Solutionnaire du chapitre 1

1. La vitesse moyenne est

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

En mettant la distance en mètre et le temps en secondes, on a

$$\begin{aligned}\overline{v} &= \frac{384\,400\,000m}{262\,140s} \\ &= 1466,4\tfrac{m}{s} \\ &= 5279\tfrac{km}{h}\end{aligned}$$

2. On trouve la distance avec la vitesse moyenne du *Deutschland*

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La vitesse moyenne est de

$$23,15kn \times \frac{1,853\tfrac{km}{h}}{1kn} = 42,9\tfrac{km}{h} = 11,92\tfrac{m}{s}$$

et le temps est

$$\begin{aligned}\Delta t &= 5\,j \times \frac{24h}{1\,j} \times \frac{60\min}{1h} \times \frac{60s}{1\min} + 11h \times \frac{60\min}{1h} \times \frac{60s}{1\min} + 54\min \times \frac{60s}{1\min} \\ &= 474\,840s\end{aligned}$$

La distance est donc

$$\begin{aligned}\overline{v} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ 11,92\tfrac{m}{2} &= \frac{\Delta x}{474840s} \\ \Delta x &= 5\,658\,100m = 5658,1km\end{aligned}$$

Avec cette distance, on peut maintenant trouver le temps de traversée du Lusitania. La vitesse moyenne du Lusitania fut de

$$23,99kn\times\frac{1,853\frac{km}{h}}{1kn}=44,45\tfrac{km}{h}=12,35\tfrac{m}{s}$$

Le temps de traversée est donc de

$$\begin{aligned}\overline{v}&=\frac{\Delta x}{\Delta t}\\12,35\tfrac{m}{s}&=\frac{5\,658\,100m}{\Delta t}\\\Delta t&=458\,213s\end{aligned}$$

La différence de temps est donc

$$t=474\,840s-458\,213s=16\,627s$$

Ce qui représente 277 min et 7 secondes, soit 4 h 37 min 7 s. Arrondissons à 4 h 37 min.

3. On a

$$x=x_0+vt$$

En posant que la position initiale de Richard était à $x = 0$, on a

$$\begin{aligned}x&=x_0+vt\\350m&=0m+1,389\tfrac{m}{s}\cdot t\\t&=252s=4\min 12s\end{aligned}$$

4. Le temps de collision est

$$\begin{aligned}t&=\frac{L}{v_1-v_2}\\t&=\frac{2000m}{13,89\frac{m}{s}--19,44\frac{m}{s}}\\t&=60s\end{aligned}$$

La position du sous-marin français est alors (en posant que la position initiale est à $x = 0$ m)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ &= 0m + 13{,}89 \tfrac{m}{s} \cdot 60s = 833m \end{aligned}$$

La collision est donc à 833 m à droite de la position initiale du sous-marin français.

5. Calculons premièrement combien de temps il faut à Nicole pour atteindre la voiture. En partant de $x = 0$ m, elle doit arriver à $x = 100$ m avec une vitesse de 15 km/h. Le temps est donc

$$\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ 100m &= 0m + 4{,}167 \tfrac{m}{s} \cdot t \\ t &= 24s \end{aligned}$$

On peut trouver ensuite combien il fait de temps pour que les ours rattrapent Nicole. Ce temps est

$$\begin{aligned} t &= \frac{L}{v_1 - v_2} \\ t &= \frac{30m}{6{,}944 \tfrac{m}{s} - 4{,}167 \tfrac{m}{s}} \\ t &= 10{,}8s \end{aligned}$$

Comme les ours la rattrapent avant qu'elle arrive à la voiture, la petite Nicole doit gentiment redonner le poisson aux grizzlys.

6. Séparons ce mouvement en deux parties à vitesse constante. Si on pose que Dieudonné partait à la position $x = 0$ m, alors sa position à la fin de la première partie est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ &= 0km + 110 \tfrac{km}{h} \cdot 4h \\ &= 440km \end{aligned}$$

En prenant cette position comme position initiale de la deuxième partie, la position à la fin de la deuxième partie est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ &= 440km + 130\tfrac{km}{h} \cdot 2h \\ &= 700km \end{aligned}$$

Son déplacement est donc de 700 km.

Sa vitesse moyenne est de

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\overline{v} = \frac{700km}{6h}$$

$$\Delta t = 116,7\tfrac{km}{h}$$

7. Séparons ce mouvement en deux parties à vitesse constante. Si on pose que Phil partait à la position x = 0 m, alors sa position à la fin de la première partie est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ &= 0m + 30\tfrac{m}{s} \cdot 80s \\ &= 2400m \end{aligned}$$

Le déplacement durant cette partie est donc de 2400 m.

