Solutionnaire du chapitre 2

1. a) La vitesse moyenne en x est

$$\begin{aligned}\bar{v}_x &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{8m - 0m}{2s} \\ &= 4\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

La vitesse moyenne en y est

$$\begin{aligned}\bar{v}_y &= \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{6m - 0m}{2s} \\ &= 3\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

La vitesse moyenne est donc

$$\vec{\bar{v}} = \left(4\vec{i} + 3\vec{j}\right)\tfrac{m}{s}$$

b) Pour trouver l'accélération moyenne, on va séparer la vitesse en composantes

À $t = 0$ s les composantes de la vitesse sont

$$\begin{aligned}v_x &= v\cos\theta = 15\tfrac{m}{s}\cos 30° = 12,99\tfrac{m}{s} \\ v_y &= v\sin\theta = 15\tfrac{m}{s}\sin 30° = 7,5\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

À $t = 2$ s les composantes de la vitesse sont

$$\begin{aligned}v_x &= v\cos\theta = 20\tfrac{m}{s}\cos 120° = -10\tfrac{m}{s} \\ v_y &= v\sin\theta = 20\tfrac{m}{s}\sin 120° = 17,32\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

L'accélération moyenne en x est

$$\begin{aligned}\overline{a}_x &= \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\\ &= \frac{-10\frac{m}{s} - 12{,}99\frac{m}{s}}{2s}\\ &= -11{,}495\tfrac{m}{s^2}\end{aligned}$$

L'accélération moyenne en *y* est

$$\begin{aligned}\overline{a}_y &= \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\\ &= \frac{17{,}32\frac{m}{s} - 7{,}5\frac{m}{s}}{2s}\\ &= 4{,}91\tfrac{m}{s^2}\end{aligned}$$

L'accélération moyenne est donc

$$\vec{\overline{a}} = \left(-11{,}495\vec{i} + 4{,}91\vec{j}\right)\tfrac{m}{s^2}$$

2. a) Les coordonnées des positions 1 et 2 sont (en mettant le Soleil à (0,0))

Position 1	x = 1,5 x 10^{11} m	y = 0 m
Position 2	x = 0 m	y = 1,5 x 10^{11} m

Les déplacements en *x* et *y* sont

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0m - 1{,}5\times10^{11}m = -1{,}5\times10^{11}m$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 = 1{,}5\times10^{11}m - 0m = 1{,}5\times10^{11}m$$

Le déplacement est donc

$$\overrightarrow{\Delta s} = \left(-1{,}5\times10^{11}\vec{i} + 1{,}5\times10^{11}\vec{j}\right)m$$

b) La distance parcourue est la longueur de l'arc de cercle entre les points 1 et 2, qui est le quart de la circonférence

$$\text{distance} = \frac{1}{4}2\pi r = \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi\cdot1{,}5\times10^{11}m}{2} = 2{,}3562\times10^{11}m$$

c) Les composantes de la vitesse moyenne sont

$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0m - 1{,}5\times10^{11}m}{7{,}8894\times10^{6}s} = -19013\tfrac{m}{s}$$
$$\overline{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1{,}5\times10^{11}m - 0m}{7{,}8894\times10^{6}s} = 19013\tfrac{m}{s}$$

La vitesse moyenne est donc

$$\vec{\overline{v}} = \left(-19013\vec{i} + 19013\vec{j}\right)\tfrac{m}{s}$$

d) Les composantes de l'accélération moyenne sont

$$\overline{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-30000\tfrac{m}{s} - 0\tfrac{m}{s}}{7{,}8894\times10^{6}s} = -0{,}0038\tfrac{m}{s^2}$$
$$\overline{a}_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{0\tfrac{m}{s} - 30000\tfrac{m}{s}}{7{,}8894\times10^{6}s} = -0{,}0038\tfrac{m}{s^2}$$

L'accélération moyenne est donc

$$\vec{\overline{a}} = \left(-0{,}0038\vec{i} - 0{,}0038\vec{j}\right)\tfrac{m}{s^2}$$

3. a) On trouve les composantes de la vitesse en dérivant les formules de la position.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(-3\tfrac{m}{s^2}t^2 + 2\tfrac{m}{s}t - 4m\right)}{dt} = -6\tfrac{m}{s^2}t + 2\tfrac{m}{s}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(-2\tfrac{m}{s^3}t^3 + 6\tfrac{m}{s^2}t^2 + 1m\right)}{dt} = -6\tfrac{m}{s^3}t^2 + 12\tfrac{m}{s^2}t$$

À t = 1 s, ces composantes sont

$$v_x = -6\tfrac{m}{s^2}(1s) + 2\tfrac{m}{s} = -4\tfrac{m}{s}$$
$$v_y = -6\tfrac{m}{s^3}(1s)^2 + 12\tfrac{m}{s^2}(1s) = 6\tfrac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 7{,}21\tfrac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{6}{-4} = 123,7°$$

b) On trouve les composantes de l'accélération en dérivant les formules de la vitesse.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\left(-6\frac{m}{s^2}t + 2\frac{m}{s}\right)}{dt} = -6\frac{m}{s^2}$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d\left(-6\frac{m}{s^3}t^2 + 12\frac{m}{s^2}t\right)}{dt} = -12\frac{m}{s^3}t + 12\frac{m}{s^2}$$

