Solutionnaire du chapitre 5

1. Les forces sur l'objet de 10 kg sont :

1) Une force de gravitation de 98 N vers le bas.
2) Une normale vers le haut.
3) Une force de friction vers la gauche.

L'équation des forces en x est donc :

$$\sum F_x = ma_x$$
$$-F_f = ma_x$$
$$-\mu_c F_N = ma_x$$

On trouve la normale avec l'équation des forces en y.

$$\sum F_y = ma_y$$
$$-mg + F_N = 0$$
$$F_N = mg$$

L'équation des forces en x devient donc

$$-\mu_c F_N = ma_x$$
$$-\mu_c mg = ma_x$$
$$-\mu_c g = a_x$$

Pour trouver μ_c, il faut connaitre l'accélération. Comme le bloc s'arrête en 4 secondes, l'accélération est

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$
$$0\tfrac{m}{s} = 10\tfrac{m}{s} + a_x \cdot 4s$$
$$a_x = -2,5\tfrac{m}{s^2}$$

On a donc

$$-\mu_c g = a_x$$
$$-\mu_c g = -2,5\tfrac{m}{s^2}$$
$$\mu_c = 0,2551$$

2. Trouvons premièrement l'accélération.

Les forces sur Guy sont, en travaillant avec un axe des x vers le bas de la pente :

1) La force de gravitation de mg vers le bas (à -60°).
2) Une normale F_N perpendiculaire à la pente.
3) Une friction $F_f = \mu_c F_N$ s'opposant au mouvement, donc vers le haut de la pente.

On a donc

Forces	x	y
Poids	$mg \cos(-60°)$	$mg \sin(-60°)$
Normale	0	F_N
Friction	$-\mu_c F_N$	0

Les équations des forces sont donc

$$\sum F_x = mg\cos\left(-60°\right) - \mu_c F_N = ma_x$$
$$\sum F_y = mg\sin\left(-60°\right) + F_N = 0$$

L'équation des forces en y nous donne la normale.

$$mg\sin\left(-60°\right) + F_N = 0$$
$$F_N = -mg\sin\left(-60°\right)$$
$$F_N = mg\sin\left(60°\right)$$

On utilise ensuite cette réponse dans l'équation des forces en x pour obtenir

$$mg\cos\left(-60°\right) - \mu_c mg\sin\left(60°\right) = ma_x$$
$$g\cos\left(-60°\right) - \mu_c g\sin\left(60°\right) = a_x$$
$$9{,}8\tfrac{N}{kg}\cos\left(-60°\right) - 0{,}1\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\sin\left(60°\right) = a_x$$
$$a_x = 4.051\tfrac{m}{s^2}$$

a) Pour atteindre la vitesse de 50 m/s, on aura

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$
$$50\tfrac{m}{s} = 10\tfrac{m}{s} + 4{,}051\tfrac{m}{s^2}\cdot t$$
$$t = 9{,}873s$$

b) La distance parcourue en 5 secondes sera

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} + \tfrac{1}{2} a_x t^2 \\ &= 0m + 10\tfrac{m}{s} \cdot 5s + \tfrac{1}{2} \cdot 4,051\tfrac{m}{s^2} \cdot (5s)^2 \\ &= 100,6m \end{aligned}$$

3. Commençons avec la situation sur le plat pour trouver le coefficient de friction.

Les forces sur Manon sont :

1) Une force de gravitation de *mg* vers le bas.
2) Une normale vers le haut.
3) Une force de friction vers la gauche.

L'équation des forces en *x* est donc

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ -F_f &= ma_x \\ -\mu_c F_N &= ma_x \end{aligned}$$

On trouve la normale avec l'équation des forces en *y*.

$$\begin{aligned} \sum F_y &= ma_y \\ -mg + F_N &= 0 \\ F_N &= mg \end{aligned}$$

L'équation des forces en *x* devient donc

$$\begin{aligned} -\mu_c F_N &= ma_x \\ -\mu_c mg &= ma_x \\ -\mu_c g &= a_x \end{aligned}$$

Pour trouver μ_c, il faut connaitre l'accélération. Comme Manon s'arrête sur une distance de 10 m, l'accélération est

$$\begin{aligned} 2a_x (x - x_0) &= v_x^2 - v_{0x}^2 \\ 2a_x (40m - 0m) &= \left(0\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(10\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ a_x &= -1,25\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

On a donc

$$-\mu_c g = a_x$$
$$-\mu_c g = -1,25 \tfrac{m}{s^2}$$
$$\mu_c = 0,12755$$

Examinons maintenant la situation sur la pente.

Les forces sur Manon sont, en travaillant avec un axe des x vers le haut de la pente :

1) La force de gravitation de mg vers le bas (à -120°).
2) Une normale F_N perpendiculaire à la pente.
3) Une friction $F_f = \mu_c F_N$ s'opposant au mouvement, donc vers le bas de la pente.

On a donc

Forces	***x***	***y***
Poids	mg cos (-120°)	mg sin (-120°)
Normale	0	F_N
Friction	$-\mu_c F_N$	0

Les équations des forces sont donc

$$\sum F_x = mg\cos(-120°) - \mu_c F_N = ma_x$$
$$\sum F_y = mg\sin(-120°) + F_N = 0$$

L'équation des forces en y nous donne la normale.

$$mg\sin(-120°) + F_N = 0$$
$$F_N = -mg\sin(-120°)$$
$$F_N = mg\sin(120°)$$

On utilise ensuite cette réponse dans l'équation des forces en x pour obtenir

$$mg\cos(-120°) - \mu_c mg\sin(120°) = ma_x$$
$$g\cos(120°) - \mu_c g\sin(120°) = a_x$$
$$9,8 \tfrac{N}{kg}\cos(120°) - 0,12755 \cdot 9,8 \tfrac{N}{kg}\sin(120°) = a_x$$
$$a_x = -5,9825 \tfrac{m}{s^2}$$

La distance d'arrêt est donc

$$2a_x(x-x_0)=v_x^2-v_{0x}^2$$
$$2\cdot -5{,}9825\tfrac{m}{s^2}\cdot(x-0m)=\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(10\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$x=8{,}358m$$

4. Les forces sur la boite sur la surface plane (m_1 = 24 kg) sont (avec un axe de x vers la droite) :

1) Une force de gravitation de 235,2 N vers le bas.
2) La normale vers le haut (F_{N1}).
3) La tension de la corde vers la droite.
4) La force de friction $F_{f1} = \mu_c F_{N1}$ vers la droite.

Les équations des forces sont

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\to T+\mu_c F_{N1} = m_1 a$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\to -235{,}2N + F_{N1} = 0$$

L'équation des forces en y nous permet facilement de trouver que F_N = 235,2 N. Il nous reste donc l'équation suivante en x.

$$T+\mu_c F_{N1} = m_1 a$$
$$T+0{,}4\cdot 235{,}2N = m_1 a$$
$$T+94{,}08N = m_1 a$$

Les forces sur la boite sur la surface inclinée (m_2 = 18 kg) sont (avec un axe de x vers le bas de la pente) :

1) Une force de gravitation de 176,4 N vers le bas, donc à -30°.
2) La normale (F_{N2}) perpendiculaire à la surface, donc vers les y positifs.
3) La tension de la corde vers le haut de la pente.
4) La force de friction $F_{f2} = \mu_c F_{N2}$ vers le bas de la pente.