En prenant cette position comme position initiale de la deuxième partie, la position à la fin de la deuxième partie est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ &= 2400m + -20\tfrac{m}{s} \cdot 15s \\ &= 2100m \end{aligned}$$

Le déplacement durant cette partie est donc de

$$\Delta x = x_f - x_i = 2100m - 2400m = -300m$$

Son déplacement total est donc

$$\Delta x = x_f - x_i = 2100m - 0m = 2100m$$

Et la distance totale est de

$$d = 2400m + 300m = 2700m$$

Sa vitesse moyenne est de

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2100m}{95s} = 22,1\tfrac{m}{s}$$

Et sa vitesse scalaire moyenne est de

$$\overline{v}_{scalaire} = \frac{\text{distance}}{\Delta t} = \frac{2700m}{95s} = 28,42\tfrac{m}{s}$$

8. En prenant que l'épicentre est à $x = 0$ et que notre observateur est à $x = D$, on trouve le temps d'arriver des ondes primaires avec

$$\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ D &= 0 + v_p t_p \\ t_p &= \frac{D}{v_p} \end{aligned}$$

On trouve aussi le temps d'arriver des ondes secondaires avec la même équation

$$\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ D &= 0 + v_s t_s \\ t_s &= \frac{D}{v_s} \end{aligned}$$

On ne sait pas ces temps, mais on sait que les ondes secondaires arrivent 40 secondes après les ondes primaires. On doit donc avoir que

$$t_s - t_p = 40s$$

Cela nous amène à

$$\begin{aligned} \frac{D}{v_s} - \frac{D}{v_p} &= 40s \\ D\left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_p}\right) &= 40s \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs des vitesses, on a

$$D\left(\frac{1}{5\frac{km}{s}}-\frac{1}{8\frac{km}{s}}\right)=40s$$
$$D=533km$$

9. a) À t = 0 s, la position est x = 0 m. À t = 9 s, la position est x = -8 m. Le déplacement est donc

$$\Delta x = x_f - x_i = -8m - 0m = -8m$$

b) Calculons le déplacement pour chaque partie où la vitesse est constante, donc pour chaque partie où la pente est constante.

À t = 0 s, la position est x = 0 m. À t = 3 s, la position est x = 8 m. Le déplacement est donc

$$\Delta x = x_f - x_i = 8m - 0m = 8m$$

À t = 3 s, la position est x = 8 m. À t = 3 s, la position est x = 8 m. Le déplacement est donc nulle.

À t = 5 s, la position est x = 8 m. À t = 9 s, la position est x = -8 m. Le déplacement est donc

$$\Delta x = x_f - x_i = -8m - 8m = -16m$$

La distance est la somme des valeurs absolues des déplacements.

Distance = 8 m + 0 m + 16 m = 24 m

c) À t = 3 s, la position est x = 8 m. À t = 9 s, la position est x = -8 m. Le déplacement est donc

$$\Delta x = x_f - x_i = -8m - 8m = -16m$$

La vitesse moyenne est donc

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-16m}{9s-3s}=-2,67\tfrac{m}{s}$$

d) La vitesse à t = 1 s est égale à la pente du graphique à t = 1 s. Comme c'est une droite on peut prendre deux points sur cette droite pour calculer la pente. Prenons les points (0 s, 0 m) et (3 s, 8 m). La vitesse est donc

$$v = pente = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{8m - 0m}{3s - 0s} = 2,67 \tfrac{m}{s}$$

e) La vitesse à t = 8 s est égale à la pente du graphique à t = 8 s. Comme c'est une droite on peut prendre deux points sur cette droite pour calculer la pente. Prenons les points (7 s, 0 m) et (9 s, -8 m). La vitesse est donc

$$v = pente = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-8m - 0m}{9s - 7s} = -4 \tfrac{m}{s}$$

10. a) Pour trouver la vitesse moyenne entre t = 0 s et t = 2 s, il faut trouver la position à ces deux moments. À t = 0 s, la position est

$$\begin{aligned} x &= 4 \tfrac{m}{s^2} \cdot (0s)^2 - 5 \tfrac{m}{s} \cdot (0s) + 10m \\ &= 10m \end{aligned}$$

À t = 2 s, la position est

$$\begin{aligned} x &= 4 \tfrac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 - 5 \tfrac{m}{s} \cdot (2s) + 10m \\ &= 16m \end{aligned}$$

La vitesse moyenne est donc de

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{16m - 10m}{2s - 0s} = 3 \tfrac{m}{s}$$

b) On trouve la vitesse à t = 2 s en calculant la valeur de la dérivée à t = 2 s. La dérivée est

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(4 \tfrac{m}{s^2} t^2 - 5 \tfrac{m}{s} t + 10m\right)}{dt} = 8 \tfrac{m}{s^2} t - 5 \tfrac{m}{s}$$

À t = 2 s, la vitesse est donc

$$v = 8 \tfrac{m}{s^2} \cdot (2s) - 5 \tfrac{m}{s} = 11 \tfrac{m}{s}$$

11. L'accélération est

$$\overline{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{27,78\,\frac{m}{s}-0\,\frac{m}{s}}{6,1s}=4,554\,\frac{m}{s^2}$$