À t = 1 s, ces composantes sont

$$a_x = -6\frac{m}{s^2}$$
$$a_y = -12\frac{m}{s^3}(1s) + 12\frac{m}{s^2} = 0\frac{m}{s^2}$$

La grandeur de l'accélération est donc

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 6\frac{m}{s^2}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan \frac{a_y}{a_x} = \arctan \frac{0}{-6} = 180°$$

4. On trouve la position avec

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 2m + 2\frac{m}{s}\times 5s + \frac{1}{2}1\frac{m}{s^2}\times(5s)^2 = 24,5m$$
$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = -2m + 4\frac{m}{s}\times 5s + \frac{1}{2}\left(-2\frac{m}{s^2}\right)\times(5s)^2 = -7m$$
$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 = 2m + -1\frac{m}{s}\times 5s + \frac{1}{2}\left(0\frac{m}{s^2}\right)\times(5s)^2 = -3m$$

L'objet est donc à la position (24,5 m, -7 m, -3 m) (on pourrait dire aussi $\vec{r} = \left(24,5\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}\right)m$).

5. On trouve l'accélération en x avec

$$2a_x\left(x-x_0\right)=v_x^2-v_{x0}^2$$
$$2a_x\left(2m-1m\right)=\left(5\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(-2\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$a_x=10{,}5\tfrac{m}{s^2}$$

On trouve l'accélération en y avec

$$2a_y\left(y-y_0\right)=v_y^2-v_{y0}^2$$
$$2a_y\left(1m--1m\right)=\left(6\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$a_y=9\tfrac{m}{s^2}$$

On trouve l'accélération en z avec

$$2a_z\left(z-z_0\right)=v_x^2-v_{x0}^2$$
$$2a_z\left(-4m--2m\right)=\left(-7\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(1\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$a_z=-12\tfrac{m}{s^2}$$

L'accélération est donc

$$\vec{a}=\left(10{,}5\vec{i}+9\vec{j}-12\vec{k}\right)\tfrac{m}{s^2}$$

6. a) Les composantes de la vitesse initiale sont

$$v_{0x}=50\tfrac{m}{s}\cos 32°=42{,}4\tfrac{m}{s}$$
$$v_{0y}=50\tfrac{m}{s}\sin 32°=26{,}5\tfrac{m}{s}$$

On trouve le temps de vol avec

$$y=y_0+v_{0y}t-\tfrac{1}{2}gt^2$$
$$0m=0m+26{,}5\tfrac{m}{s}t-4{,}9\tfrac{m}{s^2}t^2$$
$$26{,}5\tfrac{m}{s}t=4{,}9\tfrac{m}{s^2}t^2$$
$$26{,}5\tfrac{m}{s}=4{,}9\tfrac{m}{s^2}t$$
$$t=5{,}407s$$

b) On trouve la hauteur maximale en utilisant le fait que la vitesse en y est nulle au point le plus haut.

$$-2g\left(y-y_0\right)=v_y^2-v_{0y}^2$$
$$-19,6\tfrac{m}{s^2}\left(y-0m\right)=\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(26,5\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$y=35,82m$$

c) La portée est

$$\begin{aligned}x&=x_0+vt\\&=0m+42,4\tfrac{m}{s}\cdot 5,407s\\&=229,3m\end{aligned}$$

7. a) Les composantes de la vitesse initiale sont

$$v_{0x}=45\tfrac{m}{s}\cos 60°=22,5\tfrac{m}{s}$$
$$v_{0y}=45\tfrac{m}{s}\sin 60°=39,0\tfrac{m}{s}$$

On trouve la hauteur maximale en utilisant le fait que la vitesse en y est nulle au point le plus haut.

$$-2g\left(y-y_0\right)=v_y^2-v_{0y}^2$$
$$-19,6\tfrac{m}{s^2}\left(y-0m\right)=\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(39,0\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$y=77,49m$$

b) On trouve le temps de vol avec

$$y=y_0+v_{0y}t-\tfrac{1}{2}gt^2$$
$$-265m=0m+39,0\tfrac{m}{s}t-4,9\tfrac{m}{s^2}t^2$$
$$265m+39\tfrac{m}{s}t-4,9\tfrac{m}{s^2}t^2=0$$
$$t=12,34s \quad \text{et} \quad t=-4,38s$$

Seule la réponse positive est bonne.

c) La portée est

$$\begin{aligned}x&=x_0+vt\\&=0m+22,5\tfrac{m}{s}\cdot 12,34s\\&=277,6m\end{aligned}$$

d) La vitesse en x reste toujours la même.

$$v_x = v_{0x} = 22,5\,\tfrac{m}{s}$$

À l'arrivée au sol, la vitesse en y est

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ &= 39,0\tfrac{m}{s} - 9,8\tfrac{m}{s^2} \cdot 12,34s \\ &= -81,9\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 85,0\tfrac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{-81,9}{22,5} = -74,6°$$