On a donc

Forces	***x***	***y***
Poids	176,4 N cos (-30°)	176,4 N sin (-30°)
Normale	0	F_{N2}
Friction	$\mu_c F_{N2}$	0
Tension	$-T$	0

Les équations des forces sont alors

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\rightarrow 176,4N\cos(-30°) + \mu_c F_{N2} - T = m_2 a$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow 176,4N\sin(-30°) + F_{N2} = 0$$

L'équation des forces en y nous permet de trouver la normale.

$$176,4N\sin(-30°) + F_{N2} = 0$$
$$F_{N2} = -176,4N\sin(-30°)$$
$$F_{N2} = 88,2N$$

L'équation des forces en x devient alors

$$176,4N\cos(30°) + \mu_c F_{N2} - T = m_2 a$$
$$176,4N\cos(30°) + 0,4\cdot 88,2N - T = m_2 a$$
$$188,047N - T = m_2 a$$

Nos deux équations des forces en x sont donc

$$T + 94,08N = m_1 a$$
$$188,047N - T = m_2 a$$

On peut résoudre en additionnant ces équations.

$$(T + 94,08N) + (188,047N - T) = m_1 a + m_2 a$$
$$94,08N + 188,047N = (m_1 + m_2)a$$
$$282,127N = 42kg\cdot a$$
$$a = 6,7173\tfrac{m}{s^2}$$

On peut alors trouver la tension.

$$T + 94,08N = m_1 a$$
$$T + 94,08N = 24kg \times 6,7173\tfrac{m}{s^2}$$
$$T = 67,135N$$

5. Puisque les coefficients de friction sont différents pour chaque boite, il serait difficile de trouver l'accélération du système en le considérant comme un seul objet. On va donc trouver les forces sur chacune des boites.

Les forces sur la boite de m_1 = 12 kg sont (on utilise un axe des x vers la droite) :

1) Une force de gravitation de 117,6 N vers le bas.
2) La normale (F_{N1}) vers le haut.
3) Une force de friction (F_{f1}) vers la droite.
4) La force de 30 N à 37°.
5) La tension de la corde (T_1) reliant les boites de 12 kg et 8 kg, vers la gauche.

Les équations des forces sont alors

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\to 30N\cos(37°) + \mu_{c1}F_{N1} - T_1 = m_1 a$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\to -117,6N + F_{N1} + 30N\sin(37°) = 0$$

L'équation des forces en y nous permet de trouver la normale.

$$-117,6N + F_{N1} + 30N\sin(37°) = 0$$
$$F_{N1} = 117,6N - 30N\sin(37°)$$
$$F_{N1} = 99,55N$$

Notre équation des forces en x devient alors

$$30N\cos(37°) + \mu_{c1}F_{N1} - T_1 = m_1 a$$
$$30N\cos(37°) + 0,5\times 99,55N - T_1 = m_1 a$$
$$73,732N - T_1 = m_1 a$$

Les forces sur la boite de m_2 = 8 kg sont (on utilise un axe des x vers la droite) :

1) Une force de gravitation de 78,4 N vers le bas.
2) La normale (F_{N2}) vers le haut.
3) Une force de friction (F_{f2}) vers la droite.
4) La tension de la corde (T_1) reliant les boites de 12 kg et 8 kg, vers la droite.
5) La tension de la corde (T_2) reliant les boites de 8 kg et 5 kg, vers la gauche.

Les équations des forces sont alors

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\rightarrow \mu_{c2} F_{N2} + T_1 - T_2 = m_2 a$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow -78,4N + F_{N2} = 0$$

L'équation des forces en y nous permet de trouver F_{N2} = 78,4 N. Notre équation des forces en x devient alors

$$\mu_{c2} F_{N2} + T_1 - T_2 = m_2 a$$
$$0,4 \times 78,4N + T_1 - T_2 = m_2 a$$
$$31,36N + T_1 - T_2 = m_2 a$$

Les forces sur la boite de m_3 = 5 kg sont (on utilise un axe des x vers la droite) :

1) Une force de gravitation de 49 N vers le bas.
2) La normale (F_{N3}) vers le haut.
3) Une force de friction (F_{f3}) vers la droite.
4) La tension de la corde (T_2) reliant les boites de 8 kg et 5 kg, vers la droite.

Les équations des forces sont alors

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\rightarrow \mu_{c3} F_{N3} + T_2 = m_3 a$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow -49N + F_{N3} = 0$$

L'équation des forces en y nous permet de trouver F_{N3} = 49 N. Notre équation des forces en x devient alors

$$\mu_{c3} F_{N3} + T_2 = m_3 a$$
$$0,3 \times 49N + T_2 = m_3 a$$
$$14,7N + T_2 = m_3 a$$

Nos trois équations des forces en x sont donc

$$73,732N - T_1 = m_1 a$$
$$31,36N + T_1 - T_2 = m_2 a$$
$$14,7N + T_2 = m_3 a$$

On peut résoudre en additionnant ces trois équations.

$$(73,732N - T_1) + (31,36N + T_1 - T_2) + (14,7N + T_2) = m_1 a + m_2 a + m_3 a$$
$$73,732N + 31,36N + 14,7N = (m_1 + m_2 + m_3) a$$
$$119,792N = 25kg \times a$$
$$a = 4,792 \tfrac{m}{s^2}$$

De là, on peut trouver les tensions. On trouve T_1 avec l'équation des forces en x de la boite de 12 kg.

$$73,732N - T_1 = m_1 a$$
$$T_1 = 16,232N$$

On trouve T_2 avec la somme des forces sur la boite de 5 kg.

$$14,7N + T_2 = m_3 a$$
$$14,7N + T_2 = 5kg \times 4,792 \tfrac{m}{s^2}$$
$$T_2 = 9,258N$$

6. Les forces sur le bloc de glace de 100 kg sont (on utilise un axe des x vers la droite) :

1) Une force de gravitation de 980 N vers le bas.
2) La normale (F_N) vers le haut.
3) Une force de friction ($F_f = \mu_c F_N$) vers la gauche.
4) La tension de la corde T à 25°.

Les équations des forces sont alors

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\rightarrow -\mu_c F_N + F\cos(25°) = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow -980N + F_N + F\sin(25°) = 0$$

L'équation des forces en y nous permet de trouver la normale.

$$F_N = 980N - F\sin(25°)$$

On utilise ensuite cette normale dans l'équation des forces en *x* pour obtenir

$$-\mu_c F_N + F\cos(25°) = 0$$
$$-\mu_c \left(980N - F\sin(25°)\right) + F\cos(25°) = 0$$
$$-\mu_c \cdot 980N + \mu_c F\sin(25°) + F\cos(25°) = 0$$
$$F\left(\mu_c \sin(25°) + \cos(25°)\right) = \mu_c \cdot 980N$$
$$F\left(0{,}1 \cdot \sin(25°) + \cos(25°)\right) = 0{,}1 \cdot 980N$$
$$F = 103{,}31N$$

7. Les forces sur la luge sont (on utilise un axe vers le haut de la pente) :

1) Une force de gravitation de 78,4 N vers le bas (-100°).
2) Une normale vers les *y* positifs.
3) Une force de friction $F_f = \mu_c F_N$ vers le bas de la pente (*x* négatif).
4) La tension de la corde à 20°.

On a donc

Forces	***x***	***y***
Poids	78,4 N cos (-100°)	78,4 N sin (-100°)
Normale	0	F_N
Friction	$-\mu_c F_N$	0
Tension	*T* cos20°	*T* sin20°

Avec une accélération nulle, les équations des forces sont

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\to 78{,}4N\cos(-100°) - \mu_c F_N + T\cos(20°) = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\to 78{,}4N\sin(-100°) + F_N + T\sin(20°) = 0$$

Nous avons deux équations et deux inconnues. Pour résoudre ce système, on va isoler la normale dans l'équation des forces en *y*.

$$F_N = -78{,}4N\sin(-100°) - T\sin(20°)$$
$$F_N = 78{,}4N\sin(100°) - T\sin(20°)$$

En remplacer dans l'équation des forces en *x*.

$$78,4N\cos(100°) - \mu_c F_N + T\cos(20°) = 0$$
$$78,4N\cos(100°) - \mu_c\left(78,4N\sin(100°) - T\sin(20°)\right) + T\cos(20°) = 0$$
$$78,4N\cos(100°) - \mu_c 78,4N\sin(100°) + \mu_c T\sin(20°) + T\cos(20°) = 0$$
$$78,4N\cos(100°) - \mu_c 78,4N\sin(100°) = -\mu_c T\sin(20°) - T\cos(20°)$$
$$78,4N\cos(100°) - \mu_c 78,4N\sin(100°) = T\left(-\mu_c\sin(20°) - \cos(20°)\right)$$
$$T = \frac{78,4N\cos(100°) - \mu_c 78,4N\sin(100°)}{-\mu_c\sin(20°) - \cos(20°)}$$
$$T = \frac{-13,614N - 9,265N}{-0,0410 - 0,9397}$$
$$T = 23,33N$$

8. Les forces sur la boite de 50 kg sont (on utilise un axe vers la droite) :

1) Une force de gravitation de 490 N vers le bas.
2) Une normale vers les *y* positifs.
3) Une force de friction $F_f = \mu_c F_N$ vers la gauche(*x* négatif).
4) La force de 300 N de la corde à l'angle θ.