12. L'accélération est

$$\overline{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0\,\frac{m}{s}-33,33\,\frac{m}{s}}{3,6s}=-9,26\,\frac{m}{s^2}$$

13. a) À $t = 0$ s, la vitesse est $v = 0$ m/s. À $t = 4$ s, la vitesse est $v = 8$ m/s. L'accélération moyenne est donc

$$\overline{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{8\,\frac{m}{s}-0\,\frac{m}{s}}{4s-0s}=2\,\frac{m}{s^2}$$

b) À $t = 10$ s, la vitesse est $v = 8$ m/s. À $t = 12$ s, la vitesse est $v = 4$ m/s. L'accélération moyenne est donc

$$\overline{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{4\,\frac{m}{s}-8\,\frac{m}{s}}{12s-10s}=-2\,\frac{m}{s^2}$$

c) $t = 4$ s, la vitesse est $v = 8$ m/s. À $t = 8$ s, la vitesse est $v = 8$ m/s. L'accélération moyenne est donc

$$\overline{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{8\,\frac{m}{s}-8\,\frac{m}{s}}{8s-4s}=0\,\frac{m}{s^2}$$

d) L'accélération à $t = 1$ s est égale à la pente du graphique à $t = 1$ s. Comme c'est une droite, on peut prendre deux points sur cette droite pour calculer la pente. Prenons les points (0 s, 0 m/s) et (2 s, 8 m/s). L'accélération est donc

$$v = pente = \frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{8\,\frac{m}{s}-0\,\frac{m}{s}}{2s-0s}=4\,\frac{m}{s^2}$$

e) L'accélération à $t = 14$ s est égale à la pente du graphique à $t = 14$ s. Comme c'est une droite de pente nulle, l'accélération est nulle.

14. On trouve la réponse avec la concavité de la courbe.

15. a) Pour trouver l'accélération moyenne entre t = 0 s et t = 1 s, il faut connaitre la vitesse à ces deux instants. Pour trouver cette vitesse, il faut dériver la formule de la position pour obtenir la formule de la vitesse en fonction du temps. On a donc

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(3\frac{m}{s^3}t^3 - 8\frac{m}{s^2}t^2 + 2\frac{m}{s}t - 6m\right)}{dt} = 9\frac{m}{s^3}t^2 - 16\frac{m}{s^2}t + 2\frac{m}{s}$$

À t = 0 s, la vitesse est

$$v = 9\frac{m}{s^3}\cdot(0s)^2 - 16\frac{m}{s^2}\cdot(0s) + 2\frac{m}{s} = 2\frac{m}{s}$$

À t = 1 s, la vitesse est

$$v = 9\frac{m}{s^3}\cdot(1s)^2 - 16\frac{m}{s^2}\cdot(1s) + 2\frac{m}{s} = -5\frac{m}{s}$$

L'accélération moyenne est donc

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-5\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s}}{1s - 0s} = -7\frac{m}{s^2}$$

b) Pour trouver l'accélération, il faut dériver la formule de la vitesse. On a alors

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(9\frac{m}{s^3}t^2 - 16\frac{m}{s^2}t + 2\frac{m}{s}\right)}{dt} = 18\frac{m}{s^3}t - 16\frac{m}{s^2}$$

À t = 2 s, l'accélération est donc

$$a = 18\frac{m}{s^3}\cdot(2s) - 16\frac{m}{s^2} = 20\frac{m}{s^2}$$

c) Pour trouver le jerk, il faut dériver la formule de l'accélération. On a alors

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d\left(18\frac{m}{s^3}t - 16\frac{m}{s^2}\right)}{dt} = 18\frac{m}{s^3}$$

Le jerk est donc toujours constant à 18 m/s³.

16. a) La distance parcourue est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 0m + 0m + \frac{1}{2}5\tfrac{m}{s^2}\cdot(6s)^2 \\ &= 90m \end{aligned}$$

b) La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 0\tfrac{m}{s} + 5\tfrac{m}{s^2}\cdot 6s \\ &= 30\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

17. a) Le temps est donné par la formule

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$
$$100m = 0m + \frac{1}{2}\left(25\tfrac{m}{s} + 15\tfrac{m}{s}\right)\cdot t$$
$$t = 5s$$

b) L'accélération est

$$v = v_0 + at$$
$$15\tfrac{m}{s} = 25\tfrac{m}{s} + a\cdot(5s)$$
$$a = -2\tfrac{m}{s^2}$$

c) La vitesse au troisième poteau est donnée par

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$
$$2\cdot\left(-2\tfrac{m}{s^2}\right)\cdot(200m - 0m) = v^2 - \left(25\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$v^2 = -175m^2$$

Comme il n'y a pas de solution, la voiture ne se rend pas jusqu'au troisième poteau.

