Solutionnaire du chapitre 9

1. En prenant un $y = 0$ à la surface de l'eau, les énergies gravitationnelles aux points A, B et C sont

$$U_{gA} = mgy = 30kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 2,8m = 823,2J$$
$$U_{gB} = mgy = 30kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 1,5m = 441J$$
$$U_{gC} = mgy = 30kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 0m = 0J$$

a) En passant de A à B, la variation d'énergie est donc

$$\begin{aligned}\Delta U_g &= U_{gB} - U_{gA}\\ &= 441J - 823,2J\\ &= -382,2J\end{aligned}$$

b) En passant de A à C, la variation d'énergie est donc

$$\begin{aligned}\Delta U_g &= U_{gC} - U_{gA}\\ &= 0J - 823,2J\\ &= -823,2J\end{aligned}$$

Le travail est donc

$$\begin{aligned}W_g &= -\Delta U_g\\ &= --823,2J\\ &= 823,2J\end{aligned}$$

2. a) La formule de l'énergie potentielle est

$$\begin{aligned}U &= -\int F_x dx\\ &= -\int \left(2\tfrac{N}{m^3}x^3 + 2N\right)dx\\ &= -\frac{1}{2}\tfrac{N}{m^3}x^4 - 2N \cdot x + Cst\end{aligned}$$

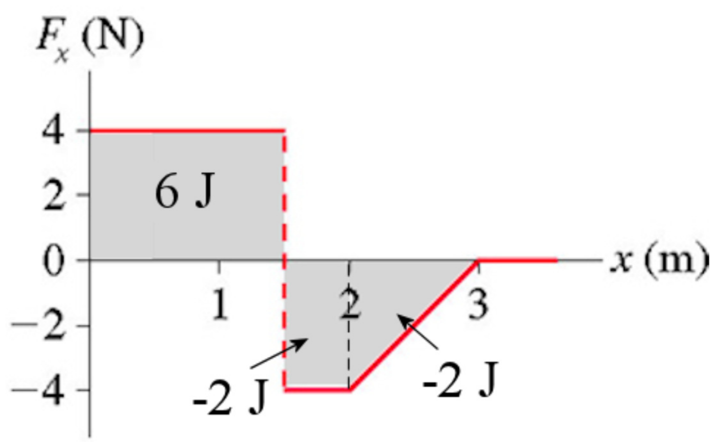
b) La différence d'énergie potentielle est

$$\begin{aligned}\Delta U &= \left(-\frac{1}{2}\tfrac{N}{m^3}(5m)^4 - 2N\cdot(5m)\right) - \left(-\frac{1}{2}\tfrac{N}{m^3}(-2m)^4 - 2N\cdot(-2m)\right)\\ &= (-322{,}5J) - (-4J)\\ &= -318{,}5J\end{aligned}$$

c) Le travail fait par la force est

$$\begin{aligned}W &= -\Delta U\\ &= -(-318{,}5J)\\ &= 318{,}5J\end{aligned}$$

3. La variation d'énergie potentielle est égale à – l'aire sous la courbe. Entre x = 0 m et x = 3 m, l'aire est



L'aire totale est de 2 J. La variation d'énergie potentielle est donc de -2 J.

4. La force est conservatrice si

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

a) Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial\left(3\tfrac{N}{m^2}\,y^2\right)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} == \frac{\partial\left(3\tfrac{N}{m^2}\,x^2\right)}{\partial y} = 0$$

Comme elles sont égales, la force est conservatrice.

b) Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial\left(3\tfrac{N}{m^3}\,xy^2 + 1\tfrac{N}{m}\,y\right)}{\partial x} = 3\tfrac{N}{m^3}\,y^2$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial\left(3\tfrac{N}{m^3}\,x^2y + 1\tfrac{N}{m}\,x\right)}{\partial y} = 3\tfrac{N}{m^3}\,x^2$$

Comme elles ne sont pas égales, la force n'est pas conservatrice.

c) Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial\left(3\tfrac{N}{m^3}\,x^2y + 1\tfrac{N}{m}\,x\right)}{\partial x} = 6\tfrac{N}{m^3}\,xy + 1\tfrac{N}{m}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial\left(3\tfrac{N}{m^3}\,xy^2 + 1\tfrac{N}{m}\,y\right)}{\partial y} = 6\tfrac{N}{m^3}\,xy + 1\tfrac{N}{m}$$

Comme elles sont égales, la force est conservatrice.

5. La force en x est

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial\left(4\tfrac{J}{m^2}\,x^2 + 2\tfrac{J}{m}\,(x+y) - 3\tfrac{J}{m^2}\,(xy)\right)}{\partial x} \\ &= -\left(8\tfrac{J}{m^2}\,x + 2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^2}\,(y)\right) \end{aligned}$$

À $x = 1$ m et $y = 2$ m, cette composante de la force est

$$\begin{aligned}F_x &= -\left(8\tfrac{J}{m^2}(1m)+2\tfrac{J}{m}-3\tfrac{J}{m^2}(2m)\right)\\ &= -4N\end{aligned}$$

La force en y est

$$\begin{aligned}F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}\\ &= -\frac{\partial\left(4\tfrac{J}{m^2}x^2+2\tfrac{J}{m}(x+y)-3\tfrac{J}{m^2}(xy)\right)}{\partial y}\\ &= -\left(0+2\tfrac{J}{m}-3\tfrac{J}{m^3}(x)\right)\end{aligned}$$

À x = 1 m et y = 2 m, cette composante de la force est

$$\begin{aligned}F_y &= -\left(2\tfrac{J}{m}-3\tfrac{J}{m^3}(1m)\right)\\ &= 1N\end{aligned}$$

La force est donc

$$\vec{F} = \left(-4\vec{i}+1\vec{j}\right)N$$

6. Si on intègre F_x par rapport à x, on arrive

$$\begin{aligned}U &= -\int\left(-4\tfrac{N}{m^2}xy^2+2\tfrac{N}{m}x\right)dx\\ &= 2\tfrac{N}{m^2}x^2y^2-1\tfrac{N}{m}x^2+C_1\end{aligned}$$

Si on intègre F_y par rapport à y, on arrive

$$\begin{aligned}U &= -\int\left(-4\tfrac{N}{m^2}x^2y+4\tfrac{N}{m}y\right)dy\\ &= 2\tfrac{N}{m^2}x^2y^2-2\tfrac{N}{m}y^2+C_2\end{aligned}$$

Le deuxième terme de la première intégrale est la partie de U qui dépend uniquement de x. Le deuxième terme de la deuxième intégrale est la partie de U qui dépend uniquement de y. Les premiers termes des deux intégrales donnent la partie de U qui dépend à la fois de x et y. On arrive donc à la conclusion que U est égal à

$$U = 2\tfrac{N}{m^2}x^2y^2 - 1\tfrac{N}{m}x^2 - 2\tfrac{N}{m}y^2 + Cst$$

b) Au point (2,1), l'énergie potentielle est

$$\begin{aligned} U &= 2\tfrac{N}{m^2}(2m)^2(1m)^2 - 1\tfrac{N}{m}(2m)^2 - 2\tfrac{N}{m}(1m)^2 \\ &= 2J \end{aligned}$$

c) Au point (5,2), l'énergie potentielle est

$$\begin{aligned} U &= 2\tfrac{N}{m^2}(5m)^2(2m)^2 - 1\tfrac{N}{m}(5m)^2 - 2\tfrac{N}{m}(2m)^2 \\ &= 167J \end{aligned}$$

d) Le travail est

$$\begin{aligned} W &= -\Delta U \\ &= -(167J - 2J) \\ &= -165J \end{aligned}$$

7. La composante en x de la force est

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial\left(4\tfrac{J}{m^2}x^2 + 2\tfrac{J}{m}(x+y+z) - 3\tfrac{J}{m^3}(xyz)\right)}{\partial x} \\ &= -\left(8\tfrac{J}{m^2}x + 2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^3}(yz)\right) \end{aligned}$$