On a donc

Forces	*x*	*y*
Poids	0	$-mg$
Normale	0	F_N
Friction	$-\mu_c F_N$	0
Tension	$T\cos\theta$	$T\sin\theta$

Les équations des forces sont donc

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\to -\mu_c F_N + T\cos\theta = ma$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\to -mg + F_N + T\sin\theta = 0$$

Avec la deuxième équation, on trouve la normale.

$$F_N = mg - T\sin\theta$$

On peut alors utiliser cette valeur dans l'équation des forces en *x*.

$$-\mu_c\left(mg - T\sin\theta\right) + T\cos\theta = ma$$
$$a = \frac{-\mu_c\left(mg - T\sin\theta\right) + T\cos\theta}{m}$$
$$a = -\mu_c g + \frac{T}{m}\mu_c\sin\theta + \frac{T}{m}\cos\theta$$

On a l'accélération maximale quand $da/d\theta = 0$. Ainsi,

$$\frac{da}{d\theta} = 0 + \frac{T}{m}\mu_c\cos\theta - \frac{T}{m}\sin\theta = 0$$

Ce qui donne

$$\frac{T}{m}\mu_c\cos\theta - \frac{T}{m}\sin\theta = 0$$
$$\mu_c\cos\theta - \sin\theta = 0$$
$$\mu_c\cos\theta = \sin\theta$$
$$\mu_c = \tan\theta$$

L'angle pour avoir la plus grande accélération est donc

$$\theta = \arctan 0,7$$
$$= 35°$$

9. Examinons premièrement la situation où la boite reste au repos pour trouver quelle force de friction il faudrait avoir pour que l'objet reste au repos. Les forces sur la boite sont :

1) Une force de gravitation de 980 N vers le bas.
2) Une normale vers le haut.
3) La tension de la corde de 600 N vers la droite.
4) La force de friction vers la gauche.

Si la boite est au repos, les équations des forces sont

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\rightarrow 600N - F_f = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow -980N + F_N = 0$$

L'équation des forces en x nous indique donc que la force de friction doit être de

$$600N - F_f = 0$$
$$F_f = 600N$$

On doit avoir une force de 600 N pour que la boite reste au repos.

La valeur maximale de la force de friction est

$$\begin{aligned} F_{f\max} &= \mu_s F_N \\ &= 0,6 \times 980N \\ &= 588N \end{aligned}$$

Avec une force de friction maximale de 588 N, on ne peut pas avoir les 600 N de friction pour que l'objet reste au repos. La caisse va donc se déplacer.

10. Les forces sur la boite sont (avec un axe des x vers la droite) :

1) Une force de gravitation de mg vers le bas.
2) Une force normale vers le haut.
3) Une force de friction horizontale.

Les équations des forces sont

$$\begin{aligned} &\sum F_x = ma_x \\ &\qquad \to F_f = ma \\ &\sum F_y = ma_y \\ &\qquad \to -mg + F_N = 0 \end{aligned}$$

La première équation nous dit que la force de friction et l'accélération ont le même signe. Avec une accélération positive, la force de friction doit être positive, donc vers la droite.

Aussi, l'équation nous dit que c'est la force de friction vers la droite qui fait accélérer la boite vers la droite pour qu'elle suive le camion.
En utilisant $F_f = ma$ dans

$$F_f \le \mu_s F_N$$

on arrive a

$$\begin{aligned} ma &\leq \mu_s F_N \\ ma &\leq \mu_s mg \\ a &\leq \mu_s g \\ a &\leq 0,65 \times 9,8 \tfrac{N}{kg} \\ a &\leq 6,37 \tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

L'accélération maximale de la boite est donc de 6,37 m/s². Si le camion a une accélération plus grande que cela, la boite ne pourra pas suivre le camion et elle va glisser.

11. Examinons premièrement la situation où la boite reste au repos pour trouver quelle force de friction il faudrait avoir pour que l'objet reste au repos. Les forces sur la boite sont (on va utiliser un axe des *x* vers le bas de la pente) :

1) Une force de gravitation de *mg* vers le bas, donc à -65°.
2) Une normale perpendiculaire à la pente, vers les *y* positifs.
3) Une force de friction vers le haut de la pente.

Si la boite est au repos, les équations des forces sont

$$\begin{aligned} &\sum F_x = ma_x \\ &\qquad \rightarrow mg\cos(-55°) - F_f = 0 \\ &\sum F_y = ma_y \\ &\qquad \rightarrow mg\sin(-55°) + F_N = 0 \end{aligned}$$

L'équation des forces en *x* nous indique donc que la force de friction doit être de

$$\begin{aligned} mg\cos(-55°) - F_f &= 0 \\ F_f &= mg\cos(-55°) \\ F_f &= mg\cos(55°) \end{aligned}$$

La valeur maximale de la force de friction est

$$\begin{aligned} F_{f\max} &= \mu_s F_N \\ &= 0,8 \times mg\sin(55°) \end{aligned}$$

(La normale vient de l'équation des forces en *y*.)

Difficile de dire si F_f nécessaire pour garder l'objet au repos est plus grande que F_{fmax}. Pour le savoir, on va faire le rapport de ces forces.

$$\frac{F_{f\max}}{F_f} = \frac{\mu_s mg \sin(55°)}{mg\cos(55°)}$$

$$\frac{F_{f\max}}{F_f} = \frac{\mu_s \sin(55°)}{\cos(55°)}$$

$$\frac{F_{f\max}}{F_f} = \mu_s \tan(55°)$$

$$\frac{F_{f\max}}{F_f} = 0,8 \times \tan(55°)$$

$$\frac{F_{f\max}}{F_f} = 1,1425$$

Cela veut dire que la force de friction maximale est 1,1425 fois plus grande que la force nécessaire pour garder l'objet au repos. Comme elle est plus grande que la friction nécessaire pour garder l'objet au repos, l'objet reste au repos.

12. Les forces sur la boite A de 5 kg sont :

1) Une force de gravitation de 49 N vers le bas.
2) Une normale F_{N1} vers le haut.
3) La tension T_1 de la corde vers la gauche.
4) Une force de friction F_{f1} vers la droite faite par la boite du bas.

Les équations des forces sont donc

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\rightarrow -T + F_{f1} = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow -49N + F_{N1} = 0$$

Cette dernière équation nous donne F_{N1} = 49N.

Examinons maintenant les forces sur la boite B de 10 kg. On va supposer que cette boite est au repos, ce qui nous permettra de déduire la condition pour qu'elle soit au repos. Les forces sont :

1) Le poids de 98 N vers le bas.

2) La normale F_{N1} faite par la boite du haut vers le bas.
3) La normale F_{N2} vers le haut faite par le sol.
4) La force de friction F_{f1} vers la gauche faite par la boite du haut.
5) La force de friction F_{f2} vers la gauche faite par le sol.
6) La force F vers la droite.

Avec une accélération nulle, les équations des forces sont

$$\begin{aligned}&\sum F_x = ma_x \\ &\qquad \to -F_{f1} - F_{f2} + F = 0 \\ &\sum F_y = ma_y \\ &\qquad \to -98N - F_{N1} + F_{N2} = 0\end{aligned}$$

Puisque F_{N1} = 49 N, cette dernière équation nous donne F_{N2} = 147 N

Avec l'équation des forces en x du bloc B, on trouve

$$F = F_{f1} + F_{f2}$$

Comme

$$F_{f1} \le \mu_{s1} F_{N1} \qquad\qquad F_{f2} \le \mu_{s2} F_{N2}$$

on a

$$\begin{aligned}F = F_{f1} + F_{f2} &\le \mu_{s1} F_{N1} + \mu_{s1} F_{N1} \\ F &\le \mu_{s1} F_{N1} + \mu_{s1} F_{N1} \\ F &\le 0{,}8 \times 49N + 0{,}6 \times 147N \\ F &\le 127{,}4N\end{aligned}$$

Ceci est la condition pour que la boite B ne bouge pas. Si on veut que la boite bouge, on doit donc tirer avec une force supérieure à 127,4 N.