18. a) On trouve l'accélération avec

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$1600m = 1400m + 5\tfrac{m}{s} \cdot (25s) + \frac{1}{2}a \cdot (25s)^2$$
$$a = 0{,}24\tfrac{m}{s^2}$$

b) La vitesse à la fin de la course est

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 5\tfrac{m}{s} + 0{,}24\tfrac{m}{s} \cdot (25s) \\ &= 11\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

(D'accord, c'est un peu rapide pour terminer un 1600 m…)

19. La distance est

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$
$$2 \cdot \left(-0{,}2\tfrac{m}{s^2}\right) \cdot (x - 0m) = \left(9{,}65\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(10\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$x = 17{,}19m$$

20. On trouve la vitesse avec

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$
$$30m = 0m + \frac{1}{2}\left(v_0 + 20\tfrac{m}{s}\right) \cdot 1{,}2s$$
$$v_0 = 30\tfrac{m}{s}$$

21. On trouve l'accélération avec

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$
$$2 \cdot a(32m - 0m) = \left(24\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(30\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$a = -5{,}0625\tfrac{m}{s^2}$$

La distance de freinage avec une vitesse initiale de 42 m/s sera donc de

$$2a\left(x-x_0\right)=v^2-v_0^2$$
$$2\cdot\left(-5{,}0625\tfrac{m}{s^2}\right)\left(x-0m\right)=\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(42\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$x=174{,}2m$$

22. Il y a deux parties à ce mouvement : une première partie où il n'y a pas d'accélération qui dure 0,5 s et une deuxième partie où la voiture ralentit.

La position à la fin de la première partie est

$$\begin{aligned}x&=x_0+v_0t\\&=0m+30\tfrac{m}{s}\cdot 0{,}5s\\&=15m\end{aligned}$$

On utilise cette position comme position initiale de la deuxième partie. On a alors

$$2a\left(x-x_0\right)=v^2-v_0^2$$
$$2\cdot\left(-4\tfrac{m}{s^2}\right)\left(x-15m\right)=\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(30\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$x=127{,}5m$$

Comme l'orignal était à 100 m de la voiture, elle frappe l'orignal.

23. Trouvons en combien de temps chacun des deux coureurs fait la course. Nous avons deux phases au mouvement de chacun des coureurs : une phase d'accélération et une phase de décélération.

Phase d'accélération de Bob.

La position de Bob à la fin de cette phase est

$$\begin{aligned}x_B&=x_{B0}+v_{B0}t+\frac{1}{2}a_Bt^2\\&=0m+0m+\frac{1}{2}\left(5\tfrac{m}{s^2}\right)\left(1{,}8s\right)^2\\&=8{,}1m\end{aligned}$$

La vitesse de Bob à la fin de cette phase est

$$\begin{aligned} v_B &= v_{B0} + a_B t^2 \\ &= 0\tfrac{m}{s} + \left(5\tfrac{m}{s^2}\right)\left(1,8s\right) \\ &= 9\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Phase de décélération de Bob

On utilise ensuite ces valeurs de position et de vitesse comme valeurs initiales de la deuxième phase du mouvement. Le temps pour arriver à x = 100 m est donc

$$\begin{aligned} x_B &= x_{B0} + v_{B0}t + \frac{1}{2}a_B t^2 \\ 100m &= 8,1m + 9\tfrac{m}{s}\cdot t + \frac{1}{2}\left(-0,1\tfrac{m}{s^2}\right)t^2 \\ 0m &= -91,9m + 9\tfrac{m}{s}\cdot t - 0,05\tfrac{m}{s^2}t^2 \end{aligned}$$

Quand on résout cette équation quadratique, on a les solutions

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot -0,05\cdot -91,9}}{2\cdot -0,05} \begin{array}{l} \nearrow t = 10,867s \\ \\ \searrow t = 169,13s \end{array}$$

Seule la première solution est bonne. La deuxième serait le temps que prendrait Bob pour revenir à la ligne d'arrivée si son accélération négative continuait pour toujours. Dans ce cas, Bob ralentirait continuellement jusqu'à ce qu'il s'arrête pour ensuite partir à reculons et revenir à x = 100 m au bout de 169 s.

Bob fait donc la deuxième partie de sa course (la phase de décélération) en 10,867 s. La durée de sa course est donc de 1,8 s + 10,867 s = 12,667 s.

Phase d'accélération de Gilles.

La position de Gilles à la fin de cette phase est

$$\begin{aligned} x_G &= x_{G0} + v_{G0}t + \frac{1}{2}a_G t^2 \\ &= 0m + 0m + \frac{1}{2}\left(6\tfrac{m}{s^2}\right)\left(1,7s\right)^2 \\ &= 8,67m \end{aligned}$$

La vitesse de Gilles à la fin de cette phase est

$$\begin{aligned} v_G &= v_{G0} + a_G t \\ &= 0 \tfrac{m}{s} + \left(6 \tfrac{m}{s^2}\right)(1,7s) \\ &= 10,2 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Phase de décélération de Gilles

On utilise ensuite ces valeurs de position et de vitesse comme valeur initiale de la deuxième phase du mouvement. Le temps pour arriver à x = 100 m est donc

$$x_G = x_{B0} + v_{B0}t + \frac{1}{2}a_B t^2$$

$$100m = 8,67m + 10,2 \tfrac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2}\left(-0,24 \tfrac{m}{s^2}\right)t^2$$

$$0m = -91,33m + 10,2 \tfrac{m}{s} \cdot t - 0,12 \tfrac{m}{s^2} t^2$$

Quand on résout cette équation quadratique, on a les solutions

$$t = \frac{-10,2 \pm \sqrt{10,2^2 - 4 \cdot -0,12 \cdot -91,33}}{2 \cdot -0,12} \quad \begin{matrix} \nearrow t = 10,171s \\ \\ \searrow t = 74,83s \end{matrix}$$

Encore une fois, seule la première solution est bonne.