8. On trouve la vitesse avec

$$\begin{aligned} y &= (\tan\theta)\,x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\right)x^2 \\ 1,05m &= (\tan 40°) \cdot 10m - \left(\frac{9,8\tfrac{m}{s^2}}{2v_0^2 \cos^2 40°}\right)(10m)^2 \\ v_0 &= 10,67\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

9. Avec la hauteur maximale, on peut trouver la vitesse initiale en y.

$$\begin{aligned} -2g\left(y - y_0\right) &= v_y^2 - v_{0y}^2 \\ -19,6\tfrac{m}{s^2}(0,42m - 0m) &= \left(0\tfrac{m}{s}\right)^2 - v_{0y}^2 \\ v_{0y} &= 2,87\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Avec la portée, on peut trouver la vitesse initiale en x.

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$1,06m = 0m + v_{0x} \cdot 0,5s$$
$$v_{0x} = 2,12 \tfrac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse initiale est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3,57 \tfrac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{2,87}{2,12} = 53,5°$$

10. Puisque Ruprecht retombe à la même hauteur, on peut trouver l'angle avec la formule de la portée

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$
$$70m = \frac{\left(35\tfrac{m}{s}\right)^2 \sin 2\theta}{9,8\tfrac{m}{s^2}}$$
$$\theta = 17,03° \quad \text{ou} \quad \theta = 72,97°$$

La photographie et le bon sens suggèrent que c'est 17,03 ° qui est la bonne réponse.

La durée du vol se trouve alors avec

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$0m = 0m + \left(35\tfrac{m}{s}\sin 17,03°\right)\cdot t - 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2$$
$$10,25\tfrac{m}{s}t = 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2$$
$$10,25\tfrac{m}{s} = 4,9\tfrac{m}{s^2}t$$
$$t = 2,09s$$

11. a) On trouve la vitesse avec

$$y=(\tan\theta)\,x-\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

$$-20m=(\tan 35°)\cdot 350m-\left(\frac{9{,}8\frac{m}{s^2}}{2v_0^2\cos^2 35°}\right)(350m)^2$$

$$v_0=58{,}09\tfrac{m}{s}$$

b) Le temps de vol est

$$y=y_0+v_{0y}t-\tfrac{1}{2}gt^2$$

$$-20m=0m+\left(58{,}09\tfrac{m}{s}\sin 35°\right)t-4{,}9\tfrac{m}{s^2}t^2$$

$$20m+33{,}32\tfrac{m}{s}t-4{,}9\tfrac{m}{s^2}t^2=0$$

$$t=7{,}355s \quad \text{et} \quad t=-0{,}555s$$

Seule la réponse positive est bonne.

c) La hauteur maximale fut de

$$-2g\,(y-y_0)=v_y^2-v_{0y}^2$$

$$-19{,}6\tfrac{m}{s^2}(y-0m)=\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(33{,}32\tfrac{m}{s}\right)^2$$

$$y=56{,}65m$$

d) La vitesse en *x* reste toujours la même.

$$v_x=v_{0x}=58{,}09\tfrac{m}{s}\cos 35°=47{,}59\tfrac{m}{s}$$

À l'arrivée au sol, la vitesse en *y* est

$$\begin{aligned}v_y&=v_{0y}-gt\\&=33{,}32\tfrac{m}{s}-9{,}8\tfrac{m}{s^2}\cdot 7{,}355s\\&=-38{,}76\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=61{,}37\tfrac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{-38,76}{47,59} = -39,16°$$

12. Si la vitesse est horizontale à t = 3 s, c'est que l'objet a atteint sa hauteur maximale. Puisque l'objet retombe à la même hauteur qu'il a été lancé, le temps de vol total est deux fois plus grand que le temps nécessaire pour atteindre la hauteur maximale. Le temps de vol est donc de 6 s.

Quant à la vitesse en x, elle est toujours la même. Comme elle est de 20 m/s au point le plus haut, elle est aussi de 20 m/s au départ.

La portée est donc de

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ &= 0m + 20\tfrac{m}{s}\cdot 6s \\ &= 120m \end{aligned}$$

b) Comme la vitesse en y est nulle à la hauteur maximale, on a

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ 0\tfrac{m}{s} &= v_{0y} - 9,8\tfrac{m}{s^2}\cdot 3s \\ v_{oy} &= 29,4\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse en x est toujours de 20 m/s

$$v_{0x} = v_x = 20\tfrac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse initiale est donc

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 35,56\tfrac{m}{s}$$

c) L'angle de départ est

$$\theta = \arctan\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \arctan\frac{29,4}{20} = 55,8°$$

13. On va trouver le temps avec le changement de vitesse en y. Les composantes de la vitesse initiale sont

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = 30\tfrac{m}{s} \cos 60° = 15\tfrac{m}{s}$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta = 30\tfrac{m}{s} \sin 60° = 25{,}98\tfrac{m}{s}$$