13. Les forces sur Donald sont :

1) Une force de gravitation de 490 N vers le bas.
2) Une normale F_{N1} vers la gauche faite par le mur de droite.
3) Une normale F_{N2} vers la droite faite par le mur de gauche.

4) Une force de friction F_{f1} vers le haut faite par le mur de droite.
5) Une force de friction F_{f2} vers le haut faite par le mur de gauche.

Si Donald est en équilibre dans cette position, son accélération est nulle.

Avec une accélération nulle, les équations des forces sont

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\to -F_{N1} + F_{N2} = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\to -490N + F_{f1} + F_{f2} = 0$$

Avec l'équation des forces en y, on trouve

$$-490N + F_{f1} + F_{f2} = 0$$
$$F_{f1} + F_{f2} = 490N$$

Comme

$$F_{f1} \leq \mu_{s1} F_{N1} \qquad F_{f2} \leq \mu_{s2} F_{N2}$$

on a

$$490N = F_{f1} + F_{f2} \leq \mu_s F_{N1} + \mu_s F_{N2}$$
$$490N \leq \mu_s F_{N1} + \mu_s F_{N2}$$
$$490N \leq \mu_s F_{N1} + \mu_s F_{N1}$$

(car selon l'équation des forces en x, les deux normales sont égales.)

$$490N \leq \mu_s \left(F_{N1} + F_{N1} \right)$$
$$490N \leq 2\mu_s F_{N1}$$
$$F_{N1} \geq \frac{490N}{2\mu_s}$$
$$F_{N1} \geq \frac{490N}{2 \times 1,4}$$
$$F_{N1} \geq 175N$$

Donald doit donc pousser sur les murs pour que les normales soient au moins de 175 N.

14. Les forces sur la boite sont (avec un axe des x vers la droite) :

1) Une force de gravitation de 980 N vers le bas.
2) Une normale F_N vers le haut.
3) Une force de friction vers la gauche.
4) La force appliquée par Boris (à -30°).

On a donc

Forces	***x***	***y***
Poids	0	-980 N
Normale	0	F_N
Friction	$-F_f$	0
Boris	$F\cos(-30°)$	$F\sin(-30°)$

On va supposer que la caisse est immobile, ce qui va nous donner la condition pour que la caisse reste immobile. Il suffira de briser cette condition pour que la caisse se déplace.

Avec une accélération nulle, les équations des forces sont donc

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\to -F_f + F\cos(30°) = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\to -980N + F_N + F\sin(-30°) = 0$$

Avec l'équation des forces en x, on a

$$-F_f + F\cos(30°) = 0$$
$$F_f = F\cos(30°)$$

En utilisant $F_f = F\cos(30°)$ dans

$$F_f \le \mu_s F_N$$

on arrive a

$$F\cos(30°) \le \mu_s F_N$$

On utilise ensuite la valeur de la normale obtenue à partir de l'équation des forces en *y*.

$$-980N + F_N + F\sin(-30°) = 0$$
$$F_N = 980N - F\sin(-30°)$$
$$F_N = 980N + F\sin(30°)$$

On obtient alors

$$F\cos(30°) \le \mu_s F_N$$
$$F\cos(30°) \le \mu_s\left(980N + F\sin(30°)\right)$$
$$F\cos(30°) \le \mu_s 980N + \mu_s F\sin(30°)$$
$$F\cos(30°) - \mu_s F\sin(30°) \le \mu_s 980N$$
$$F\left(\cos(30°) - \mu_s\sin(30°)\right) \le \mu_s 980N$$
$$F\left(\cos(30°) - 0,5\times\sin(30°)\right) \le 0,5\times 980N$$
$$F(0,616) \le 490N$$
$$F \le 795,4N$$

L'objet reste au repos si la force appliquée est inférieure à 795,4 N. On doit donc forcer avec une force supérieure à 795,4 N pour que l'objet bouge.

15. Les forces sur le bloc sont :

1) Une force de gravitation de 9,8 N vers le bas.
2) Une normale F_N vers la gauche.
3) Une friction F_f vers le haut ou vers le bas.
4) La force appliquée F de 30 N, à 30°.

On ne sait pas la direction de la force de friction parce qu'on ne sait pas si la composante verticale de la force *F* est plus grande ou plus petite que le poids du bloc. Si cette composante est plus petite que le poids, il devra y avoir de la friction vers le haut pour aider à soutenir le bloc. Si cette composante est plus grande que le poids, il faudra de la friction vers le bas pour empêcher le bloc de glisser vers le haut du mur. On va donc dire que la friction F_f est vers le haut et on trouvera ensuite sa valeur. Si on obtient une réponse positive, c'est qu'elle est dans la direction supposée, donc vers le haut. Si on obtient une réponse négative, c'est qu'elle est dans la direction opposée à la direction supposée, donc vers le bas.

Si l'objet reste en place, l'accélération est nulle et on a les équations suivantes.

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\rightarrow -F_N + 30N\cos(30°) = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow -9,8N + F_f + 30N\sin(30°) = 0$$

a) L'équation des forces en *y* nous donne

$$-9,8N + F_f + 30N\sin(30°) = 0$$
$$F_f = 9,8N - 30N\sin(30°)$$
$$F_f = -5,2N$$

Comme la réponse est négative, on a une force de friction de 5,2 N vers le bas.

b) On trouve le coefficient minimum avec l'équation

$$F_f \leq \mu_s F_N$$

On trouve la normale avec l'équation des forces en *y*.

$$-F_N + 30N\cos(30°) = 0$$
$$F_N = 30N\cos(30°)$$
$$F_N = 25,98N$$

On a donc

$$5,2N \leq \mu_s 25,98N$$
$$\mu_s \geq 0,2001$$

Le coefficient doit donc être supérieur à 0,2001.

16. Pour savoir la force de friction, il faut savoir si on a affaire à de la friction cinétique ou de la friction statique. Examinons donc premièrement si la pierre va rester au repos. Les forces sur pierre sont

1) Une force de gravitation de 980 N vers le bas.
2) Une normale F_N vers le haut.
3) La tension de la corde vers la droite.
4) Une force de friction vers la gauche.

Si la pierre reste immobile, les équations des forces sont

$$\begin{aligned}
&\sum F_x = ma_x \\
&\qquad \to T - F_f = 0 \\
&\sum F_y = ma_y \\
&\qquad \to -980N + F_N = 0
\end{aligned}$$

La force de friction est donc égale à la tension de la corde. On trouve cette tension en examinant les forces sur Thierry. Les forces sur Thierry sont :

1) Une force de gravitation de 686 N vers le bas.
2) La tension de la corde vers le haut.

L'équation des forces en *y* est donc

$$-686N + T = 0$$

La tension est donc de 686 N, ce qui veut dire que la force de friction sur la pierre doit être de 686 N pour qu'elle reste en place. Peut-on avoir une force de friction aussi grande ? La valeur maximale de la friction est

$$F_{f\max} = \mu_s F_N$$

L'équation des forces en *y* sur la pierre nous indiquait que la normale est de 980 N. La force de friction maximale est donc de

$$\begin{aligned}
F_{f\max} &= 0,5 \times 980N \\
&= 490N
\end{aligned}$$

Comme il faut 686 N pour garder la pierre au repos et que la friction statique ne peut atteindre au maximum que 490 N, la pierre va glisser.

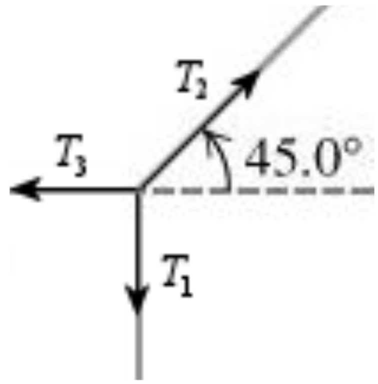
Si la pierre glisse, on a de la friction cinétique, dont la grandeur est

$$\begin{aligned}
F_f &= \mu_c F_N \\
&= 0,45N \times 980N \\
&= 441N
\end{aligned}$$

La force de friction est donc de 441 N vers la gauche.