Gilles fait donc la deuxième partie de sa course (la phase de décélération) en 10,171 s. La durée de sa course est donc de 1,7 s + 10,171 s = 11,871 s.

Bob fait donc la course en 12,667 s alors que Gilles fait la course en 11,871 s. Gilles gagne donc par 0,796 s.

24. Il y a deux phases à ce mouvement.

Première phase : seule la première fusée accélère

a_1 = 5 m/s² a_2 = 0 m/s²   durée = 2 s.

À la fin de cette phase, la position et la vitesse de la première fusée est

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + v_{10}t + \frac{1}{2}a_1t^2 \\ &= 0m + 0m + \frac{1}{2}\left(5\tfrac{m}{s^2}\right)\left(2s\right)^2 \\ &= 10m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{10} + a_1t \\ &= 0\tfrac{m}{s} + \left(5\tfrac{m}{s^2}\right)\left(2s\right) \\ &= 10\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Quant à la fusée 2, elle reste à x = 0 m et sa vitesse reste nulle pendant toute cette phase.

Deuxième phase : Les deux fusées accélèrent

a_1 = 5 m/s² a_2 = 6 m/s²

Les positions des fusées durant cette phase sont

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + v_{10}t + \frac{1}{2}a_1t^2 \\ &= 10m + 10\tfrac{m}{s}\cdot t + \frac{1}{2}\left(5\tfrac{m}{s^2}\right)t^2 \\ &= 10m + 10\tfrac{m}{s}\cdot t + 2{,}5\tfrac{m}{s^2}t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_{20} + v_{20}t + \frac{1}{2}a_2t^2 \\ &= 0m + 0m + \frac{1}{2}\left(6\tfrac{m}{s^2}\right)t^2 \\ &= 3\tfrac{m}{s^2}t^2 \end{aligned}$$

Quand la fusée 2 rattrape la fusée 1, elles sont à la même place ($x_1 = x_2$). On a donc

$$\begin{gathered} x_1 = x_2 \\ 10m + 10\tfrac{m}{s}\cdot t + 2{,}5\tfrac{m}{s^2}t^2 = 3\tfrac{m}{s^2}t^2 \\ 10m + 10\tfrac{m}{s}\cdot t - 0{,}5\tfrac{m}{s^2}t^2 = 0 \end{gathered}$$

Quand on résout cette équation quadratique, on a les solutions

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot -0{,}5\cdot 10}}{2\cdot -0{,}5} \quad \begin{matrix} \nearrow t = -0{,}954s \\ \\ \searrow t = 20{,}954s \end{matrix}$$

La fusée 2 rattrape la fusée 1 20,954 s après le départ de la fusée 2 ou 22,954 s après le départ de la fusée 1.

La position des fusées est alors

$$\begin{aligned} x_2 &= 3\tfrac{m}{s^2}t^2 \\ &= 3\tfrac{m}{s^2}(20{,}954s)^2 \\ &= 1317m \end{aligned}$$

25. Comme l'équation du mouvement est

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

on doit avoir

$$5m = x_0 + 0m + 0m$$
$$5m = x_0 + (1s)v_0 + (0{,}5s^2)a$$
$$9m = x_0 + (2s)v_0 + (2s^2)a$$

La première équation nous donne directement x_0 = 5 m. Les deux autres équations deviennent alors

$$\begin{aligned} 5m &= 5m + (1s)v_0 + (0{,}5s^2)a \\ 0 &= v_0 + (0{,}5s)a \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 9m &= 5m + (2s)v_0 + (2s^2)a \\ 4m &= (2s)v_0 + (2s^2)a \end{aligned}$$

On va isoler v_0 dans l'équation de gauche, pour ensuite aller remplacer dans l'équation de droite

$$4m = (2s)v_0 + (2s^2)a$$
$$4m = (2s)\left(-(0{,}5s)a\right) + (2s^2)a$$
$$4m = (-1s^2)a + (2s^2)a$$
$$4m = (1s^2)a$$
$$a = 4\tfrac{m}{s^2}$$

On a alors

$$0 = v_0 + (0{,}5s)a$$
$$v_0 = -(0{,}5s)a$$
$$v_0 = -(0{,}5s)\cdot 4\tfrac{m}{s^2}$$
$$v_0 = -2\tfrac{m}{s}$$