On peut trouver l'angle à la position 2 avec

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$
$$15\tfrac{m}{s} = 20\tfrac{m}{s} \cos\theta$$
$$\theta = 41{,}41°$$

La vitesse en y à la position 2 est

$$v_y = v \sin\theta = 20\tfrac{m}{s} \sin 41{,}41° = 13{,}23\tfrac{m}{s}$$

Le temps est donc

$$v_y = v_{0y} - gt$$
$$13{,}23\tfrac{m}{s} = 25{,}98\tfrac{m}{s} - 9{,}8\tfrac{m}{s^2} t$$
$$t = 1{,}301s$$

b) Pendant ce temps de 1,301 s, le déplacement en x est

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$x = 0m + 15\tfrac{m}{s} \cdot 1{,}301s$$
$$x = 19{,}52m$$

et le déplacement en y est

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2} gt^2 \\ &= 0m + 25{,}98\tfrac{m}{s} \cdot 1{,}301s - 4{,}9\tfrac{m}{s^2} \cdot (1{,}301s)^2 \\ &= 25{,}51m \end{aligned}$$

La distance est donc

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = 32{,}1m$$

14. On trouve la portée avec un peu de trigonométrie.

$$\tan 30° = \frac{y}{x}$$
$$\tan 30° = \frac{40m}{x}$$
$$x = 69,28m$$

Sachant la portée, on pourra trouver la vitesse initiale, à condition de connaitre le temps de vol. On peut connaitre ce temps avec le mouvement en *y*.

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$-40m = 0m + 0\tfrac{m}{s} \cdot t - 4,9\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$
$$-40m = -4,9\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$
$$t = 2,86s$$

On peut donc trouver la vitesse initiale avec

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$69,28m = 0m + v_{0x} \cdot 2,857s$$
$$v_{0x} = 24,25\tfrac{m}{s}$$

15. Si le projectile est 2 m sous sa hauteur initiale, alors le temps de vol est

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$-2m = 0m + 0\tfrac{m}{s} \cdot t - 4,9\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$
$$-2m = -4,9\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$
$$t = 0,6389s$$

Cela signifie que la distance en *x* de la cible est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ &= 0m + 30\tfrac{m}{s} \cdot 0,6389s \\ &= 19,17m \end{aligned}$$

Maintenant, on veut atteindre cette cible distante de 19,17 m, située à la même hauteur que le canon. Puisque la hauteur est la même, on peut utiliser la formule de la portée pour trouver l'angle.

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$
$$19{,}17m = \frac{\left(30\,\tfrac{m}{s}\right)^2 \sin 2\theta}{9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}}$$
$$\theta = 6{,}02° \quad \text{ou} \quad \theta = 83{,}98°$$

Ces deux réponses sont bonnes.

16. a) On peut trouver la hauteur avec

$$\begin{aligned} y &= (\tan\theta)\,x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2 \\ &= (\tan 30°)\cdot 10m - \left(\frac{9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}}{2\left(30\,\tfrac{m}{s}\right)^2\cos^2 30°}\right)(10m)^2 \\ &= 5{,}048m \end{aligned}$$

Ceci est la hauteur par rapport au point de départ. Comme ce point est à 1 m du sol, la hauteur par rapport au sol est de 6,048 m.

b) La vitesse en x est la même que la vitesse initiale

$$v_x = v_{0x} = 30\,\tfrac{m}{s}\cos 30° = 25{,}98\,\tfrac{m}{s}$$

La vitesse en y est

$$-2g\,(y - y_0) = v_y^2 - v_{0y}^2$$
$$-19{,}6\,\tfrac{m}{s^2}\cdot(5{,}048m - 0m) = v^2 - \left(30\,\tfrac{m}{s}\sin 30°\right)^2$$
$$v_y = 11{,}23\,\tfrac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 28{,}30\,\tfrac{m}{s}$$

et l'angle est

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{11{,}23}{25{,}98} = 23{,}4°$$

17. Trouvons la hauteur de la balle quand elle arrive vis-à-vis le mur. On commence par trouver le temps pour arriver au mur avec

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ 67,5m &= 0m + \left(20\tfrac{m}{s}\cos 35°\right)\cdot t \\ t &= 4,12s \end{aligned}$$

À ce temps, la hauteur de la balle est

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ &= 0m + \left(20\tfrac{m}{s}\sin 35°\right)\cdot 4,12s - 4,9\tfrac{m}{s^2}\cdot\left(4,12s\right)^2 \\ &= -35,92m \end{aligned}$$

Puisque la hauteur est négative, la balle passerait sous le mur s'il n'y avait pas de sol. De toute évidence, elle est tombée au sol avant d'arriver vis-à-vis le mur.

