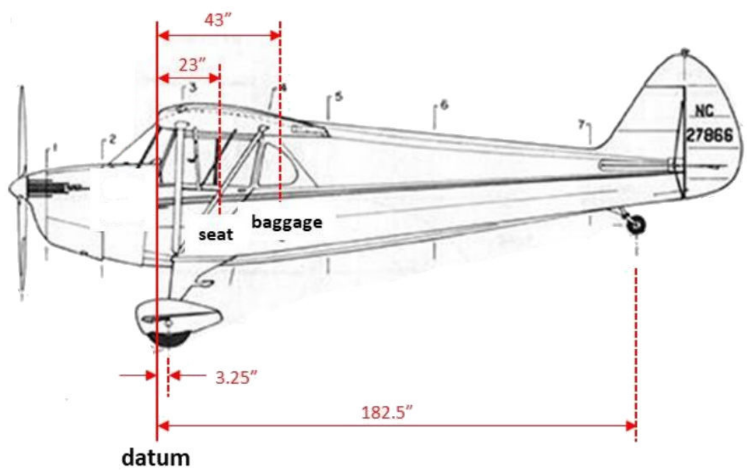
longislandaviators.com/wp-content/uploads/2018/08/1978-Pilots-Operating-Handbook-Cessna-152.pdf

26. Lorik place son Piper Super Cub sur 3 balances. Les réservoirs sont pleins de carburant, mais Lorik n'est pas dans l'avion. Les deux valeurs du haut (436 et 449) sur la figure donnent les valeurs mesurées par les balances sous le train avant (en livres) et la valeur du bas (56) est la valeur mesurée par la balance sous le train arrière.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/2-center-gravity-cg-location-critical-airplane-stability-get-empty-cg-location-piper-j-4-c-q44018734

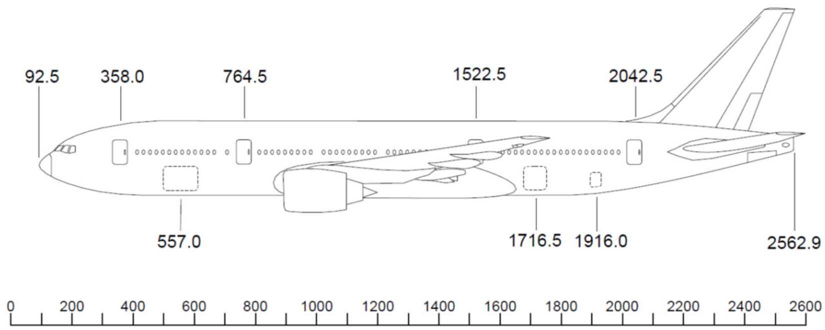
On a les dimensions suivantes pour cet avion.



a) Quelle est la masse de l'avion ?
b) À quelle distance du datum est situé le centre de gravité de cet avion ?
c) Lorik, qui a une masse de 170 livres, et son copain de 180 livres s'assoient maintenant dans l'avion. Ils placent aussi un bagage de 60 livres dans l'avion. À quelle distance du datum est situé le centre de gravité de cet avion maintenant ?

27. Un Piper Super Cub a une masse de 1350 livres (avec les passagers et les bagages) et a un centre de gravité à 21 pouces derrière le datum. Toutefois, à cette masse, le centre de gravité doit être entre 11 pouces et 20 pouces du datum. On doit alors déplacer le siège vers l'avant pour déplacer le centre de gravité vers l'avant de l'avion. De combien doit-on déplacer le siège pour que le centre de gravité soit à 20 pouces du datum sachant que la masse du siège et de ses 2 occupants est de 410 livres ?

28. Le datum d'un Boeing 777-200 est situé 92,5 pouces devant le nez de l'avion



Le MAC à une longueur de 278,5 pouces et le bord d'attaque du MAC est à 1174,5 pouces du datum.

L'avion a les caractéristiques suivantes au décollage.