L'équation du mouvement est donc

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$x = 5m - 2\tfrac{m}{s}\cdot t + 2\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2$$

À t = 5 s, on a

$$x = 5m - 2\tfrac{m}{s}\cdot(5s) + 2\tfrac{m}{s^2}\cdot(5s)^2$$
$$= 45m$$

26. a) La vitesse est donnée par (axe positif vers le bas, y_0 = 0 au départ)

$$2a(y - y_0) = v^2 - v_0^2$$
$$2\cdot(9{,}8\tfrac{m}{s^2})(12m - 0m) = v^2 - (0\tfrac{m}{s})^2$$
$$v = 15{,}34\tfrac{m}{s}$$

b) Le temps de chute est (axe positif vers le bas, y_0 = 0 au départ)

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$12m = 0m + 0m + \frac{1}{2}(9{,}8\tfrac{m}{s^2})t^2$$
$$t = 1{,}565s$$

27. (Dans ce problème, on utilise un axe positif vers le haut, y_0 = 0 au départ.)

a) À la hauteur maximale, la vitesse est nulle, on a donc

$$2a(y - y_0) = v^2 - v_0^2$$
$$2\cdot(-9{,}8\tfrac{m}{s^2})(y - 0m) = (0\tfrac{m}{s})^2 - (28\tfrac{m}{s})^2$$
$$y = 40m$$

b) On trouve le temps avec la formule suivante.

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$25m = 0m + 28\tfrac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2}\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t^2$$

Si on résout cette équation quadratique, on trouve les solutions

t = 1,108 s et t = 4,607 s

Ces deux réponses sont bonnes.

c) On trouve le temps avec la formule suivante.

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$-25m = 0m + 28\tfrac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2}\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t^2$$

Si on résout cette équation quadratique, on trouve les solutions

t = -0,785 s s et t = 6,499 s

Seule la deuxième réponse est bonne.

d) On utilise la formule

$$2a\left(y - y_0\right) = v^2 - v_0^2$$
$$2 \cdot \left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\left(20m - 0m\right) = v^2 - \left(28\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$v = \pm 19,8\tfrac{m}{s}$$

Les deux réponses sont bonnes.

e) Il y a deux possibilités ici puisque la vitesse peut être positive ou négative.

Si la vitesse est positive, on a

$$v = v_0 + at$$
$$10\tfrac{m}{s} = 28\tfrac{m}{s} + \left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t$$
$$t = 1,837s$$

Si la vitesse est négative, on a

$$\begin{gathered} v = v_0 + at \\ -10\tfrac{m}{s} = 28\tfrac{m}{s} + \left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t \\ t = 3,876s \end{gathered}$$

f) Il y a deux possibilités ici puisque la vitesse peut être positive ou négative.

Si la vitesse est positive, on a

$$\begin{gathered} 2a\left(y - y_0\right) = v^2 - v_0^2 \\ 2 \cdot \left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\left(y - 0m\right) = \left(12\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(28\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ y = 32,65m \end{gathered}$$

Si la vitesse est négative, on a

$$\begin{gathered} 2a\left(y - y_0\right) = v^2 - v_0^2 \\ 2 \cdot \left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\left(y - 0m\right) = \left(-12\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(28\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ y = 32,65m \end{gathered}$$

C’est la même hauteur.

g) On trouve la vitesse avec

$$\begin{gathered} 2a\left(y - y_0\right) = v^2 - v_0^2 \\ 2 \cdot \left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\left(-80m - 0m\right) = v^2 - \left(28\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ v = -48,50\tfrac{m}{s} \end{gathered}$$

On garde seulement la réponse négative, car la pierre va vers le bas.

h) Le temps de vol est

$$\begin{gathered} v = v_0 + at \\ -48,50\tfrac{m}{s} = 28\tfrac{m}{s} + \left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t \\ t = 7,806s \end{gathered}$$

28. (Dans ce problème, on utilise un axe positif vers le bas, $y_0 = 0$ au départ.)

On a

$$2a\left(y-y_0\right)=v^2-v_0^2$$
$$2\cdot\left(9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\left(10m-0m\right)=\left(24\tfrac{m}{s}\right)^2-v_0^2$$
$$v=\pm 19,49\tfrac{m}{s}$$

Les deux réponses sont bonnes. Tryphon a pu lancer la balloune vers le haut ou vers le bas.

29. (Dans ce problème, on utilise un axe positif vers le haut, y_0 = 0 au départ.)

On trouve la vitesse avec

$$2a\left(y-y_0\right)=v^2-v_0^2$$
$$2\cdot\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\left(80m-0m\right)=\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2-v_0^2$$
$$v=39,6\tfrac{m}{s}$$

30. (Dans ce problème, on utilise un axe positif vers le haut, y_0 = 0 au départ.)