18. On trouve la distance avec

$$\begin{aligned} y &= \left(\tan\theta\right)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2 \\ 8m &= \left(\tan 40°\right)\cdot x - \left(\frac{9,8\tfrac{m}{s^2}}{2\left(24\tfrac{m}{s}\right)^2\cos^2 40°}\right)x^2 \\ 8m - 0,839\cdot x + 0,0145m^{-1}\cdot x^2 &= 0 \\ x = 12,04m \quad &\text{et} \quad x = 45,85m \end{aligned}$$

19. Les composantes de la vitesse initiale sont

$$\begin{aligned} v_{0x} &= 10\tfrac{m}{s}\cos\left(-30°\right) = 8,66\tfrac{m}{s} \\ v_{0y} &= 10\tfrac{m}{s}\sin\left(-30°\right) = -5\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Au point le plus bas, on trouve la vitesse en y avec

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ 30\tfrac{m}{s} &= \sqrt{\left(8,66\tfrac{m}{s}\right)^2 + v_y^2} \\ v_y &= -28,72\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

(Quand on fait la racine, la réponse peut être positive ou négative. La mise en situation ici nous force à garder la réponse négative.)

On trouve ensuite la hauteur

$$\begin{gathered}-2g\left(y-y_0\right)=v_y^2-v_{0y}^2\\-19,6\tfrac{m}{s^2}\cdot\left(y-0m\right)=\left(-28,72\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(-5\tfrac{m}{s}\right)^2\\y=-40,82m\end{gathered}$$

La falaise a donc une hauteur de 40,82 m.

20. L'équation de la trajectoire du projectile lancé à 45° est

$$\begin{gathered}y=\left(\tan 45°\right)x-\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2 45°}\right)x^2\\y=x-\left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2\end{gathered}$$

L'équation de la trajectoire du projectile lancé à 60° est

$$\begin{gathered}y=\left(\tan 60°\right)x-\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2 60°}\right)x^2\\y=\sqrt{3}x-\left(\frac{2g}{v_0^2}\right)x^2\end{gathered}$$

Puisque les deux projectiles arrivent au même x à la hauteur y, on doit avoir

$$x-\left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2=\sqrt{3}x-\left(\frac{2g}{v_0^2}\right)x^2$$

La solution de cette équation est

$$\begin{gathered}x-\left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2=\sqrt{3}x-\left(\frac{2g}{v_0^2}\right)x^2\\\left(\frac{2g}{v_0^2}\right)x^2-\left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2=\sqrt{3}x-x\end{gathered}$$

$$\left(\frac{2g}{v_0^2}-\frac{g}{v_0^2}\right)x^2=\left(\sqrt{3}-1\right)x$$

$$\left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2=\left(\sqrt{3}-1\right)x$$

$$\left(\frac{g}{v_0^2}\right)x=\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$x=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)v_0^2}{g}$$

Puisque la vitesse est de 50 m/s, on arrive à

$$\begin{aligned}x&=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(50\tfrac{m}{s}\right)^2}{9,8\tfrac{m}{s^2}}\\&=186,74m\end{aligned}$$

On peut alors trouver la hauteur avec une des deux équations de la trajectoire.

$$\begin{aligned}y&=x-\left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2\\&=186,747m-\frac{9,8\tfrac{m}{s^2}}{\left(50\tfrac{m}{s}\right)^2}\left(186,747m\right)^2\\&=50,04m\end{aligned}$$

21. On trouve la vitesse avec

$$y=\left(\tan\theta\right)x-\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

$$155m=\left(\tan 60°\right)\cdot\left(195m\right)-\left(\frac{9,8\tfrac{m}{s^2}}{2v_0^2\cos^2 60°}\right)\left(195m\right)^2$$

$$v_0=63,86\tfrac{m}{s}$$

22. On trouve l'angle avec

$$y = (\tan\theta)\, x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\right) x^2$$

$$3000m = (\tan\theta) 5000m - \left(\frac{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{2\left(760\,\frac{m}{s}\right)^2 \cos^2\theta}\right)(5000m)^2$$

$$3000m = (\tan\theta) 5000m - 212{,}08m \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$3000 = (\tan\theta) 5000 - 212{,}08 \sec^2\theta$$

Reste à isoler θ dans cette équation. Pour y arriver, il faut se rappeler que $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$. On a alors

$$3000 = 5000 \tan\theta - 212{,}084\left(1 + \tan^2\theta\right)$$

$$3000 = 5000 \tan\theta - 212{,}084 - 212{,}084 \tan^2\theta$$

$$3212{,}084 - 5000 \tan\theta + 212{,}084 \tan^2\theta = 0$$

C'est une équation quadratique de tan² θ. La solution de cette équation quadratique est

$$\tan\theta = 0{,}6609 \quad \text{et} \quad 22{,}91$$

Les deux solutions sont donc

$$\theta = 33{,}46° \quad \text{et} \quad \theta = 87{,}50°$$

23. En x, la grenade doit parcourir 20 m en 4 secondes. On a donc

$$v_x = \frac{20m}{2s} = 10\,\tfrac{m}{s}$$

En y, la grenade doit être à y = 4 m à t = 4 s. On a donc

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$4m = 0m + v_{0y}(2s) - \frac{1}{2} 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2} \cdot (2s)^2$$