17. On va supposer que le système est au repos. Cela va nous permettre de trouver la condition nécessaire pour que ce système soit au repos.

On va commencer par trouver les forces sur le nœud où les trois cordes se rencontrent.



Évidemment, la tension T_1 est égale au poids du bloc de 20 kg, donc T_1 = 196 N.

On a donc

Forces	***x***	***y***
Tension 1	0	-196 N
Tension 2	T_2 cos 45°	T_2 sin 45°
Tension 3	-T_3	0

Les équations des forces sont

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\rightarrow T_2 \cos(45°) - T_3 = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow -196N + T_2 s\,\text{in}(45°) = 0$$

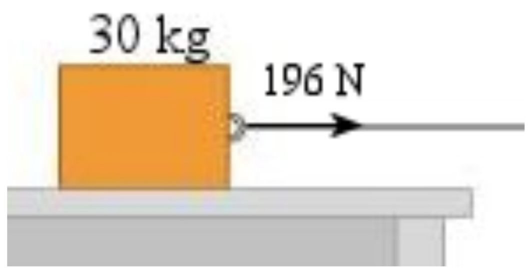
Avec l'équation des forces en *y*, nous trouvons T_2.

$$-196N + T_2 s\,\text{in}(45°) = 0$$
$$T_2 = 277,2N$$

Puis nous trouvons T_3 avec l'équation des forces en *x*.

$$T_2 \cos(45°) - T_3 = 0$$
$$277,2N \cos(45°) - T_3 = 0$$
$$T_3 = 196N$$

On a maintenant la situation suivante.



Les forces sur le bloc sont :

1) Une force de gravitation de 294 N vers le bas.
2) La normale F_N vers le haut.
3) La tension T de 196 N vers les x positifs.
4) La force de friction F_f vers les x négatifs.

On a donc

Forces	*x*	*y*
Poids	0	-294 N
Normale	0	F_N
Tension	196 N	0
Friction	$-F_f$	0

Les équations des forces sont

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\to 196N - F_f = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\to -294N + F_N = 0$$

L'équation des forces en x nous permet alors de trouver la force de friction sur le bloc.

$$196N - F_f = 0$$
$$F_f = 196N$$

On doit donc avoir

$$\begin{aligned} F_f &\leq \mu_s F_N \\ 196N &\leq \mu_s \times 294N \end{aligned}$$

(La valeur de la normale vient de l'équation des forces en *y* sur le bloc de 30 kg.)

On a donc

$$\begin{aligned} 196N &\leq \mu_s \times 294N \\ \tfrac{2}{3} &\leq \mu_s \end{aligned}$$

18. La force est

$$\begin{aligned} F_d &= \frac{1}{2} C_x A \rho v^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 0,47 \times \pi \left(0,11m\right)^2 \times 1,3 \tfrac{kg}{m^3} \times \left(20 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 4,645N \end{aligned}$$

19. La force est

$$\begin{aligned} F_d &= \frac{1}{2} \left(C_x A\right) \rho v^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 0,682m^2 \times 1,3 \tfrac{kg}{m^3} \times \left(33,33 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 492,6N \end{aligned}$$

20. La vitesse limite est

$$\begin{aligned} v_L &= \sqrt{\frac{2mg}{C_x A \rho}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 0,44kg \times 9,8 \frac{N}{kg}}{0,47 \times \pi \left(0,11m\right)^2 \times 1,3 \frac{kg}{m^3}}} \\ &= 19,27 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

21. La vitesse limite est

$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{C_x A\rho}}$$

Si le volume est de 0,01 m³, alors l'arrête du cube a une longueur de

$$L^3 = 0{,}01m^3$$
$$L = 0{,}21544m$$

La masse du cube est

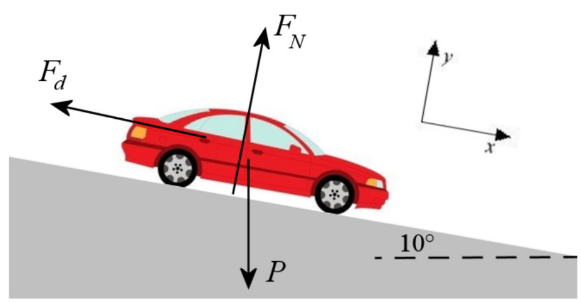
$$\begin{aligned} m &= \rho\times(volume) \\ &= 7320\tfrac{kg}{m^3}\times 0{,}01m^3 \\ &= 73{,}2kg \end{aligned}$$

La valeur de C_x étant de 1,05, la vitesse limite est

$$\begin{aligned} v_L &= \sqrt{\frac{2mg}{C_x A\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{2\times 73{,}2kg\times 9{,}8\frac{N}{kg}}{1{,}05\times(0{,}21544m)^2\times 1{,}3\frac{kg}{m^3}}} \\ &= 150{,}5\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

22. Les forces sur la Honda Civic sont (on utilise un axe vers le bas de la pente) :

1) Une force de gravitation de *mg* vers le bas (-80°).
2) Une normale vers les *y* positifs.
3) Une force de friction F_d vers le haut de la pente (*x* négatif).



On a donc

Forces	*x*	*y*
Poids	*mg* cos (-80°)	*mg* sin (-80°)
Normale	0	F_N
Friction	$-F_d$	0

À la vitesse limite, l'accélération est nulle. Les équations des forces sont alors

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\to mg\cos(-80°) - F_d = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\to mg\sin(-80°) + F_N = 0$$

La première équation nous donne

$$mg\cos(-80°) - F_d = 0$$
$$mg\cos(80°) - \frac{1}{2}C_x A\rho v_L^2 = 0$$
$$v_L = \sqrt{\frac{2mg\cos(80°)}{C_x A\rho}}$$

Pour une Honda Civic 2001, C_xA = 0,682 m². Avec une masse de 1142 kg, la vitesse limite est

$$v_L = \sqrt{\frac{2\cdot 1142kg\cdot 9,8\frac{N}{kg}\cdot\cos(80°)}{0,682m^2\cdot 1,3\frac{kg}{m^3}}}$$
$$= 66,21\tfrac{m}{s}$$
$$= 238,4\tfrac{km}{h}$$

23. Avec une vitesse limite de 30 m/s, on trouve que

$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{C_x A\rho}}$$
$$30\tfrac{m}{s} = \sqrt{\frac{2\times 100kg\times 9,8\frac{N}{kg}}{CA_x\times 1,3\frac{kg}{m^3}}}$$
$$CA_x = 1,675m^2$$

La force de friction à la moitié de la vitesse limite est donc

$$F_d = \frac{1}{2}(C_x A)\rho v^2$$
$$= \frac{1}{2}\times 1,675m^2\times 1,3\tfrac{kg}{m^3}\times\left(15\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$= 245N$$

24. Les forces sur le chariot de 2 kg sont (avec un axe des *x* vers le haut) :

1) Une force de gravitation de 19,6 N vers le bas.
2) Une normale vers le haut.
3) La force faite par le ressort vers la droite.

Les équations des forces en *x* est donc

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\to F_R = m \cdot a_x$$

La force du ressort est donc

$$F_R = 2kg \times 4\tfrac{m}{s^2}$$
$$F_R = 8N$$

L'étirement du ressort est donc

$$F_R = kx$$
$$8N = 200\tfrac{N}{m} \cdot x$$
$$x = 0,04m = 4cm$$

25. a) On va supposer que la boite est au repos. Cela nous permettra de connaitre la condition pour qu'elle soit au repos. Les forces sur la boite de 100 kg sont (avec un axe des *x* vers la droite) :

1) Une force de gravitation de 980 N vers le bas.
2) Une normale vers le haut.
3) La force du ressort F_R vers la droite.
4) La force de friction F_f vers la gauche.

Les équations des forces sont

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\to F_R - F_f = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\to -980N + F_N = 0$$

En utilisant $F_f = F_R$ dans

$$F_f \leq \mu_s F_N$$

on arrive a

$$\begin{aligned} F_R &\leq \mu_s F_N \\ F_R &\leq 0,5 \times 980N \\ F_R &\leq 490N \end{aligned}$$

(La normale vient de l'équation des forces en *y*.)