À x = 1 m, y = 2 m et z = - 4 m, cette composante est

$$\begin{aligned} F_x &= -\left(8\tfrac{J}{m^2}(1m) + 2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^3}(2m \cdot -4m)\right) \\ &= -34N \end{aligned}$$

La composante en y de la force est

$$\begin{aligned} F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial\left(4\frac{J}{m^2}x^2 + 2\frac{J}{m}(x+y+z) - 3\frac{J}{m^3}(xyz)\right)}{\partial y} \\ &= -\left(0 + 2\frac{J}{m} - 3\frac{J}{m^3}(xz)\right) \end{aligned}$$

À x = 1 m, y = 2 m et z = - 4 m, cette composante est

$$\begin{aligned} F_y &= -\left(2\frac{J}{m} - 3\frac{J}{m^3}(1m \cdot -4m)\right) \\ &= -14N \end{aligned}$$

La composante en z de la force est

$$\begin{aligned} F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial\left(4\frac{J}{m^2}x^2 + 2\frac{J}{m}(x+y+z) - 3\frac{J}{m^3}(xyz)\right)}{\partial z} \\ &= -\left(0 + 2\frac{J}{m} - 3\frac{J}{m^3}(xy)\right) \end{aligned}$$

À x = 1 m, y = 2 m et z = - 4 m, cette composante est

$$\begin{aligned} F_z &= -\left(2\frac{J}{m} - 3\frac{J}{m^3}(1m \cdot 2m)\right) \\ &= 4N \end{aligned}$$

La force est donc

$$\vec{F} = \left(-34\vec{i} - 14\vec{j} + 4\vec{k}\right)N$$

8. a) À l'équilibre, la force faite par le ressort est égale à la force de gravitation.

$$kx = mg$$

L'élongation du ressort est donc

$$\begin{aligned} x &= \frac{mg}{k} \\ &= \frac{0{,}05kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg}}{50\frac{N}{m}} \\ &= 0{,}0098m \end{aligned}$$

L'énergie du ressort est donc

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}50\tfrac{N}{m} \cdot (0{,}0098m)^2 \\ &= 0{,}002401J \end{aligned}$$

b) À l'équilibre, la force faite par le ressort est égale à la force de gravitation.

$$kx' = mg$$

L'élongation du ressort est donc

$$\begin{aligned} x' &= \frac{mg}{k} \\ &= \frac{0{,}55kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg}}{50\frac{N}{m}} \\ &= 0{,}1078m \end{aligned}$$

L'énergie du ressort est donc

$$\begin{aligned} U_R' &= \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}50\tfrac{N}{m} \cdot (0{,}1078m)^2 \\ &= 0{,}290521J \end{aligned}$$

c) Le travail fait par le ressort est

$$\begin{aligned} W_R &= -\Delta U_R \\ &= -(0{,}290521J - 0{,}002401J) \\ &= -0{,}28812J \end{aligned}$$

9. a) Le système étant formé uniquement d'un objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Initialement (chariot au point A), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + 2000kg \times 9,8\tfrac{N}{kg} \times 25m \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + 490\,000J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point B.

L'énergie au point B est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= \frac{1}{2}2000kg \cdot \left(25\tfrac{m}{s}\right)^2 + 0J \\ &= 625\,000J \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$\begin{gathered} E = E' \\ \frac{1}{2}mv^2 + 490\,000J = 625\,000J \\ \frac{1}{2}mv^2 = 135\,000J \\ \frac{1}{2}2000kg \cdot v^2 = 135\,000J \\ v = 11,62\tfrac{m}{s} \end{gathered}$$

b) L'énergie au point C est

$$\begin{aligned} E'' &= \frac{1}{2}mv''^2 + mgy'' \\ &= \frac{1}{2}mv''^2 + 2000kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 5m \\ &= \frac{1}{2}mv''^2 + 98\,000J \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$E' = E''$$
$$625\,000J = \frac{1}{2}mv''^2 + 98\,000J$$
$$527\,000J = \frac{1}{2}2000kg \times v''^2$$
$$v = 22,96\tfrac{m}{s}$$

10. Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (ressort comprimé), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + 0J + \frac{1}{2}2000\tfrac{N}{m} \cdot (0,2m)^2 \\ &= 40J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le y = 0 au niveau du sol.

a) Quand le ressort est comprimé de 5 cm, l'énergie est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 0J + \frac{1}{2}2000\tfrac{N}{m} \cdot (0,05m)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 2,5J \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$E = E'$$
$$40J = \frac{1}{2}mv'^2 + 2,5J$$
$$37,5J = \frac{1}{2}10kg \times v'^2$$
$$v' = 2,739\tfrac{m}{s}$$

b) Quand le ressort n'est plus comprimé, l'énergie est

$$E' = \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2$$
$$= \frac{1}{2}mv'^2 + 0J + 0J$$
$$= \frac{1}{2}mv'^2$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$E = E'$$
$$40J = \frac{1}{2}mv'^2$$
$$40J = \frac{1}{2}10kg \times v'^2$$
$$v' = 2,828\tfrac{m}{s}$$

11. Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (ressort comprimé), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + 0J + \frac{1}{2}500\tfrac{N}{m}\cdot(0,2m)^2 \\ &= 10J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au niveau du sol.

Quand la masse est à sa hauteur maximale sur la pente, l'énergie est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0J + mgy' + 0J \\ &= mgy' \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 10J &= mgy' \\ 10J &= 2kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot y' \\ y' &= 0,5102m \end{aligned}$$

On trouve le déplacement avec

$$\begin{aligned} \sin 45° &= \frac{y'}{D} \\ D &= \frac{y'}{\sin 45°} \\ D &= \frac{0,5102m}{\sin 45°} \\ D &= 0,7215m = 72,15cm \end{aligned}$$

12. Le système étant formé d'un objet et de deux ressorts, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2$$

Initialement (instant 1), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \\ &= 0J + 0J + \frac{1}{2}100\tfrac{N}{m}\cdot(0,5m)^2 + \frac{1}{2}200\tfrac{N}{m}\cdot(0,1m)^2 \\ &= 12,5J + 1J \\ &= 13,5J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au niveau du sol.

L'énergie à l'instant 2 est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}k_1x_1'^2 + \frac{1}{2}k_2x_2'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 0J + \frac{1}{2}100\tfrac{N}{m}\cdot(0,25m)^2 + \frac{1}{2}200\tfrac{N}{m}\cdot(0,15m)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 3,125J + 2,25J \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + 5,375J \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 13,5J &= \frac{1}{2}mv'^2 + 5,375J \\ 8,125J &= \frac{1}{2}5kg\cdot v'^2 \\ v' &= 1,803\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

13. Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (instant 1), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + 2kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot 0{,}5m + 0J \\ &= 9{,}8J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au bout du tube.

L'énergie à l'instant 2 est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0J + 2kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot (-d) + \frac{1}{2}100\tfrac{N}{m} \cdot d^2 \\ &= 19{,}6N \cdot (-d) + 50\tfrac{N}{m} d^2 \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 9{,}8J &= 19{,}6N \cdot (-d) + 50\tfrac{N}{m} d^2 \\ 50\tfrac{N}{m} d^2 - 19{,}6N \cdot d - 9{,}8J &= 0 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est d = 0,6801 m.

(L'autre solution d = -0,2881 m doit être rejetée puisqu'elle correspond à un étirement du ressort, ce qui n'a pas de sens ici.)

14. Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (ressort comprimé), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + 0J + \frac{1}{2}2000\tfrac{N}{m} \cdot (0{,}2m)^2 \\ &= 40J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au sol.