$$v_{0y} = 11{,}8\,\tfrac{m}{s}$$

Ainsi, la grandeur de la vitesse est

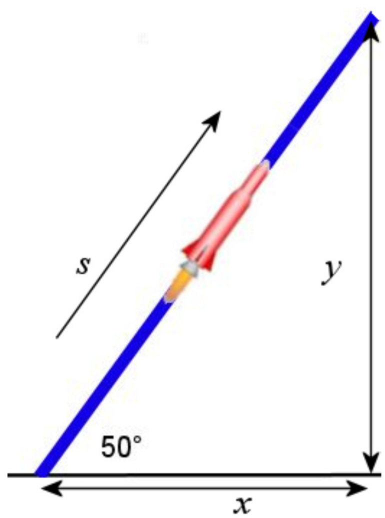
$$v_0 = \sqrt{\left(10\tfrac{m}{s}\right)^2 + \left(11,8\tfrac{m}{s}\right)^2} = 15,47\tfrac{m}{s}$$

et l'angle est

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\frac{v_y}{v_x}\\ &= \arctan\frac{11,8}{10}\\ &= 49,72°\end{aligned}$$

24. Séparons ce mouvement en deux parties : un mouvement en ligne droite pendant 20 secondes et un mouvement en chute libre.

On va utiliser un axe des s dirigé dans le sens du mouvement pour la première partie.



Pendant le mouvement en ligne droite, le déplacement est

$$\begin{aligned}s &= s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2\\ &= 0m + 0\tfrac{m}{s}\cdot 20s + \tfrac{1}{2}\left(20\tfrac{m}{s^2}\right)\left(20s\right)^2\\ &= 4000m\end{aligned}$$

Les positions finales en x et y sont donc

$$\begin{aligned}x &= s\cos 50° = 2571,2m\\ y &= s\sin 50° = 3064,2m\end{aligned}$$

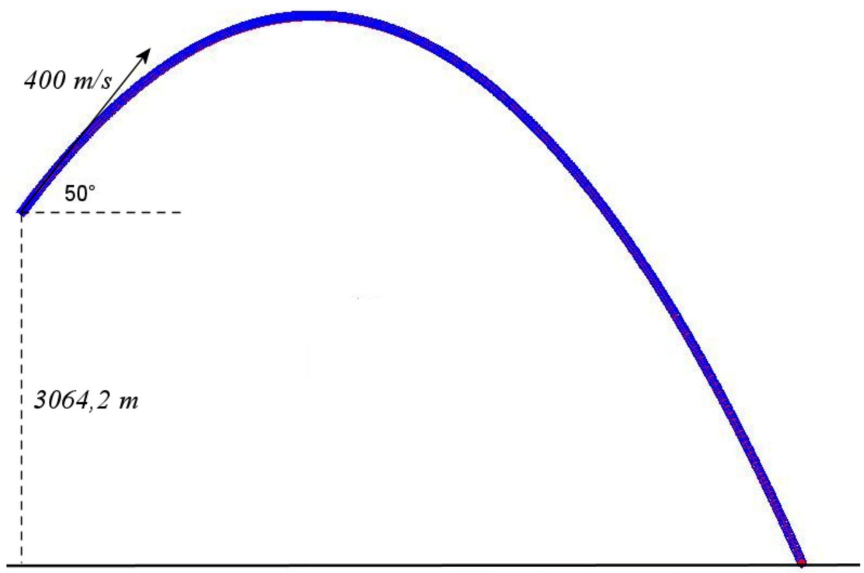
La vitesse à la fin de cette phase est

$$\begin{aligned}v &= v_0 + at\\ &= 0\tfrac{m}{s} + \left(20\tfrac{m}{s^2}\right)\left(20s\right)\\ &= 400\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

Cette vitesse est dans le sens de la trajectoire. Si on la sépare en composantes x et y, on a

$$v_x = v\cos 50° = 257{,}12\tfrac{m}{s}$$
$$v_y = v\sin 50° = 306{,}42\tfrac{m}{s}$$

Passons maintenant à la phase de chute libre. Les positions et les vitesses initiales de cette phase sont les valeurs finales de la phase précédentes. On a alors la situation suivante.



a) On trouve la hauteur maximale avec

$$-2g\left(y-y_0\right) = v_y^2 - v_{0y}^2$$
$$-19{,}6\tfrac{m}{s^2}\cdot\left(y-3064{,}2m\right) = \left(0\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(306{,}42\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$y = 7855m$$

b) On trouve le temps de vol de cette partie avec

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$0m = 3064{,}2m + 306{,}42\tfrac{m}{s}t - 4{,}9\tfrac{m}{s^2}t^2$$
$$t = 71{,}30s \quad \text{et} \quad t = -8{,}77s$$

En ajoutant les 20 secondes de la première phase, le temps de vol total est de 91,30 s.

c) La position en x à la fin de la deuxième phase est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ &= 2571,2m + 257,12\tfrac{m}{s} \cdot 71,30s \\ &= 20905m \end{aligned}$$

25. L'accélération est

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(1024\tfrac{m}{s}\right)^2}{3,844\times10^8 m} \\ &= 0,002728\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