Cela donne

$$\begin{aligned} F_R &\leq 490N \\ kx &\leq 490N \\ x &\leq \frac{490N}{k} \\ x &\leq \frac{490N}{1000\frac{N}{m}} \\ x &\leq 0,49m \end{aligned}$$

Ainsi, le bloc reste en place si l'étirement du ressort est inférieur à 49 cm. Il faut donc que l'étirement du ressort soit supérieur à 49 cm pour que le bloc se déplace.

b) Les forces sur la boite de 100 kg sont (avec un axe des *x* vers la droite) :

1) Une force de gravitation de 980 N vers le bas.
2) Une normale vers le haut.
3) La force du ressort F_R vers la droite.
4) La force de friction $F_f = \mu_c F_N$ vers la gauche.

À vitesse constante, l'accélération est nulle. Les équations des forces sont donc

$$\begin{aligned} &\sum F_x = ma_x \\ &\qquad \rightarrow F_R - \mu_c F_N = 0 \\ &\sum F_y = ma_y \\ &\qquad \rightarrow -980N + F_N = 0 \end{aligned}$$

On a donc

$$F_R = \mu_c F_N$$
$$F_R = 0,4 \times 980N$$
$$F_R = 392N$$

(La normale vient de l'équation des forces en *y*.)

Cela donne

$$F_R = 392N$$
$$kx = 392N$$
$$x = \frac{392N}{k}$$
$$x = \frac{392N}{1000\frac{N}{m}}$$
$$x = 0,392m$$

Le ressort est donc étiré de 39,2 cm.

26. Les forces sur le bloc de 5 kg sont (avec un axe des *x* vers le bas de la pente) :

1) Une force de gravitation de 49 N vers le bas.
2) La normale F_N vers le haut.
3) La force du ressort $F_R = kx$ vers la gauche.
4) La force de friction $F_f = \mu_c F_N$ vers la gauche.

Les équations des forces sont

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\rightarrow -F_R - \mu_c F_N = 0$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow -49N + F_N = 0$$

L'équation des forces en *x* nous donne

$$-kx - \mu_c F_N = ma$$
$$-5000\tfrac{N}{m} \times 0,1m - 0,6 \times 49N = 5kg \times a$$
$$a = -105,88\tfrac{m}{s^2}$$

(La normale vient de l'équation des forces en *y*.)

27. Les forces sur le bloc de 5 kg sont :

1) Une force de gravitation de 49 N vers le bas.
2) La tension T vers le haut.
3) La force du ressort F_R, vers le haut ou vers le bas.

Comme on ne sait pas la direction de la force du ressort (parce qu'on ne sait pas si le ressort est étiré ou comprimé), on va faire comme si la force était positive, donc vers le haut. En faisant la solution, on découvrira le signe de la force faite par le ressort. S'il est positif, notre direction était correcte et s'il est négatif, la force est dans la direction opposée à celle supposée, donc vers le bas.

L'équation des forces en y est donc

$$\sum F_y = ma_y$$
$$-49N + T + F_R = 0$$

Puisque la corde supporte aussi un bloc de 2 kg en équilibre, la tension de la corde est de 19,6 N. On a donc

$$-49N + 19,6N + F_R = 0$$
$$F_R = 29,4N$$

La valeur positive nous indique que le ressort fait une force vers le haut, et donc que le ressort est comprimé. La compression est

$$F_R = 29,4N$$
$$kx = 29,4N$$
$$x = \frac{29,4N}{k}$$
$$x = \frac{29,4N}{250\frac{N}{m}}$$
$$x = 0,1176m$$

Le ressort est donc comprimé de 11,76 cm.

28. Les forces sur la masse de 100 g sont

1) Une force de gravitation de 0,98 N vers le bas.
2) La force du ressort vers le haut.

L'équation des forces en y est donc

$$\sum F_y = ma_x$$
$$-0,98N + F_R = 0$$

Le ressort fait donc une force de 0,98 N. On a donc

$$kx = 0,98N$$
$$k \times 0,04m = 0,98N$$
$$k = 24,5\tfrac{N}{m}$$

Avec la masse de 400 g, on a maintenant les forces suivantes :

1) Une force de gravitation de 3,92 N vers le bas.
2) La force du ressort vers le haut.

L'équation des forces en y est donc

$$\sum F_y = ma_x$$
$$-3,92N + F_R = 0$$

Le ressort fait donc une force de 3,92 N. On a donc

$$kx = 3,92N$$
$$24,5\tfrac{N}{m} \cdot x = 3,92N$$
$$x = 0,16m$$

Le ressort est donc étiré de 16 cm.

29. Les forces sur un des côtés carrés sont

$$\begin{aligned} F_P &= PA \\ &= 300\,000Pa \times (0,2m)^2 \\ &= 12000N \end{aligned}$$

30. Les forces sur le couvercle sont :

1) Une force de pression $F_P = PA$ vers le bas.
2) La force du ressort $F_R = kx$ vers le haut.

L'équation des forces en y est donc

$$\sum F_y = ma_y$$
$$-PA + kx = 0$$

On a donc

$$-PA + kx = 0$$
$$-102\,000Pa \times \pi \left(0{,}1m\right)^2 + 10\,000\tfrac{N}{m} \cdot x = 0$$
$$x = 0{,}3204m$$

La compression du ressort est donc de 32,04 cm.

31. Les forces sur le bloc de cèdre sont :

1) La force de gravitation de 1,96 N vers le bas.
2) La poussée d'Archimède F_A vers le haut.
3) La tension T vers le bas.

L'équation des forces en y est donc

$$\sum F_y = ma_y$$
$$-1{,}96N + F_A - T = 0$$

Pour trouver la poussée d'Archimède, on doit trouver le volume du bloc. On trouve ce volume avec la masse volumique.

$$m = \rho \times (volume)$$
$$0{,}2kg = 490\tfrac{kg}{m^3} \times (volume)$$
$$volume = 0{,}0004082m^3$$

La poussée d'Archimède est donc

$$\begin{aligned} F_A &= \rho g V_f \\ &= 1000\tfrac{kg}{m^3} \times 9,8\tfrac{N}{kg} \times 0,0004081m^3 \\ &= 4N \end{aligned}$$

Notre équation des forces en y donne donc

$$-1,96N + 4N - T = 0$$
$$T = 2,04N$$

32. Dans l'air, les forces sur le bloc d'aluminium sont :

1) La force de gravitation de mg vers le bas.
2) La force du ressort $F_R = kx$ vers le haut.

L'équation des forces en y est donc

$$\sum F_y = ma_y$$
$$-mg + kx = 0$$

On peut donc trouver la masse du bloc

$$-mg + kx = 0$$
$$-m \times 9,8\tfrac{N}{kg} + 200\tfrac{N}{m} \times 0,1m = 0$$
$$m = 2,0408kg$$

Examinons maintenant le cas où le bloc est dans l'eau. Les forces sur le bloc d'aluminium sont :

1) La force de gravitation de mg = 20 N vers le bas.
2) La force du ressort $F_R = kx$ vers le haut.
3) La poussée d'Archimède F_A vers le haut.

L'équation des forces en y est donc

$$\sum F_y = ma_y$$
$$-20N + kx + F_A = 0$$

Pour trouver la poussée d'Archimède, on doit trouver le volume du bloc. On trouve ce volume avec la densité.

$$m = \rho \times (volume)$$
$$2,0408kg = 2700\tfrac{kg}{m^3} \times (volume)$$
$$volume = 0,0007559m^3$$

La poussée d'Archimède est donc

$$\begin{aligned} F_A &= \rho g V_f \\ &= 1000\tfrac{kg}{m^3} \times 9,8\tfrac{N}{kg} \times 0,0007559m^3 \\ &= 7,4074N \end{aligned}$$

Notre équation des forces en y donne donc

$$-20N + kx + 7,4074N = 0$$
$$kx = 12,5926N$$

L'étirement du ressort est donc

$$kx = 12,5926N$$
$$200\tfrac{N}{m} \cdot x = 12,5926N$$
$$x = 0,062963m$$

L'étirement du ressort est donc de 6,2963 cm.