L'énergie à l'instant 2 (ressort partiellement comprimé) est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 0J + \frac{1}{2}kx'^2 \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 40J &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx'^2 \end{aligned}$$

Puisque l'énergie cinétique est égale à l'énergie du ressort, on a

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}kx'^2$$

Notre équation devient donc

$$\begin{aligned} 40J &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx'^2 \\ 40J &= \frac{1}{2}kx'^2 + \frac{1}{2}kx'^2 \\ 40J &= kx'^2 \\ 40J &= 2000\tfrac{N}{m}x'^2 \\ x' &= 0{,}1414m \end{aligned}$$

15. Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (chariot au point 1), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}2000kg \cdot \left(10\tfrac{m}{s}\right)^2 + 2000kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 30m + 0J \\ &= 100\,000J + 588\,000J \\ &= 688\,000J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point 2.

a) La vitesse maximale sera atteinte au point le plus bas, donc au point 2. À ce point, l'énergie est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 0J + 0J \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 688\,000J &= \frac{1}{2}mv'^2 \\ 688\,000J &= \frac{1}{2}2000kg \cdot v'^2 \\ v' &= 26,23\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

b) Quand la compression est maximale, l'énergie est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0J + 2000kg \cdot 9,8\tfrac{N}{m} \cdot 15m + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= 294\,000J + \frac{1}{2}kx'^2 \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$E = E'$$
$$688\,000J = 294\,000J + \frac{1}{2}kx'^2$$
$$394\,000J = \frac{1}{2}800\tfrac{N}{m} \cdot x'^2$$
$$x' = 31,38m$$

c) À ce moment, l'énergie est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 2000kg \cdot 9,8\tfrac{N}{m} \cdot 15m + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 294\,000J + \frac{1}{2}kx'^2 \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$E = E'$$
$$688\,000J = \frac{1}{2}mv'^2 + 294\,000J + \frac{1}{2}kx'^2$$
$$394\,000J = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx'^2$$

Puisque l'énergie cinétique est le double de l'énergie du ressort, on a

$$\frac{1}{2}mv'^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}kx'^2$$
$$\frac{1}{4}mv'^2 = \frac{1}{2}kx'^2$$

Notre équation devient donc

$$394\,000J = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx'^2$$
$$394\,000J = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{4}mv'^2$$
$$394\,000J = \frac{3}{4}mv'^2$$
$$394\,000J = \frac{3}{4}2000kg \cdot v'^2$$
$$v' = 16,21\tfrac{m}{s}$$

16. Le système étant formé de deux objets et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (Instant 1), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + 0J + 0J + 0J + \frac{1}{2}195\tfrac{N}{m}\cdot(0,15m)^2 \\ &= 2,19375J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ de chaque bloc à sa position à l'instant 1.

À l'instant 2, le bloc de 30 kg a baissé de 10 cm alors que le bloc de 25 kg s'est déplacé de 10 cm vers le haut de la pente, ce qui fait que la variation de hauteur de ce bloc est donnée par

$$\sin 40° = \frac{y}{10cm}$$
$$y = 6,4279m$$

L'énergie à l'instant 2 est donc

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}m_1v'^2 + m_1gy_1' + \frac{1}{2}m_2v'^2 + m_2gy_2' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}30kg\cdot v'^2 + 30kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot(-0,1m) + \frac{1}{2}25kg\cdot v'^2 \\ &\qquad + 25kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 0,064279m + \frac{1}{2}195\tfrac{N}{m}\cdot(0,05m)^2 \\ &= \frac{1}{2}30kg\cdot v'^2 + -29,4J + \frac{1}{2}25kg\cdot v'^2 + 15,748J + 0,24375J \\ &= \frac{1}{2}55kg\cdot v'^2 + -13,408J \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 2,19375J &= \frac{1}{2}55kg\cdot v'^2 + -13,408J \\ 15,602J &= \frac{1}{2}55kg\cdot v'^2 \\ v' &= 0,7532\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

17. Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Initialement (pendule au point A), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= 0J + mgy \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point le plus bas du mouvement du pendule.

La hauteur du pendule au point A est

$$\begin{aligned} y &= L(1-\cos\theta) \\ &= 1,2m(1-\cos 35°) \\ &= 0,217m \end{aligned}$$

L'énergie au point A est donc

$$\begin{aligned} E &= mgy \\ &= 4kg \times 9,8 \tfrac{N}{m} \times 0,217m \\ &= 8,507J \end{aligned}$$

L'énergie au point B est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 0J \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 8,507J &= \frac{1}{2}mv'^2 \\ 8,507J &= \frac{1}{2}4kg \cdot v'^2 \\ v' &= 2,062 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

18. Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Initialement (Radu au bout de la corde verticale avec une vitesse v), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

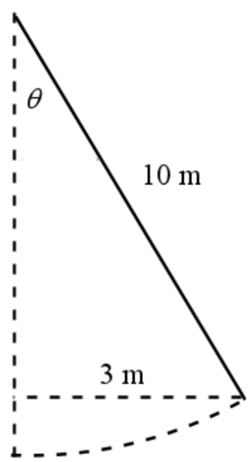
Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point le plus bas du mouvement du pendule.

L'énergie à l'instant 2 (Radu au point le plus haut du mouvement du pendule) est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= mgy' \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ \frac{1}{2}mv^2 &= mgy' \\ \frac{1}{2}v^2 &= gy' \end{aligned}$$



On doit alors trouver la valeur de y_{min} quand Radu traverse le ravin. On trouve premièrement l'angle minimum avec

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{3m}{10m} \\ \theta &= 17,46° \end{aligned}$$

Cela correspond à une hauteur de

$$\begin{aligned} y_{\min} &= L\left(1-\cos\theta_{\min}\right) \\ &= 10m\cdot\left(1-\cos 17,46°\right) \\ &= 0,4606m \end{aligned}$$

Notre équation de l'énergie nous donne alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_{\min}^2 &= gy_{\min} \\ \frac{1}{2}v_{\min}^2 &= 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 0,4606m \\ v_{\min} &= 3,005\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

19. Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Initialement (configuration montrée sur la figure), la hauteur du pendule est

$$\begin{aligned} y &= L(1-\cos\theta) \\ &= 4m\cdot(1-\cos 25°) \\ &= 0,3748m \end{aligned}$$

L'énergie mécanique du pendule est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= \frac{1}{2}2kg\cdot\left(2\tfrac{m}{s}\right)^2 + 2kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 0,3748m \\ &= 11,345J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point le plus bas du mouvement du pendule.

a) L'énergie à l'instant 2 (pendule vertical) est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 11,345J &= \frac{1}{2}mv'^2 \\ 11,345J &= \frac{1}{2}2kg\cdot v'^2 \\ v' &= 3,368\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

b) L'énergie à l'instant 3 (pendule à sa hauteur maximale) est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= mgy' \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$
\begin{aligned}
E &= E' \\
11,345J &= mgy' \\
11,345J &= 2kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot y' \\
y' &= 0,57885m
\end{aligned}
$$

Cela correspond à l'angle

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{L-y'}{L} \\
\cos\theta &= \frac{4m-0,57885m}{4m} \\
\theta &= 31,2°
\end{aligned}
$$

20. Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Initialement (instant 1), la hauteur du pendule est

$$y = L(1-\cos\theta)$$

L'énergie mécanique du pendule est donc

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\
&= 0J + mgy \\
&= mgL(1-\cos 50°)
\end{aligned}
$$

Nous avons choisi de mettre le y = 0 au point le plus bas du mouvement du pendule.

L'énergie à l'instant 2 est (la longueur de la corde est maintenant L')

$$
\begin{aligned}
E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\
&= 0J + mgy' \\
&= mgL'(1-\cos\theta)
\end{aligned}
$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$E = E'$$
$$mgL(1-\cos 50°) = mgL'(1-\cos\theta)$$
$$L(1-\cos 50°) = L'(1-\cos\theta)$$
$$1,5m(1-\cos 50°) = 0,5m(1-\cos\theta)$$
$$\cos\theta = -0,0716$$
$$\theta = 94,1°$$

21. Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgy$$

(On va utiliser M pour la masse pour éviter la confusion avec les mètres.)