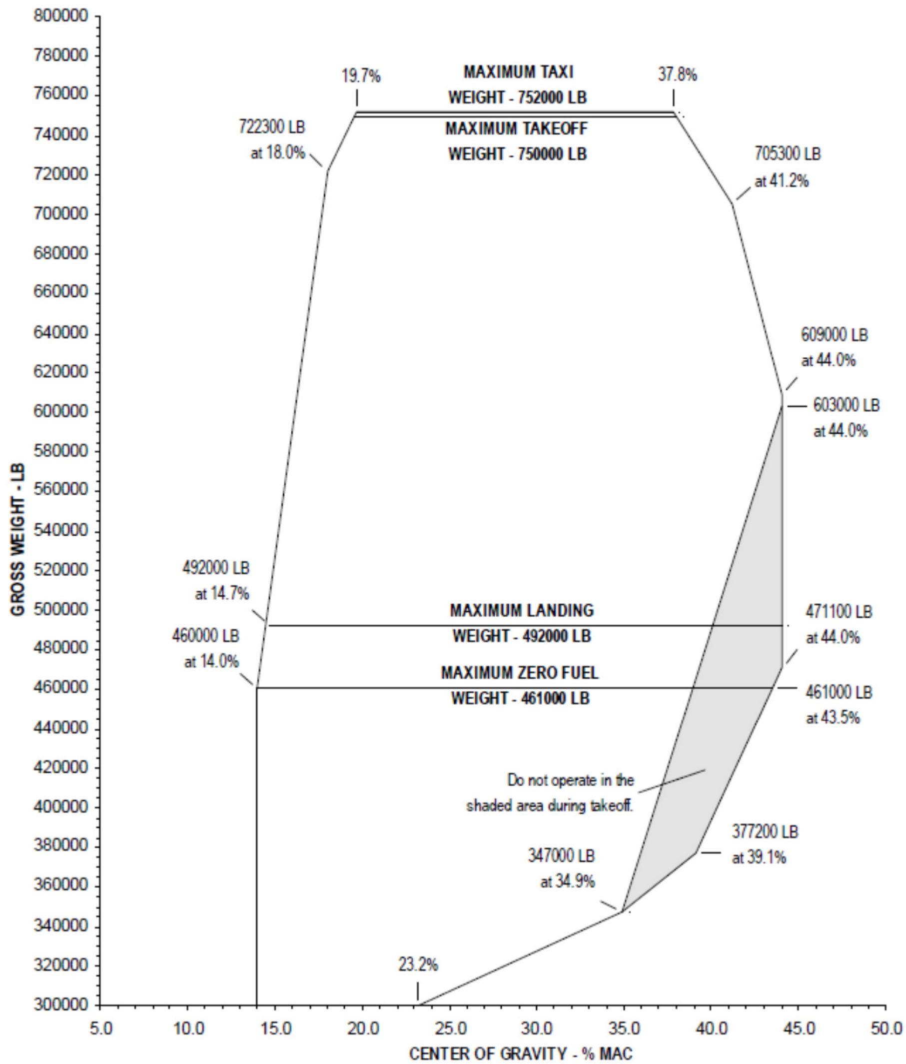
	Quantité	Position du c.m.
Avion vide	304 500 livres	1243 po
Passagers 1re classe	35 passagers	557 po
Passagers économie	230 passagers	1400 po
Soute avant	50 000 livres	703 po
Soute arrière	35 000 livres	1662 po
Soute vrac	8 000 livres	1965 po
Réservoir de carburant 1	8 000 gallons US	1285 po
Réservoir de carburant 2	8 000 gallons US	1285 po
Réservoir de carburant central	21 800 gallons US	1149 po
Réservoir d'eau 1	1918 livres	2090 po
Réservoir d'eau 2	959 livres	2084 po

Le guide de Boeing pour cet avion propose d'utiliser une masse moyenne de 195 livres pour chaque passager, ce qui inclut 179 livres pour la personne et 16 livres pour le bagage à main.

Un gallon US de carburant d'aviation correspond à 6,7 livres.

a) Où est le centre de gravité de cet avion (en % du MAC) ?

b) Selon le graphique de la page suivante, le centre de gravité est-il à l'intérieur des limites permises par Boeing (on doit se situer à l'intérieur du polygone) ?



RÉPONSES

9.1 Le moment de force

1. a) 3,864 Nm b) -9,093 Nm c) -5,229 Nm
2. 35,59 Nm
3. a) 4,961 Nm b) 0,153 Nm c) 5,114 Nm
4. -4,85 Nm
5. 26,4 Nm

9.2 L’équilibre de rotation

6. 75 g
7. 37,5 g

8. 499 N
9. 23,8 cm
10. a) 7,84 Nm b) 147 Nm c) -154,84 Nm d) 64,52 N
11. 2,05 m
12. 2,75 m

9.3 L'équilibre de l'avion

13. Gouverne : 29 400 N vers le haut ailes : 117 600 N vers le haut
14. Avant : 9,4 % Arrière : 90,6 %
15. Avant : 7,0 % Arrière : 93,0 %
16. a) Avant : 12,8 % Arrière : 87,2 % b) 20,1 %
17. a) Portance : 35,4 % Avant : 9,4 % Arrière : 55,2 % b) 31,8 %

9.4 Position du centre de gravité

18. $x_{cm} = 2$ m $y_{cm} = 1{,}7$ m
19. $x_{cm} = 4{,}17$ m $y_{cm} = 1{,}44$ m
20. 0,5 kg
21. $x_{cm} = 2{,}333$ m
22. $x_{cm} = 13{,}98$ cm $y_{cm} = 6{,}28$ cm
23. $x_{cm} = -0{,}25$ cm $y_{cm} = 0{,}125$ cm
24. $x_{cm} = 20$ cm $y_{cm} = 29{,}53$ cm (origine au coin inférieur gauche de la plaque.)

9.5 Le centre de gravité d'un avion

25. a) 1626 livres, ce qui est inférieur à la masse maximale permise
    b) 37,71 po c) Le centre de gravité est 1,21 pouces trop vers l'arrière
26. a) 426,8 kg b) 13,9 pouces du datum c) 17,5 pouces du datum
27. Ils doivent avancer le siège de 3,3 pouces.
28. a) 19 % du MAC b) On est à l'intérieur des limites.