26. Le rayon de la trajectoire est

$$\begin{aligned} r &= \frac{circonference}{2\pi} \\ &= 7,958m \end{aligned}$$

L'accélération est donc

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\ &= \frac{4\pi^2 7,958m}{(5s)^2} \\ &= 12,57\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

27. La période du train est de

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\ 20\tfrac{m}{s^2} &= \frac{4\pi^2 \cdot 0,5m}{T^2} \\ T &= 0,9935s \end{aligned}$$

Le temps pour faire 50 tours est donc de

$$\begin{aligned} t_{tot} &= 50 \times 0,9935s \\ &= 49,67s \end{aligned}$$

28. On trouve le rayon de la trajectoire avec la formule

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi r}{T} \\ 36\tfrac{m}{s} &= \frac{2\pi r}{24s} \\ r &= 137,5m \end{aligned}$$

L'accélération est donc

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(36\tfrac{m}{s}\right)^2}{137,5m} \\ &= 9,425\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

29. Au point A, l'accélération est

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(20\tfrac{m}{s}\right)^2}{10m} \\ &= 40\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Cette accélération est vers le haut.

Au point B, l'accélération est

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(12\tfrac{m}{s}\right)^2}{15m} \\ &= 9,6\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Cette accélération est vers le bas.

30. a) L'accélération tangentielle est

$$\begin{aligned}
2a_T\left(s-s_0\right) &= v^2 - v_0^2 \\
2a_T\left(4\pi r - 0m\right) &= \left(0\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(25\tfrac{m}{s}\right)^2 \\
2a_T\left(4\pi\cdot 50m - 0m\right) &= \left(0\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(25\tfrac{m}{s}\right)^2 \\
a_T &= -0,4974\tfrac{m}{s^2}
\end{aligned}$$

b) Au bout d'un tour, la vitesse de la voiture est

$$\begin{aligned}
2a_T\left(s-s_0\right) &= v^2 - v_0^2 \\
2\left(-0,4974\tfrac{m}{s^2}\right)\left(2\pi r - 0m\right) &= v^2 - \left(25\tfrac{m}{s}\right)^2 \\
2\left(-0,4974\tfrac{m}{s^2}\right)\left(2\pi\cdot 50m - 0m\right) &= v^2 - \left(25\tfrac{m}{s}\right)^2 \\
v &= 17,68\tfrac{m}{s}
\end{aligned}$$

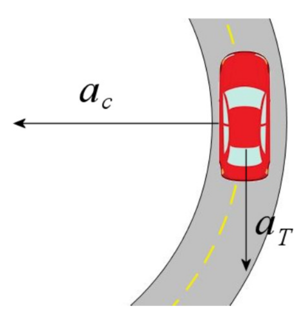
L'accélération centripète est donc

$$\begin{aligned}
a_c &= \frac{v^2}{r} \\
&= \frac{\left(17,68\tfrac{m}{s}\right)^2}{50m} \\
&= 6,25\tfrac{m}{s^2}
\end{aligned}$$

c) La grandeur de l'accélération totale est

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{a_c^2 + a_T^2} \\
a &= \sqrt{\left(6,25\tfrac{m}{s^2}\right)^2 + \left(0,4974\tfrac{m}{s^2}\right)^2} = 6,27\tfrac{m}{s^2}
\end{aligned}$$

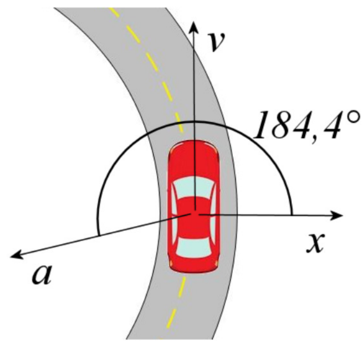
Les directions des accélérations sont



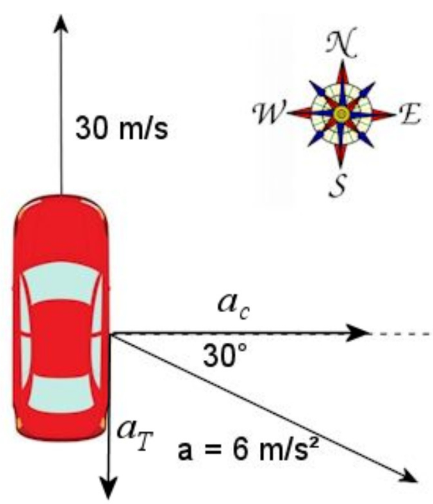
Avec des axes *x* et *y* conventionnels, la direction est

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{-0,4974}{-6,25} = 184,4°$$

Ce qui signifie qu'il y a un angle de 94,4 ° avec la vitesse



31. Les composantes de l'accélération sont



a) Comme l'accélération tangentielle est opposée à la vitesse, cette voiture ralentit.

b) Dans cet exercice, l'accélération tangentielle est la composante en *y* de l'accélération. Cette composante est

$$\begin{aligned} a_T &= a \sin(-30°) \\ &= 6 \tfrac{m}{s^2} \sin(-30°) \\ &= -3 \tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

c) Comme l'accélération centripète est vers l'est, cette voiture tourne vers l'est.