Initialement (auto à la position A), la hauteur de l'auto est

$$\begin{aligned} y &= L(1-\cos\theta) \\ &= 5m(1-\cos 80°) \\ &= 4,132m \end{aligned}$$

L'énergie mécanique de l'auto est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}Mv^2 + Mgy \\ &= 0J + Mgy \\ &= Mg \cdot 4,132m \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point le plus bas du mouvement de l'auto

L'énergie à l'instant 2 est (auto à la position B)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}Mv'^2 + Mgy' \\ &= \frac{1}{2}Mv'^2 + 0J \\ &= \frac{1}{2}Mv'^2 \end{aligned}$$

En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$E = E'$$
$$Mg \cdot 4{,}132m = \frac{1}{2}Mv'^2$$
$$g \cdot 4{,}132m = \frac{1}{2}v'^2$$
$$v' = 8{,}999\tfrac{m}{s}$$

Une personne dans la voiture a donc une accélération centripète de

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(8{,}999\tfrac{m}{s}\right)^2}{5m} = 16{,}1965\tfrac{m}{s^2}$$

vers le haut.

Les composantes du poids apparent d'une personne dans la voiture sont donc

$$P_{app\ x} = -Ma_x$$
$$\to P_{app\ x} = 0$$
$$P_{app\ y} = -Mg - Ma_y$$
$$\to P_{app\ y} = -M \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} - m \cdot 16{,}1965\tfrac{m}{s^2}$$
$$\to P_{app\ y} = -M \cdot 25{,}9965\tfrac{N}{kg}$$

Le nombre de *g* est donc

$$n_g = \frac{\left|P_{app}\right|}{P_{\text{reel sur Terre}}} = \frac{M \cdot 25{,}9965\tfrac{N}{kg}}{M \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}} = 2{,}653$$

22. Le système étant formé d'un objet (la balle) et de deux ressorts, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2$$

À l'instant 1 (ressorts étirés), la balle n'a pas de vitesse. En mettant notre $y = 0$ entre les deux ressorts (où est la balle), mgy sera 0. Toutefois, les ressorts sont étirés. La longueur des ressorts est égale à l'hypoténuse d'un triangle ayant des côtés adjacents à l'angle droit de 50 cm et 30 cm. La longueur des ressorts est donc

$$L = \sqrt{(50cm)^2 + (30cm)^2} = 58,31cm$$

Comme les ressorts n'étaient pas étirés ni compressés quand leur longueur était de 50 cm, alors ils sont étirés de 8,31 cm. Ainsi, l'énergie à l'instant 1 est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2}500\tfrac{N}{m} \cdot (0,0831m)^2 + \frac{1}{2}500\tfrac{N}{m} \cdot (0,0831m)^2 \\ &= 3,452J \end{aligned}$$

À l'instant 2, la balle a de la vitesse, les ressorts ne sont plus étirés et la balle est toujours à $y = 0$. L'énergie à l'instant 2 est donc

$$\begin{aligned} E'_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + 0 + 0 + 0 \end{aligned}$$

Avec la conservation de l'énergie mécanique, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 3,452J &= \frac{1}{2}mv'^2 \\ 3,452J &= \frac{1}{2} \cdot 0,1kg \cdot v'^2 \\ v' &= 8,31\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

23. Le système étant formé de deux blocs, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2$$

Initialement (configuration montrée sur la figure), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 \\ &= 0J + 0J + 0J + 0J \\ &= 0J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ de chaque bloc à la position initiale des blocs.

On sait que les blocs se sont déplacés de 2 m, mais on ne sait pas dans quelle direction. On doit donc faire les deux solutions.

1re solution : le bloc de 6 kg monte de 2 m

L'énergie après le déplacement de 2 m est maintenant

$$\begin{aligned}E' &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + m_1gy_1' + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + m_2gy_2' \\ &= \frac{1}{2}m_1v'^2 + 6kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot 2m + \frac{1}{2}m_2v'^2 + 10kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot 0m \\ &= \frac{1}{2}6kg \cdot v'^2 + \frac{1}{2}10kg \cdot v'^2 + 117{,}6J \\ &= 8kg \cdot v'^2 + 117{,}6J\end{aligned}$$

Comme il y a des forces externes, on doit aussi calculer le travail fait par ces forces.

$$\begin{aligned}W_{10N} &= 10N \cdot 2m \cdot \cos(0°) = 20J \\ W_{20N} &= 20N \cdot 2m \cdot \cos(180°) = -40J\end{aligned}$$

Ce qui donne un travail net de -20 J pour les forces externes.

On a alors

$$\begin{aligned}E + W_{ext} &= E' \\ 0J + -20J &= 8kg \cdot v'^2 + 117{,}6J \\ v'^2 &= -17{,}2\tfrac{m^2}{s^2}\end{aligned}$$

Ce qui n'a pas de solution. Il est donc impossible que le bloc de 6 kg monte de 2 m.

2e solution : le bloc de 6 kg descend de 2 m

L'énergie après le déplacement de 2 m est maintenant

$$\begin{aligned}E' &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + m_1gy_1' + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + m_2gy_2' \\ &= \frac{1}{2}m_1v'^2 + 6kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot(-2m) + \frac{1}{2}m_2v'^2 + 10kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot 0m \\ &= \frac{1}{2}6kg\cdot v'^2 + \frac{1}{2}10kg\cdot v'^2 - 117{,}6J \\ &= 8kg\cdot v'^2 - 117{,}6J\end{aligned}$$

Comme il y a des forces externes, on doit aussi calculer le travail fait par ces forces.

$$\begin{aligned}W_{10N} &= 10N\cdot 2m\cdot\cos(180°) = -20J \\ W_{20N} &= 20N\cdot 2m\cdot\cos(0°) = 40J\end{aligned}$$

Ce qui donne un travail net de 20 J pour les forces externes.

On a alors

$$\begin{aligned}E + W_{ext} &= E' \\ 0J + 20J &= 8kg\cdot v'^2 - 117{,}6J \\ v'^2 &= 17{,}2\tfrac{m^2}{s^2} \\ v' &= 4{,}147\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

24. Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (configuration montrée sur la figure), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + 0J + \frac{1}{2}20\,000\tfrac{N}{m}\cdot(3m)^2 \\ &= 90\,000J\end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au sol.

L'énergie après le déplacement de 50 m est maintenant

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 0J + 0J \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 \end{aligned}$$

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$W_{nc} = 2000N \cdot 50m \cdot \cos(0°) = 100\,000J$$

On a alors

$$\begin{aligned} E + W_{nc} &= E' \\ 90\,000J + 100\,000J &= \frac{1}{2}mv'^2 \\ 190\,000J &= \frac{1}{2}500kg \cdot v'^2 \\ v' &= 27{,}568\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

25. Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Initialement (configuration montrée sur la figure), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= 0J + mg \cdot (62m) \\ &= mg \cdot (62m) \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au bas de la pente.

L'énergie après la descente et l'arrêt sur le plat est maintenant

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= 0J + 0J + 0J \\ &= 0J \end{aligned}$$

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$\begin{aligned} W_{non-cons} &= F_f \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c F_N \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c mg \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= -\mu_c mg \Delta s \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{gathered} E + W_{non-cons} = E' \\ mg \cdot (62m) + -\mu_c mg \Delta s = 0J \\ (62m) - \mu_c \Delta s = 0m \\ 62m - 0,2 \cdot \Delta s = 0m \\ \Delta s = 310m \end{gathered}$$

26. Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (configuration montrée sur la figure), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + 0J + \frac{1}{2}2000\tfrac{N}{m} \cdot (0,5m)^2 \\ &= 250J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au sol.