On a

$$y=y_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$
$$0m=0m+v_0\cdot t+\frac{1}{2}\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t^2$$
$$v_0\cdot t=\frac{1}{2}\left(9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t^2$$
$$v_0=\frac{1}{2}\left(9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t$$
$$v_0=\frac{1}{2}\left(9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\cdot\left(12s\right)$$
$$v_0=58,8\tfrac{m}{s}$$

31. (Dans ce problème, on utilise un axe positif vers le haut, y_0 = 0 au départ.)

On résout ce problème avec

$$2a(y-y_0)=v^2-v_0^2$$
$$2\cdot\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)(5m-0m)=\left(0,3v_0\right)^2-v_0^2$$
$$2\cdot\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)(5m-0m)=\left(0,3\right)^2v_0^2-v_0^2$$
$$2\cdot\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)(5m-0m)=\left(\left(0,3\right)^2-1\right)v_0^2$$
$$v_0=10,38\tfrac{m}{s}$$

32. (Dans ce problème, on utilise un axe positif vers le haut, y_0 = 0 au départ.)

Il y a deux phases à ce mouvement : une accélération de 4 m/s² vers le haut pendant 20 s, puis une accélération de 9,8 m/s² vers le bas quand les moteurs s'arrêtent.

Première phase : a = 4 m/s²

À la fin de cette phase, on a

$$\begin{aligned}x&=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2\\&=0m+0m+\frac{1}{2}\left(4\tfrac{m}{s^2}\right)(20s)^2\\&=800m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v&=v_0+at\\&0\tfrac{m}{s}+\left(4\tfrac{m}{s^2}\right)(20s)\\&=80\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

Deuxième phase : a = -9,8 m/s²

Les valeurs finales de la phase 1 sont les valeurs initiales de cette deuxième phase.

Au point le plus haut, la vitesse est nulle. On trouve donc la hauteur maximale avec

$$2a(y-y_0)=v^2-v_0^2$$
$$2\cdot\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)(y-800m)=\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(80\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$y=1127m$$

Le temps écoulé durant cette phase pour que la fusée revienne au sol est

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$0m = 800m + 80\tfrac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2}\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t^2$$

Cette équation quadratique nous donne

t = -6,999 s et t = 23,326 s

Seule la réponse positive est acceptable.

Le temps de vol total est la somme des temps des deux étapes du mouvement. Le temps total est donc 20 s + 23,326 s = 43,326 s.

33. (Dans ce problème, on utilise un axe positif vers le bas, y_0 = 0 au départ.)

Calculons la position et la vitesse de la balle de Kim au bout de 1 s.

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 0m + 0m + \frac{1}{2}\left(9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\left(1s\right)^2 \\ &= 4,9m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 0\tfrac{m}{s} + \left(9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\left(1s\right) \\ &= 9,8\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Commence ensuite une deuxième phase quand Léon lance sa balle. La position des deux balles en fonction du temps est alors

$$\begin{aligned} x_K &= x_{K0} + v_{K0}t + \frac{1}{2}a_K t^2 \\ &= 4,9m + 9,8\tfrac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2}\left(9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t^2 \\ &= 4,9m + 9,8\tfrac{m}{s} \cdot t + 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_L &= x_{L0} + v_{L0}t + \frac{1}{2}a_L t^2 \\ &= 0m + 12\tfrac{m}{s}t + \frac{1}{2}\left(9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t^2 \\ &= 12\tfrac{m}{s}t + 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2 \end{aligned}$$

Quand la balle de Léon rattrape la balle de Kim, les deux positions sont égales. On a alors

$$\begin{aligned} x_K &= x_L \\ 4,9m + 9,8\tfrac{m}{s}\cdot t + 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2 &= 12\tfrac{m}{s}t + 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2 \\ 4,9m + 9,8\tfrac{m}{s}\cdot t &= 12\tfrac{m}{s}t \\ 4,9m &= 2,2\tfrac{m}{s}t \\ t &= 2,227s \end{aligned}$$

La balle de Léon rattrape donc la balle de Kim 2,227 s après le départ de la balle de Léon, donc 3,227 s après le départ de la balle de Kim.

À ce moment, la balle de Léon est à la position

$$\begin{aligned} x_L &= 12\tfrac{m}{s}t + 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2 \\ &= 12\tfrac{m}{s}\cdot(2,227s) + 4,9\tfrac{m}{s^2}\cdot(2,227s)^2 \\ &= 51,03m \end{aligned}$$

Elle a donc rattrapé la balle de Kim bien avant de frapper le sol (qui est a y = 400 m).

Elle est alors à une hauteur de 400 m – 51,03 m = 348,97 m.