33. Les forces sur l'objet sont :

1) La force de gravitation de mg vers le bas.
2) La poussée d'Archimède de fluide plus dense (fluide 1) vers le haut.
3) La poussée d'Archimède de fluide moins dense (fluide 2) vers le haut.

L'équation des forces en y est donc

$$\sum F_y = ma_y$$
$$-mg + \rho_1 g V_{f1} + \rho_2 g V_{f2} = 0$$

La masse de l'objet est

$$\begin{aligned} m &= \rho_{objet} \cdot Volume \\ &= \rho_{objet} \cdot Ah \end{aligned}$$

où A est l'aire de la base de l'objet.

Les volumes immergés sont

$$V_{f1} = A \cdot \tfrac{3}{4} h$$
$$V_{f2} = A \cdot \tfrac{1}{4} h$$

En utilisant ces formules, l'équation des forces devient donc

$$-mg + \rho_1 g V_{f1} + \rho_2 g V_{f2} = 0$$
$$-\rho_{objet} \cdot Ahg + \rho_1 g A \tfrac{3}{4} h + \rho_2 g A \tfrac{1}{4} h = 0$$
$$-\rho_{objet} + \rho_1 \tfrac{3}{4} + \rho_2 \tfrac{1}{4} = 0$$
$$\rho_{objet} = \tfrac{3}{4}\rho_1 + \tfrac{3}{4}\rho_2$$
$$\rho_{objet} = \tfrac{3}{4} 1000 \tfrac{kg}{m^3} + \tfrac{1}{4} 800 \tfrac{kg}{m^3}$$
$$\rho_{objet} = 950 \tfrac{kg}{m^3}$$

34. Avant que Sylvain embarque, les forces sur la chaloupe sont :

1) La force de gravitation de mg vers le bas.
2) La poussée d'Archimède de fluide vers le haut.

L'équation des forces en y est donc

$$\sum F_y = ma_y$$
$$-mg + \rho g V_f = 0$$

Ce qui donne

$$mg = \rho g V_f$$

Après que Sylvain ait embarqué, on a les forces suivantes sur la chaloupe :

1) La force de gravitation de mg vers le bas.
2) La poussée d'Archimède de fluide vers le haut qui a augmenté puisque le volume immergée a augmenté de ΔV.
3) La normale faite par Sylvain, égale à son poids $m_S g$, vers le bas

L'équation des forces en y est donc

$$\sum F_y = ma_y$$
$$-mg + \rho g\left(V_f + \Delta V\right) - m_s g = 0$$

Mais comme

$$mg = \rho g V_f$$

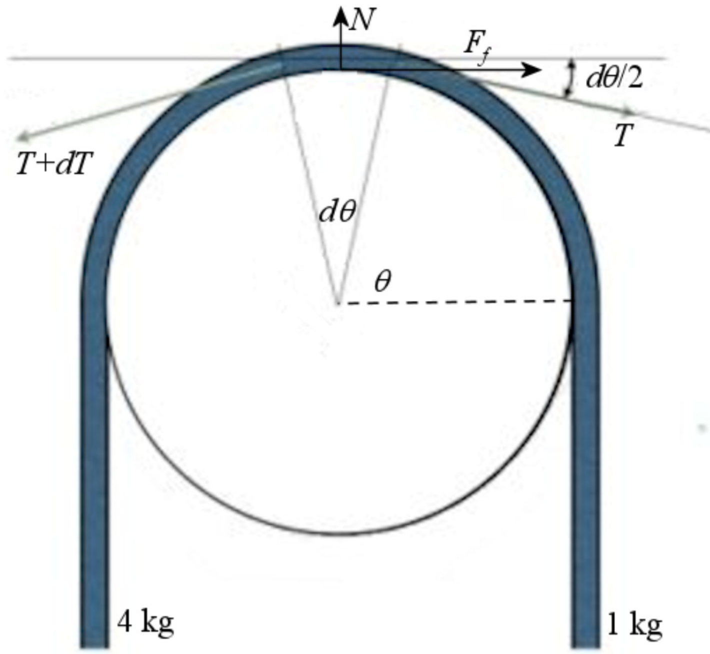
l'équation devient

$$-mg + \rho g\left(V_f + \Delta V\right) - m_s g = 0$$
$$-\rho g V_f + \rho g\left(V_f + \Delta V\right) - m_s g = 0$$
$$\rho g \Delta V - m_s g = 0$$
$$m_s = \rho \Delta V$$

L'augmentation de volume étant 4 m² x 0,05 m = 0,2 m³, on arrive à

$$\begin{aligned} m_s &= \rho \Delta V \\ &= 1000 \tfrac{kg}{m^3} \cdot 0,2 m^3 \\ &= 200 kg \end{aligned}$$

35. On sait que la tension est de 39,2 N d'un côté de la corde et de 9,8 N de l'autre côté de la corde. Pour voir comment la friction change la tension de la corde, on va considérer un petit bout de corde.



wiki.imga.org.il/index.php?title=%3FHow_do_friction_devices_work

La somme des forces sur le petit morceau de corde est (on néglige la masse de la corde)

$$\sum F_x = T\cos\left(\tfrac{d\theta}{2}\right) - \left(T + dT\right)\cos\left(\tfrac{d\theta}{2}\right) + F_f = 0$$
$$\sum F_y = -T\sin\left(\tfrac{d\theta}{2}\right) - \left(T + dT\right)\sin\left(\tfrac{d\theta}{2}\right) + N = 0$$

Puisque l'angle est petit, on peut utiliser cos x = 1 et sin x = x. On a alors

$$\sum F_x = T - \left(T + dT\right) + F_f = 0$$
$$\sum F_y = -T\frac{d\theta}{2} - \left(T + dT\right)\frac{d\theta}{2} + N = 0$$

La deuxième équation donne

$$-T\frac{d\theta}{2} - \left(T + dT\right)\frac{d\theta}{2} + N = 0$$
$$N = T\frac{d\theta}{2} + \left(T + dT\right)\frac{d\theta}{2}$$
$$N = T\frac{d\theta}{2} + T\frac{d\theta}{2} + dT\frac{d\theta}{2}$$

Le troisième terme étant très petit, on peut le négliger pour arriver à

$$\begin{aligned} N &= T\frac{d\theta}{2} + T\frac{d\theta}{2} \\ &= Td\theta \end{aligned}$$

Puisque la friction est à son maximum, l'équation des forces en x est

$$\begin{aligned} \sum F_x = T - (T + dT) + \mu N &= 0 \\ dT &= \mu N \end{aligned}$$

Avec la valeur de la normale, on arrive à

$$dT = \mu T d\theta$$

La solution de cette équation est

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &= \mu d\theta \\ \int \frac{dT}{T} &= \int \mu d\theta \\ \ln T &= \mu\theta + cst \end{aligned}$$

À $\theta = 0$, la tension est de 9,8 N. On a donc

$$\begin{aligned} \ln 9{,}8N &= 0 + cst \\ cst &= \ln 9{,}8N \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \ln T &= \mu\theta + \ln 9{,}8N \\ \ln T - \ln 9{,}8N &= \mu\theta \\ \ln \tfrac{T}{9{,}8\mathrm{N}} &= \mu\theta \\ \frac{T}{9{,}8N} &= e^{\mu\theta} \\ T &= 9{,}8Ne^{\mu\theta} \end{aligned}$$

On sait qu'à 180°, la tension est de 39,2 N. Ainsi

$$39{,}2N = 9{,}8Ne^{\mu\pi}$$

(On doit travailler en radians puisqu'on a utilisé l'approximation des petits angles, qui n'est vraie que pour des angles en radians.)