Après l'arrêt sur le plat, l'énergie est maintenant

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0J + 0J + 0J \\ &= 0J \end{aligned}$$

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$\begin{aligned} W_{non-cons} &= F_f \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c F_N \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c mg \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= -\mu_c mg \Delta s \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{gathered} E + W_{non-cons} = E' \\ 250J + -\mu_c mg\Delta s = 0J \\ 250J - \mu_c \cdot 10kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot 42m = 0m \\ \mu_c = 0{,}06074 \end{gathered}$$

27. a) Le système étant formé de deux blocs et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (configuration montrée sur la figure), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + 0J + 0J + 0J + 0J \\ &= 0J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ de chaque bloc à la position initiale des blocs.

On sait que les blocs se sont déplacés de 1 m et il est seulement possible que le bloc de 36 kg ait descendu.

Après le déplacement de 1 m, l'énergie est maintenant

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + m_1gy_1' + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + m_2gy_2' + \frac{1}{2}kx'^2 \\
&= \frac{1}{2}36kg \cdot v'^2 + 36kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot (-1m) + \frac{1}{2}12kg \cdot v'^2 + 10kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 0m + \frac{1}{2}200\tfrac{N}{m}(1m)^2 \\
&= 18kg \cdot v'^2 - 352,8J + 6kg \cdot v'^2 + 0J + 100J \\
&= 24kg \cdot v'^2 - 252,8J
\end{aligned}$$

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force de friction agissant sur le bloc de 12 kg.

$$\begin{aligned}
W_{non-cons} &= F_f \Delta s \cdot \cos(180°) \\
&= \mu_c F_N \Delta s \cdot \cos(180°) \\
&= \mu_c mg \Delta s \cos(180°) \\
&= 0,4 \cdot 12kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 1m \cdot \cos 180° \\
&= -47,04J
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
E + W_{non-cons} &= E' \\
0J + -47,04J &= 24kg \cdot v'^2 - 252,8J \\
205,76J &= 24kg \cdot v'^2 \\
v' &= 2,928\tfrac{m}{s}
\end{aligned}$$

b) Après le déplacement de 3,2 m, l'énergie est maintenant

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + m_1gy_1' + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + m_2gy_2' + \frac{1}{2}kx'^2 \\
&= \frac{1}{2}36kg \cdot v'^2 + 36kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot (-3,2m) + \frac{1}{2}12kg \cdot v'^2 + 10kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 0m + \frac{1}{2}200\tfrac{N}{m}(3,2m)^2 \\
&= 18kg \cdot v'^2 - 1128,96J + 6kg \cdot v'^2 + 0J + 1024J \\
&= 24kg \cdot v'^2 - 104,96J
\end{aligned}$$

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force de friction agissant sur le bloc de 12 kg.

$$\begin{aligned} W_{non-cons} &= F_f \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c F_N \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c mg \Delta s \cos(180°) \\ &= 0,4 \cdot 12kg \cdot 9,8 \tfrac{N}{kg} \cdot 3,2m \cdot \cos 180° \\ &= -150,528J \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} E + W_{non-cons} &= E' \\ 0J + -150,528J &= 24kg \cdot v'^2 - 104,96J \\ -45,568J &= 24kg \cdot v'^2 \end{aligned}$$

Ce qui n'a pas de solution. Cela veut dire que le déplacement ne peut pas être de 3,2 m.

28. Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (configuration montrée sur la figure), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + 0J + 0J \\ &= 0J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ à la position initiale du bloc.

Après l'arrêt, le ressort est maintenant comprimé d'une distance d et le bloc s'est déplacé de 3 m + d sur la pente. Cela correspond à une baisse de hauteur y donnée par

$$\begin{aligned} \sin 30° &= \frac{y}{3m + d} \\ y &= (3m + d)\sin 30° \\ y &= \tfrac{1}{2}(3m + d) \end{aligned}$$

l'énergie est maintenant

$$\begin{aligned}E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0J + mg \cdot -\frac{1}{2}(3m+d) + \frac{1}{2}kd^2 \\ &= -\frac{1}{2}mg(3m+d) + \frac{1}{2}kd^2\end{aligned}$$

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$\begin{aligned}W_{non-cons} &= F_f \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c F_N \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c mg \sin(60°) \cdot (3m+d)\cos(180°) \\ &= -\mu_c mg \sin(60°)(3m+d)\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{gathered}E + W_{non-cons} = E' \\ 0J + -\mu_c mg \sin(60°)(3m+d) = -\frac{1}{2}mg(3m+d) + \frac{1}{2}kd^2 \\ -\mu_c mg \sin(60°)(3m+d) = -\frac{1}{2}mg(3m+d) + \frac{1}{2}kd^2 \\ -0,2 \cdot 3kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \sin(60°)(3m+d) = -\frac{1}{2}3kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg}(3m+d) + \frac{1}{2}400\tfrac{N}{m}d^2 \\ -5,09223N(3m+d) = -14,7N(3m+d) + 200\tfrac{N}{m}d^2 \\ -15,2767J - 5,09223N \cdot d = -44,1J - 14,7N \cdot d + 200\tfrac{N}{m}d^2 \\ -28,8233J - 9,60777N \cdot d + 200\tfrac{N}{m}d^2 = 0\end{gathered}$$

La solution de cette équation est d = 0,4044 m.

(Il y a une autre solution négative qui correspondrait à un étirement du ressort, ce qui n'a pas de sens ici.)

29. Le système étant formé de deux blocs, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2$$

Initialement (configuration montrée sur la figure), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 \\ &= 0J + 0J + 0J + 0J \\ &= 0J\end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ de chaque bloc à la position initiale des blocs.

L'énergie après le déplacement de 2 m est maintenant

$$\begin{aligned}E' &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + m_1gy_1' + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + m_2gy_2' \\ &= \frac{1}{2}m_1v'^2 + 6kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot(-2m) + \frac{1}{2}m_2v'^2 + 10kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot 0m \\ &= \frac{1}{2}6kg\cdot v'^2 + \frac{1}{2}10kg\cdot v'^2 - 117{,}6J \\ &= 8kg\cdot v'^2 - 117{,}6J\end{aligned}$$

Comme il y a une force externe, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$W_{ext} = 20N\cdot 2m\cdot\cos(0°) = 40J$$

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$\begin{aligned}W_{non-cons} &= F_f\Delta s\cdot\cos(180°) \\ &= \mu_c F_N\Delta s\cdot\cos(180°) \\ &= \mu_c F_N\Delta s\cdot\cos(180°) \\ &= 0{,}4\cdot 10kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot 2m\cos(180°) \\ &= -78{,}4J\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}E + W_{ext} + W_{non-cons} &= E' \\ 0J + 40J - 78{,}4J &= 8kg\cdot v'^2 - 117{,}6J \\ v'^2 &= 9{,}9\tfrac{m^2}{s^2} \\ v' &= 3{,}146\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

30. a) Il ne peut pas être aux endroits où U est plus grande que E, donc à

$$x < 4 \text{ m} \quad \text{et} \quad x > 26 \text{ m}$$

b) Au minimum de U, donc à x = 10 m.

c) à x = 20, on a U = 2,6 J. Puisque l'énergie mécanique est de 4 J, cela signifie que l'énergie cinétique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E_k + U \\ 4J &= E_k + 2,6J \\ E_k &= 1,4J \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E_K &= 1,4J \\ \frac{1}{2} m v^2 &= 1,4J \\ \frac{1}{2} 2kg \cdot v^2 &= 1,4J \\ v &= 1,1832 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Comme c'est un peu approximatif, on va dire 1,2 m/s.

d) Équilibre stable à x = 10 m. L'énergie mécanique devrait être de 0,2 J.
Équilibre stable à x = 22 m. L'énergie mécanique devrait être de 2 J.

e) Équilibre instable à x = 17 m. L'énergie mécanique devrait être de 3,4 J.