d) On trouve le rayon de courbure à partir de l'accélération centripète. Dans cet exercice, l'accélération centripète est la composante en x de l'accélération. Cette composante est

$$\begin{aligned} a_c &= a\cos(-30°) \\ &= 6\tfrac{m}{s^2}\cos(-30°) \\ &= 5,20\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Le rayon de courbure est donc

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ 5,20\tfrac{m}{s^2} &= \frac{\left(30\tfrac{m}{s}\right)^2}{r} \\ r &= 173,2m \end{aligned}$$

32. Pour trouver d, on doit trouver le point d'intersection de la parabole et de la pente. L'équation de la parabole est

$$y = (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

$$y = (\tan 60°)x - \left(\frac{4,9\tfrac{m}{s^2}}{2500\tfrac{m^2}{s^2}\cos^2 60°}\right)x^2$$

L'équation de la pente est simplement l'équation d'une droite qui passe par l'origine.

$$y = mx$$

Comme la pente est égale à la tangente de l'angle d'inclinaison, l'équation est

$$y = (\tan 20°)x$$

Au point de croisement, les valeurs de y sont identiques. Cela signifie que

$$y_{parabole} = y_{droite}$$

$$(\tan 20°)x = (\tan 60°)x - \left(\frac{4,9\tfrac{m}{s^2}}{2500\tfrac{m^2}{s^2}\cos^2 60°}\right)x^2$$

La valeur de x est donc

$$(\tan 20°)\,x = (\tan 60°)\,x - \left(\frac{4,9\frac{m}{s^2}}{2500\frac{m^2}{s^2}\cos^2 60°}\right)x^2$$

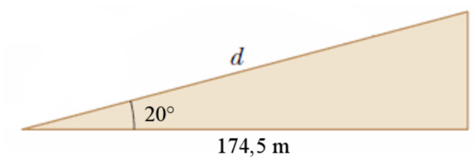
$$(\tan 20°) = (\tan 60°) - \left(\frac{4,9\frac{m}{s^2}}{2500\frac{m^2}{s^2}\cos^2 60°}\right)x$$

$$\left(\frac{4,9\frac{m}{s^2}}{2500\frac{m^2}{s^2}\cos^2 60°}\right)x = (\tan 60°) - (\tan 20°)$$

$$x = \frac{\left((\tan 60°) - (\tan 20°)\right)2500\frac{m^2}{s^2}\cos^2 60°}{4,9\frac{m}{s^2}}$$

$$x = 174,5m$$

De là, on trouve d avec



$$\cos 20° = \frac{174,5m}{d}$$

$$d = 185,7m$$

33. Trouvons la vitesse de lancement en isolant v_0 dans

$$y = (\tan\theta)\,x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

On a alors

$$(\tan\theta)\,x - y = \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

$$v_0^2 = \frac{gx^2}{2\cos^2\theta\left((\tan\theta)\,x - y\right)}$$

$$v_0^2 = \frac{gx^2}{2x\cos^2\theta\tan\theta - 2y\cos^2\theta}$$

$$v_0^2 = \frac{gx^2}{2x\cos\theta\sin\theta - 2y\cos^2\theta}$$

$$v_0^2 = \frac{gx^2}{x\sin 2\theta - 2y\cos^2\theta}$$

Si la vitesse est minimale, c'est que le diviseur est maximum. On doit trouver la valeur maximale de

$$x \sin 2\theta - 2y\cos^2\theta$$

Évidemment, la valeur est maximale quand la dérivée est nulle. On doit donc avoir

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(x\sin 2\theta - 2y\cos^2\theta\right)}{d\theta} &= 0 \\
2x\cos 2\theta - -4y\cos\theta\sin\theta &= 0 \\
2x\cos 2\theta + 2y\sin 2\theta - &= 0 \\
x\cos 2\theta + y\sin 2\theta &= 0 \\
y\sin 2\theta &= -x\cos 2\theta \\
y\tan 2\theta &= -x \\
\tan 2\theta &= \frac{-x}{y}
\end{aligned}$$

Avec x = 195 m et y = 155 m, on arrive aux solutions suivantes.

$$\tan 2\theta = \frac{-195m}{155m}$$

$$2\theta = -51,52° \quad \text{et} \quad 2\theta = 128,48°$$

(La deuxième solution se trouve en ajoutant 180° à la première.) De toute évidence, la première solution est à rejeter. Il reste donc θ = 64,24°.

Ainsi, la vitesse minimale est

$$\begin{aligned}
v_0 &= \sqrt{\frac{gx^2}{x\sin 2\theta - 2y\cos^2\theta}} \\
&= \sqrt{\frac{9,8\frac{m}{s^2}\cdot(195m)^2}{(195m)\cdot\sin(128,48°) - 2\cdot(155m)\cdot\cos^2(64,24°)}} \\
&= \sqrt{3960,2\frac{m^2}{s^2}} \\
&= 62,93\frac{m}{s}
\end{aligned}$$