Il ne reste qu'à isoler μ.

$$4 = e^{\mu\pi}$$
$$\ln 4 = \mu\pi$$
$$\mu = \frac{\ln 4}{\pi}$$
$$\mu = 0,4413$$

36. La seule force sur la balle est la force de friction. Avec un axe des x dans la direction de la vitesse, l'équation des forces en x est donc

$$\sum F_x = ma$$
$$-F_d = ma$$
$$-\frac{1}{2}C\rho Av^2 = ma$$

Pour trouver la vitesse de la balle en fonction du temps, on utilise

$$a = \frac{dv}{dt}$$

On a donc

$$-\frac{1}{2}C\rho Av^2 = m\frac{dv}{dt}$$

On peut alors résoudre cette équation pour obtenir

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{C\rho Av^2}{2m}$$
$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{C\rho A}{2m}dt$$
$$\int \frac{dv}{v^2} = -\int \frac{C\rho A}{2m}dt$$
$$-\frac{1}{v} = -\frac{C\rho At}{2m} + Cst$$

Puisqu'à $t = 0$ la vitesse est v_0, on peut trouver la valeur de la constante.

$$-\frac{1}{v_0} = 0 + Cst$$
$$Cst = -\frac{1}{v_0}$$

La formule de la vitesse en fonction du temps est donc

$$-\frac{1}{v} = -\frac{C\rho At}{2m} - \frac{1}{v_0}$$

En isolant v, on obtient

$$\frac{1}{v} = \frac{C\rho At}{2m} + \frac{1}{v_0}$$
$$\frac{1}{v} = \frac{C\rho Atv_0}{2mv_0} + \frac{2m}{2mv_0}$$
$$\frac{1}{v} = \frac{C\rho Atv_0 + 2m}{2mv_0}$$
$$v = \frac{2mv_0}{C\rho Atv_0 + 2m}$$

On ne peut pas encore calculer la vitesse parce qu'on ne sait pas combien de temps il faudra pour que la balle atteigne sa cible. Pour le savoir, il fait aussi avoir la formule de la position en fonction de temps. On trouve cette position en se rappelant que

$$x = \int v dt$$

On a donc

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{2mv_0}{C\rho Atv_0 + 2m} dt \\ &= \frac{2m}{C\rho A} \int \frac{1}{\left(t + \frac{2m}{C\rho Atv_0} \right)} dt \\ &= \frac{2m}{C\rho A} \ln \left(t + \frac{2m}{C\rho Atv_0} \right) + Cst \end{aligned}$$

Puisqu'à $t = 0$ la position est 0, on peut trouver la valeur de la constante.

$$0=\frac{2m}{C\rho A}\ln\left(0+\frac{2m}{C\rho Atv_0}\right)+Cst$$
$$Cst=-\frac{2m}{C\rho A}\ln\left(\frac{2m}{C\rho Atv_0}\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
x&=\frac{2m}{C\rho A}\ln\left(t+\frac{2m}{C\rho Atv_0}\right)-\frac{2m}{C\rho A}\ln\left(\frac{2m}{C\rho Atv_0}\right)\\
&=\frac{2m}{C\rho A}\left(\ln\left(t+\frac{2m}{C\rho Atv_0}\right)-\ln\left(\frac{2m}{C\rho Atv_0}\right)\right)\\
&=\frac{2m}{C\rho A}\ln\left(\frac{t+\frac{2m}{C\rho Atv_0}}{\frac{2m}{C\rho Atv_0}}\right)\\
&=\frac{2m}{C\rho A}\ln\left(\frac{C\rho Atv_0t+2m}{2m}\right)\\
&=\frac{2m}{C\rho A}\ln\left(\frac{C\rho Av_0}{2m}t+1\right)
\end{aligned}$$

On peut maintenant trouver le temps nécessaire pour atteindre la cible. Pour votre balle de baseball, on a

$$\begin{aligned}
\frac{2m}{C\rho A}&=\frac{2\cdot 0,145kg}{0,47\cdot 1,3\frac{kg}{m^3}\cdot\pi\left(0,037m\right)^2}\\
&=110,36m
\end{aligned}$$

La position est donc

$$x=110,36m\cdot\ln\left(\frac{30\frac{m}{s}}{110,36m\cdot}\cdot t+1\right)$$
$$x=110,36m\cdot\ln\left(0,27184\tfrac{1}{s}\cdot t+1\right)$$

Le temps pour arriver à x = 100 m est donc

$$\begin{aligned}
100m &= 110,36m \cdot \ln\left(0,27184\tfrac{1}{s} \cdot t + 1\right) \\
0,90614 &= \ln\left(0,27184\tfrac{1}{s} \cdot t + 1\right) \\
e^{0,90614} &= 0,27184\tfrac{1}{s} \cdot t + 1 \\
2,4748 &= 0,27184\tfrac{1}{s} \cdot t + 1 \\
1,4748 &= 0,27184\tfrac{1}{s} \cdot t \\
t &= 5,425s
\end{aligned}$$

La vitesse est alors

$$\begin{aligned}
v &= \frac{2mv_0}{C\rho A t v_0 + 2m} \\
&= \frac{v_0}{\frac{C\rho A v_0}{2m} t + 1} \\
&= \frac{30\frac{m}{s}}{\frac{30\frac{m}{s}}{110,36m} 5,425s + 1} \\
&= 12,12\tfrac{m}{s}
\end{aligned}$$

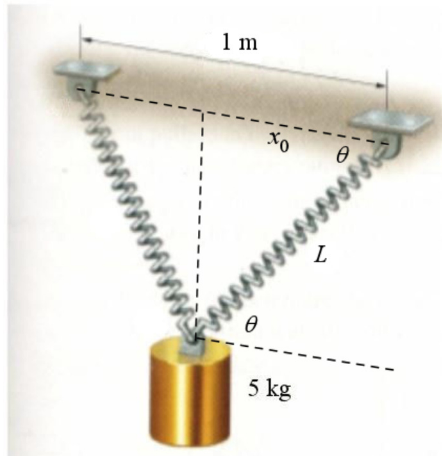
37. Les sommes des forces sur la masse sont

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= -F_R \cos\theta + F_R \cos\theta = 0 \\
\sum F_y &= F_R \sin\theta + F_R \sin\theta - mg = 0
\end{aligned}$$

La deuxième équation nous amène assez vite à

$$F_R = \frac{mg}{2\sin\theta}$$

La force faite par le ressort et l'angle dépendent tous les deux de l'étirement du ressort.



La longueur du ressort est *L*. La force faite par le ressort est donc

$$F_R = k\left(L - x_0\right)$$

où x_0 est la longueur du ressort au repos (50 cm).

Le sinus de l'angle est

$$\sin\theta = \frac{y}{L} = \frac{\sqrt{L^2 - x_0^2}}{L}$$

On a donc

$$F_R = \frac{mg}{2\sin\theta}$$

$$k\left(L - x_0\right) = \frac{mgL}{2\sqrt{L^2 - x_0^2}}$$

Il ne reste qu'à isoler *L* dans cette équation.

$$\left(L-x_0\right)\sqrt{L^2-x_0^2}=\frac{mgL}{2k}$$

$$\left(L-x_0\right)^2\left(L^2-x_0^2\right)=\left(\frac{mg}{2k}\right)^2L^2$$

$$\left(L-x_0\right)^2\left(L-x_0\right)\left(L+x_0\right)=\left(\frac{mg}{2k}\right)^2L^2$$

$$\left(L-x_0\right)^3\left(L+x_0\right)=\left(\frac{mg}{2k}\right)^2L^2$$

$$\left(L^3-3x_0L^2+3x_0^2L-x_0^3\right)\left(L+x_0\right)=\left(\frac{mg}{2k}\right)^2L^2$$

$$L^4-3x_0L^3+3x_0^2L^2-x_0^3L+x_0L^3-3x_0^2L^2+3x_0^3L-x_0^4=\left(\frac{mg}{2k}\right)^2L^2$$

$$L^4-2x_0L^3+2x_0^3L-x_0^4=\left(\frac{mg}{2k}\right)^2L^2$$

$$L^4-2x_0L^3-\left(\frac{mg}{2k}\right)^2L^2+2x_0^3L-x_0^4=0$$

Ceci est une équation de degré 4 ! Avec les chiffres, elle est

$$L^4-(1m)L^3-\left(\frac{1}{16}m^2\right)L^2+\left(\frac{1}{4}m^3\right)L-\left(\frac{1}{16}m^4\right)=0$$

$$16L^4-(16m)L^3-\left(1m^2\right)L^2+\left(4m^3\right)L-\left(1m^4\right)=0$$

La seule solution positive de cette équation est

$$L=0{,}81623\text{ m}$$