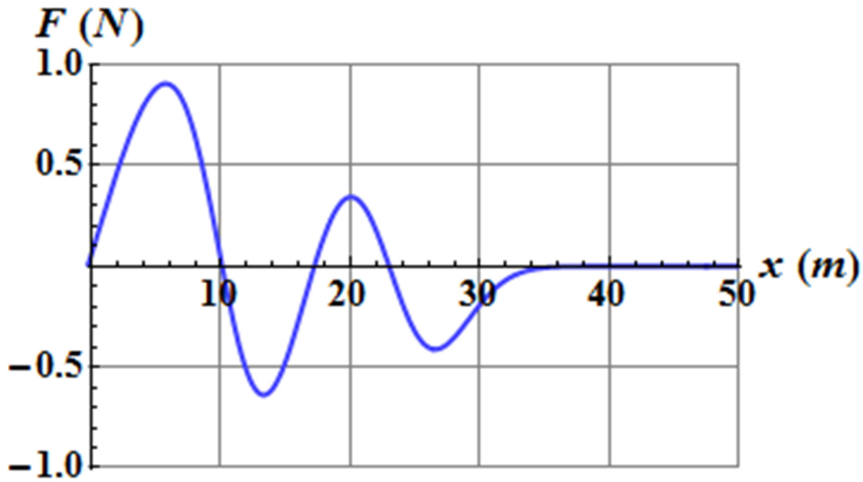
f) À x = 10 m, on a U = 0,2 J et à x = 20 m, on a U = 2,6 J. On a donc

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_2 - U_1 \\ &= 2,6J - 0,2J \\ &= 2,4J \end{aligned}$$

Le travail est donc

$$\begin{aligned} W &= -\Delta U \\ &= -2,4J \end{aligned}$$

g)



31. Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r}$$

Initialement (Neil au repos à 400 000 km de la surface de la Terre), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r} \\ &= 0J + \frac{-6,674\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,972\times10^{24} kg \cdot 100kg}{406\,371\,000m} \\ &= -9,80806\times10^{7} J \end{aligned}$$

a) Quand la vitesse est de 5000 m/s, l'énergie est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r} \\ &= \frac{1}{2}100kg \cdot \left(5000 \tfrac{m}{s}\right)^2 + \frac{-6,674\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,972\times10^{24} kg \cdot 100kg}{r'} \\ &= 1,25\times10^{9} J - \frac{3,991\times10^{16} Jm}{r'} \end{aligned}$$

On a alors

$$E = E'$$
$$-9,80806\times10^{7}J = 1,25\times10^{9}J - \frac{3,991\times10^{16}Jm}{r'}$$
$$-1,3481\times10^{9}J = -\frac{3,991\times10^{16}Jm}{r'}$$
$$r' = 2,9566\times10^{7}m$$
$$r' = 29\,566km$$

La distance à partir de la surface de la Terre est donc

29 566 km – 6371 km = 23 195 km

b) À l'arrivée sur Terre, l'énergie est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GM_Tm}{r} \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}kg\cdot 100kg}{6\,371\,000m} \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 - 6,2560\times10^{9}J \end{aligned}$$

On a alors

$$E = E'$$
$$-9,80806\times10^{7}J = \frac{1}{2}mv'^2 - 6,2556\times10^{9}J$$
$$6,1579\times10^{9}J = \frac{1}{2}mv'^2$$
$$6,1579\times10^{9}J = \frac{1}{2}100kg\cdot v'^2$$
$$v' = 11\,098\tfrac{m}{s} = 11,098\tfrac{km}{s}$$

32. La vitesse de libération est

$$\begin{aligned} v_{lib} &= \sqrt{\frac{2GM_c}{R_c}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 7,34 \times 10^{22} kg}{1,737 \times 10^6 m}} \\ &= 2375 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

33. Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_L m}{r}$$

Initialement (objet qui part de la surface de la Lune), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_L m}{r} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 7,34 \times 10^{22} kg \cdot m}{1,737 \times 10^6 m} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - 2,8202 \times 10^6 \tfrac{J}{kg} \cdot m \end{aligned}$$

Quand l'objet atteint sa hauteur maximale de 3000 km, sa vitesse est nulle. L'énergie est alors

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GM_L m}{r'} \\ &= 0J + \frac{-6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 7,34 \times 10^{22} kg \cdot m}{4,737 \times 10^6 m} \\ &= -1,0341 \times 10^6 \tfrac{J}{kg} \cdot m \end{aligned}$$

On a alors

$$E = E'$$
$$\frac{1}{2}mv^2 - 2,8202\times10^6 \tfrac{J}{kg}\cdot m = -1,0341\times10^6 \tfrac{J}{kg}\cdot m$$
$$\frac{1}{2}v^2 - 2,8202\times10^6 \tfrac{J}{kg} = -1,0341\times10^6 \tfrac{J}{kg}$$
$$\frac{1}{2}v^2 = 1,786\times10^6 \tfrac{J}{kg}$$
$$v = 1890 \tfrac{m}{s}$$

34. Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r}$$

Initialement (objet au repos à la surface de la Terre), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{R_T} \\ &= 0J + \frac{-6,674\times10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24} kg\cdot 350kg}{6,371\times10^6 m} \\ &= -2,1896\times10^{10} J \end{aligned}$$

Quand l'objet est en orbite, son énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GM_T m}{r'} \\ &= \frac{-GM_T m}{2r'} \\ &= \frac{-6,674\times10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24} kg\cdot 350kg}{2\cdot 6,871\times10^6 m} \\ &= -1,0151\times10^{10} J \end{aligned}$$

On a alors

$$E + W_{non-cons} = E'$$
$$-2,1896\times10^{10} J + W_{non-con} = -1,0151\times10^{10} J$$
$$W_{non-cons} = 1,174\times10^{10} J$$

35. a) Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_Tm}{r}$$

Initialement (objet au repos à la surface de la Terre), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_Tm}{R_T} \\ &= 0J + \frac{-GM_Tm}{R_T} \end{aligned}$$

Quand l'objet est en orbite, son énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GM_Tm}{r'} \\ &= \frac{-GM_Tm}{2r'} \end{aligned}$$

L'énergie donnée au satellite est donc

$$\begin{aligned} E + W_{non-cons} &= E' \\ \frac{-GM_Tm}{R_T} + W_{non-con} &= \frac{-GM_Tm}{2r'} \\ W_{non-cons} &= \frac{-GM_Tm}{2r'} + \frac{GM_Tm}{R_T} \\ W_{non-cons} &= GM_Tm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r'}\right) \end{aligned}$$

L'énergie cinétique du satellite est ½mv^2. Or, la vitesse du satellite en orbite est

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Ce qui signifie que l'énergie cinétique sur l'orbite de rayon *r'* est

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{r'}$$

Ainsi, la proportion d'énergie cinétique donnée par rapport à l'énergie totale donnée est

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{W_{non-cons}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{r'}}{GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r'}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2r'}}{\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r'}\right)}$$

$$= \frac{R_T}{2r' - R_T}$$

$$= \frac{6371km}{2(6371km + 150km) - 6371km}$$

$$= 0,9550$$

Ainsi, 95,5% de l'énergie donnée à ce satellite en orbite basse est sous forme d'énergie cinétique.

b) Si on veut que 50% de l'énergie donnée soit sous forme d'énergie cinétique, on doit avoir

$$0,5 = \frac{R_T}{2r' - R_T}$$

$$0,5 = \frac{6371km}{2r' - 6371km}$$

$$r' = 9556,5km$$

36. a) Le système étant formé d'un seul objet (la Lune), l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}M_L v^2 + \frac{-GM_T M_L}{r}$$

Initialement (Lune en orbite autour de la Terre), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}M_L v^2 + \frac{-GM_T M_L}{r} \\ &= \frac{-GM_T M_L}{2r} \\ &= \frac{-6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}\,kg\cdot 7,34\times10^{22}\,kg}{2\cdot 3,844\times10^{8}\,m} \\ &= -3,8053\times10^{28}\,J \end{aligned}$$

Quand la Lune est très loin de la Terre, son énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}M_L v'^2 + \frac{-GM_T M_L}{r'} \\ &= \frac{1}{2}M_L v'^2 + 0J \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} E + W_{ext} &= E' \\ -3,8053\times10^{28}\,J + W_{ext} &= \frac{1}{2}M_L v'^2 \\ W_{ext} &= 3,8053\times10^{28}\,J + \frac{1}{2}M_L v'^2 \end{aligned}$$

L'énergie minimale est donc de 3,8053 x 10^{28} J.

b) Cette énergie correspond à

$$\frac{3,8053\times10^{28}\,J}{6,3\times10^{13}\,J} = 6,04\times10^{14}$$

fois la bombe atomique d'Hiroshima. C'est 604 000 milliards de fois la bombe d'Hiroshima. Méchante explosion !

37. Le système étant formé d'un seul objet (la sonde), l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r_T} + \frac{-GM_L m}{r_L}$$

Il y a deux énergies gravitationnelles, car ici on doit tenir compte des énergies gravitationnelles faites par la Terre et par la Lune.

Initialement (sonde au repos à la surface de la Terre), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r_T} + \frac{-GM_L m}{r_L} \\
&= 0J - \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}kg\cdot 100kg}{6,371\times10^6 m} - \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times10^{22}kg\cdot 100kg}{3,78029\times10^8 m} \\
&= -6,2560\times10^9 J - 1,2959\times10^6 J \\
&= -6,2573\times10^9 J
\end{aligned}$$

Quand la sonde est au repos sur la surface de la Lune, son énergie mécanique est

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GM_T m}{r_T'} + \frac{-GM_L m}{r_L'} \\
&= 0J - \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}kg\cdot 100kg}{3,82663\times10^8 m} - \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times10^{22}kg\cdot 100kg}{1,737\times10^6 m} \\
&= -1,0416\times10^8 J - 2,8202\times10^8 J \\
&= -3,8618\times10^8 J
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
E + W_{nc} &= E' \\
-6,2573\times10^9 J + W_{nc} &= -3,8618\times10^8 J \\
W_{nc} &= 5,871\times10^9 J
\end{aligned}$$

38. a) L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned}
E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r} \\
&= \frac{-GM_T m}{2r} \\
&= \frac{-6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}kg\cdot 500kg}{2\cdot 7,371\times10^6 m} \\
&= -1,3518\times10^{10} J
\end{aligned}$$

b) L'énergie gravitationnelle est

$$\begin{aligned} U_g &= \frac{-GM_T m}{r} \\ &= \frac{-6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,972\times 10^{24} kg \cdot 500kg}{7,371\times 10^6 m} \\ &= -2,7036\times 10^{10} J \end{aligned}$$

c) L'énergie cinétique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E_k + U_g \\ -1,3518\times 10^{10} J &= E_k + -2,7036\times 10^{10} J \\ E_k &= 1,3518\times 10^{10} J \end{aligned}$$

<u>*Autre solution possible*</u>

La vitesse du satellite est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,972\times 10^{24} kg}{7,371\times 10^6 m}} \\ &= 7353 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

L'énergie cinétique est donc

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2} 500kg \times \left(7353 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 1,3518\times 10^{10} J \end{aligned}$$

d) Pour qu'il se libère de la Terre, son énergie doit être positive. Au minimum, elle doit donc être nulle. On aura alors

$$\begin{aligned} E + W_{ext} &= E' \\ -1,3518\times 10^{10} J + W_{ext} &= 0J \\ W_{ext} &= 1,3518\times 10^{10} J \end{aligned}$$

(On a supposé que ce travail était fait par une force externe, mais on aurait pu aussi supposer que ce travail provient d'une force non conservatrice.)

39. a) Vérifions si la force respecte les 3 conditions. La première condition est

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial\left(5\tfrac{N}{m^2}\,yz - 2\tfrac{N}{m}\,x + 2\tfrac{N}{m}\,y\right)}{\partial y} = 5\tfrac{N}{m^2}\,z + 2\tfrac{N}{m}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial\left(5\tfrac{N}{m^2}\,xz - 4\tfrac{N}{m}\,y + 2\tfrac{N}{m}\,x\right)}{\partial x} = 5\tfrac{N}{m^2}\,z + 2\tfrac{N}{m}$$

Puisque les dérivées sont égales, la première condition est respectée.

La deuxième condition est

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial\left(5\tfrac{N}{m^2}\,yz - 2\tfrac{N}{m}\,x + 2\tfrac{N}{m}\,y\right)}{\partial z} = 5\tfrac{N}{m^2}\,y$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial\left(5\tfrac{N}{m^2}\,xy + 6\tfrac{N}{m}\,z\right)}{\partial x} = 5\tfrac{N}{m^2}\,y$$

Puisque les dérivées sont égales, la deuxième condition est respectée.

La troisième condition est

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial\left(5\tfrac{N}{m^2}xz - 4\tfrac{N}{m}y + 2\tfrac{N}{m}x\right)}{\partial z} = 5\tfrac{N}{m^2}x$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial\left(5\tfrac{N}{m^2}xy + 6\tfrac{N}{m}z\right)}{\partial y} = 5\tfrac{N}{m^2}x$$

Puisque les dérivées sont égales, la troisième condition est respectée.

Puisque les trois conditions sont respectées, la force est conservatrice.

b) Pour trouver U, on doit faire les intégrales partielles.

L'intégrale partielle par rapport à x va nous donner tous les termes dans lesquelles il y a x seulement, x et y en même temps, x et z en même temps et x, y, et z en même temps.

$$U = -\int F_x dx = \int\left(5\tfrac{N}{m^2}yx - 2\tfrac{N}{m}x + 2\tfrac{N}{m}y\right)dx = 5\tfrac{N}{m^2}xyx - 1\tfrac{N}{m}x^2 + 2\tfrac{N}{m}xy + C_1$$

L'intégrale partielle par rapport à y va nous donner tous les termes dans lesquelles il y a y seulement, x et y en même temps, y et z en même temps et x, y, et z en même temps.

$$U = -\int F_y dy = \int\left(5\tfrac{N}{m^2}yx - 4\tfrac{N}{m}y + 2\tfrac{N}{m}x\right)dx = 5\tfrac{N}{m^2}xyx - 2\tfrac{N}{m}y^2 + 2\tfrac{N}{m}xy + C_2$$

L'intégrale partielle par rapport à z va nous donner tous les termes dans lesquelles il y a z seulement, z et x en même temps, z et y en même temps et x, y, et z en même temps.

$$U = -\int F_z dz = \int\left(5\tfrac{N}{m^2}xy + 6\tfrac{N}{m}z\right)dx = 5\tfrac{N}{m^2}xyx - 3\tfrac{N}{m}z^2 + C_3$$

En combinant ces résultats, on trouve que

$$U = 5\tfrac{N}{m^2}xyx - 1\tfrac{N}{m}x^2 - 2\tfrac{N}{m}y^2 - 3\tfrac{N}{m}z^2 + 2\tfrac{N}{m}xy + Cst$$

Ici, on va choisir une constante nulle.
Au point de départ (1 m, 1 m, 0 m), l'énergie potentielle est

$$\begin{aligned} U &= 5\tfrac{N}{m^2}(1m)\cdot(1m)\cdot(0m) - 1\tfrac{N}{m}(1m)^2 - 2\tfrac{N}{m}(1m)^2 - 3\tfrac{N}{m}(0m)^2 + 2\tfrac{N}{m}(1m)\cdot(1m) \\ &= 0J - 1J - 2J + 0J + 2J \\ &= -1J \end{aligned}$$

Au point d'arrivée (4 m, -2 m, 3 m), l'énergie potentielle est

$$\begin{aligned} U &= 5\tfrac{N}{m^2}(4m)\cdot(-2m)\cdot(3m) - 1\tfrac{N}{m}(4m)^2 - 2\tfrac{N}{m}(-2m)^2 - 3\tfrac{N}{m}(3m)^2 + 2\tfrac{N}{m}(4m)\cdot(-2m) \\ &= -120J - 16J - 8J - 27J - 16J \\ &= -187J \end{aligned}$$

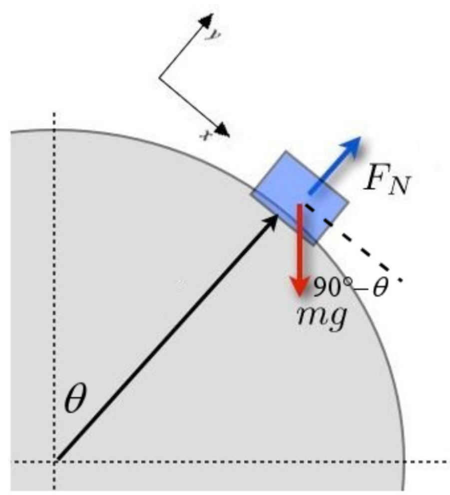
Ainsi, le travail est

$$\begin{aligned} W &= -\Delta U \\ &= -(-187J - -1J) \\ &= 186J \end{aligned}$$

40. a) Quand la personne est en contact avec la sphère, il y a une normale. On doit donc trouver l'angle qu'il y a quand la normale devient nulle.

Il y a deux forces sur la personne :

1) La gravitation
2) La normale



En utilisant les axes montrés sur la figure, les équations des forces sont :

$$\sum F_x = mg\cos -(90° - \theta) = ma_t$$

$$\sum F_x = mg\sin -(90° - \theta) + N = -\frac{mv^2}{R}$$

La deuxième équation nous donne

$$\begin{aligned} mg\sin -(90° - \theta) + N &= -\frac{mv^2}{R} \\ -mg\cos\theta + N &= -\frac{mv^2}{R} \\ N &= mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R} \end{aligned}$$

Au départ (angle petit), le premier terme est plus grand que le deuxième et il y a une normale. À mesure que la personne glisse, l'angle augmente (ce qui fait diminuer le premier terme) et la vitesse augmente (ce qui fait augmenter le deuxième terme). À un certain angle, la normale devient nulle et le contact se perd. Quand la normale est nulle, on a

$$0 = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{r}$$
$$g\cos\theta = \frac{v^2}{r}$$

Pour trouver l'angle, on doit maintenant connaître la vitesse en fonction de l'angle. On va trouver cette vitesse avec la conservation de l'énergie mécanique.

Comme il n'y a qu'un seul objet (la personne qui glisse), la formule de l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

À l'instant 1, (la personne est au sommet du dôme), l'énergie mécanique est

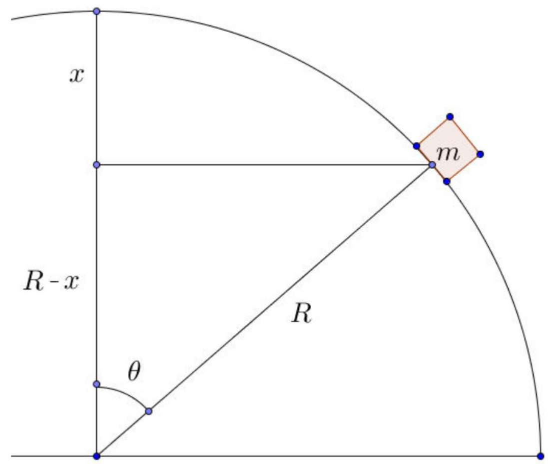
$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(On a mis le $y = 0$ au sommet du dôme.)

À l'instant 2 (la personne est à l'angle θ), l'énergie mécanique est

$$E'_{mec} = \frac{1}{2}mv'^2 + mgy'$$

Il y a un lien entre la hauteur et l'angle. Ce lien se trouve avec la figure suivante.



La hauteur est –*x*. Sur la figure, on a

$$\cos\theta = \frac{R - x}{R}$$

On a donc

$$\begin{aligned} R\cos\theta &= R - x \\ x &= R - R\cos\theta \\ x &= R(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

Ainsi, la hauteur est

$$y' = -R(1-\cos\theta)$$

L'énergie mécanique à l'instant 2 est donc

$$E'_{mec} = \frac{1}{2}mv'^2 - mgR(1-\cos\theta)$$

Avec la conservation de l'énergie mécanique, on obtient

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E'_{mec} \\ 0 &= \frac{1}{2}mv'^2 - mgR(1-\cos\theta) \\ \frac{1}{2}mv'^2 &= mgR(1-\cos\theta) \\ v'^2 &= 2gR(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

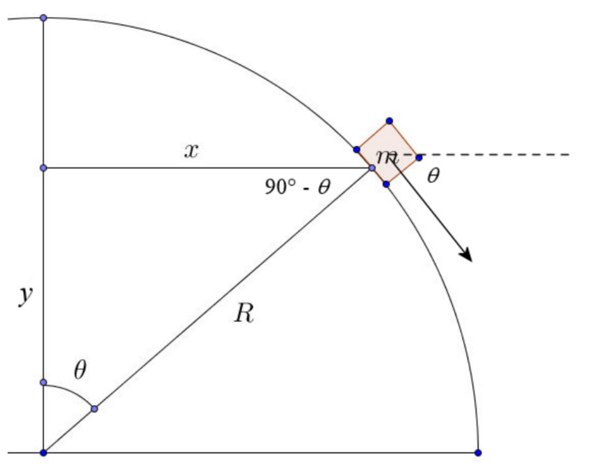
La condition pour avoir une normale nulle devient donc

$$g\cos\theta = \frac{v^2}{R}$$
$$g\cos\theta = \frac{2gR\left(1-\cos\theta\right)}{R}$$

Ce qui donne

$$g\cos\theta = \frac{2gR\left(1-\cos\theta\right)}{R}$$
$$g\cos\theta = 2g\left(1-\cos\theta\right)$$
$$\cos\theta = 2\left(1-\cos\theta\right)$$
$$\cos\theta = 2-2\cos\theta$$
$$3\cos\theta = 2$$
$$\cos\theta = 2/3$$
$$\theta = 48{,}19°$$

b) Au moment où la personne quitte la surface, la direction de la vitesse est tangente au cercle. À partir de là, c'est un projectile qui suit une trajectoire parabolique.



En prenant une origine au centre de l'hémisphère, la position initiale de l'objet est

$$x = R\sin\left(48{,}19°\right) = 6m\sin\left(48{,}19°\right) = 4{,}472m$$
$$y = R\cos\left(48{,}19°\right) = 6m\cos\left(48{,}19°\right) = 4m$$

La vitesse initiale du mouvement de projectile se trouve avec

$$\begin{aligned} v'^2 &= 2gR\left(1-\cos\theta\right) \\ &= 2\cdot 9{,}8\tfrac{m}{s^2}\cdot 6m\left(1-\tfrac{2}{3}\right) \\ &= 39{,}2\tfrac{m^2}{s^3} \\ v' &= 6{,}261\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Les composantes de cette vitesse (avec un axe des *x* vers la droite et un axe des *y* vers le haut) sont

$$\begin{aligned} v_x &= 6{,}261\tfrac{m}{s}\cos\left(-48{,}19°\right) = 4{,}174\tfrac{m}{s} \\ v_y &= 6{,}261\tfrac{m}{s}\sin\left(-48{,}19°\right) = -4{,}667\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Le temps d'arriver au sol est donc

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t - 4{,}9\tfrac{m}{s^2}t^2 \\ 0 &= 4m - 4{,}667\tfrac{m}{s}t - 4{,}9\tfrac{m}{s^2}t^2 \\ t &= 1{,}09025s \end{aligned}$$

La position en *x* à la fin de la période de chute libre est donc

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ &= 4{,}472m + 4{,}174\tfrac{m}{s}\cdot 1{,}09025s \\ &= 9{,}023m \end{aligned}$$

Comme le bord de l'hémisphère est à x = 6 m, la personne frappe le sol à 3,023 m de la sphère.