34. (Dans ce problème, on utilise un axe positif vers le haut, y_0 = 0 au sol.)

a) La position en fonction du temps des deux balles est

$$\begin{aligned} x_J &= x_{J0} + v_{J0}t + \frac{1}{2}a_J t^2 \\ &= 51m + -5\tfrac{m}{s}\cdot t + \frac{1}{2}\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t^2 \\ &= 51m - 5\tfrac{m}{s}\cdot t - 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_F &= x_{F0} + v_{F0}t + \frac{1}{2}a_F t^2 \\ &= 1m + 15\tfrac{m}{s}t + \frac{1}{2}\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)t^2 \\ &= 1m + 15\tfrac{m}{s}t - 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2 \end{aligned}$$

Quand la balle de Johnny frappe la balle de Frédérique, les deux positions sont égales. On a alors

$$\begin{aligned} x_J &= x_F \\ 51m - 5\tfrac{m}{s}\cdot t - 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2 &= 1m + 15\tfrac{m}{s}t - 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2 \\ 51m - 5\tfrac{m}{s}\cdot t &= 1m + 15\tfrac{m}{s}t \\ 50m &= 20\tfrac{m}{s}t \\ t &= 2,5s \end{aligned}$$

b) À ce moment, la position des balles est

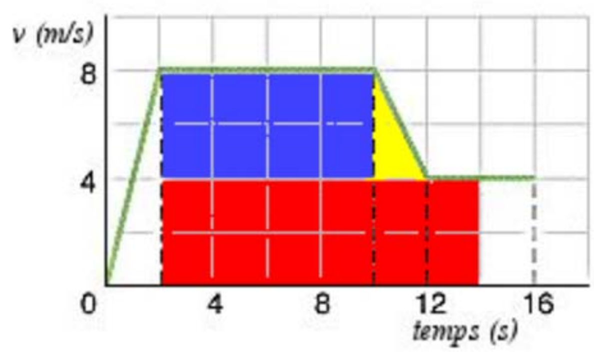
$$\begin{aligned} x_J &= 51m - 5\tfrac{m}{s} \cdot t - 4{,}9\tfrac{m}{s^2} t^2 \\ &= 51m - 5\tfrac{m}{s} \cdot (2{,}5s) - 4{,}9\tfrac{m}{s^2} \cdot (2{,}5s)^2 \\ &= 7{,}875m \end{aligned}$$

c) La vitesse des balles est

$$\begin{aligned} v_J &= v_{J0} + a_J t \\ &= -5\tfrac{m}{s} + \left(-9{,}8\tfrac{m}{s^2}\right) \cdot (2{,}5s) \\ &= -29{,}5\tfrac{m}{s} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_F &= v_{F0} + a_F t \\ &= 15\tfrac{m}{s} + \left(-9{,}8\tfrac{m}{s^2}\right) \cdot (2{,}5s) \\ &= -9{,}5\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

On remarque que les deux balles vont vers le bas. La balle de Frédérique a eu le temps d'attendre sa hauteur maximale et de commencer à redescendre avant d'être frappée par la balle de Johnny.

35. On trouve le déplacement avec l'aire sous la courbe. Cette aire est



L'aire du rectangle rouge est 4 m/s x 12 s = 48 m.

L'aire du rectangle bleu est 4 m/s x 8 s = 32 m.

L'aire du triangle jaune est ½ (4 m/s x 2 s) = 4 m.

L'aire totale étant de 84 m, le déplacement est de 84 m.

36. Pour obtenir la position à partir de la formule de la vitesse, on doit intégrer. On a donc

$$\begin{aligned} x &= \int v dt \\ &= \int 2\tfrac{m}{s} \cdot e^{\frac{-t}{2s}} dt \\ &= 2\tfrac{m}{s} \cdot e^{\frac{-t}{2s}} \cdot (-2s) + cst \\ &= -4m \cdot e^{\frac{-t}{2s}} + cst \end{aligned}$$

Puisque la position à $t = 0$ est $x_0 = 5$ m. On a

$$\begin{aligned} 5m &= -4m \cdot e^{\frac{-0s}{2s}} + cst \\ 5m &= -4m + cst \\ cst &= 9m \end{aligned}$$

La position est donc

$$x = -4m \cdot e^{\frac{-t}{2s}} + 9m$$

À $t = 4$s, la position est donc

$$\begin{aligned} x &= -4m \cdot e^{\frac{-2s}{2s}} + 9m \\ &= -4m \cdot e^{-1} + 9m \\ &= 7,528m \end{aligned}$$

37. a) On trouve la vitesse en intégrant l'accélération

$$\begin{aligned} v &= \int a dt \\ &= \int \left(36\tfrac{m}{s^4} t^2 + 10\tfrac{m}{s^2}\right) dt \\ &= 12\tfrac{m}{s^4} t^3 + 10\tfrac{m}{s^2} t + cst \end{aligned}$$

Puisque la vitesse initiale est de 4 m/s, on a

$$\begin{aligned} v &= 12\tfrac{m}{s^4} t^3 + 10\tfrac{m}{s^2} t + cst \\ 4\tfrac{m}{s} &= 12\tfrac{m}{s^4} \cdot (0s)^3 + 10\tfrac{m}{s^2}(0s) + cst \\ cst &= 4\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse est donc

$$v = 12\tfrac{m}{s^4}t^3 + 10\tfrac{m}{s^2}t + 4\tfrac{m}{s}$$

La vitesse à t = 1 s est donc

$$\begin{aligned} v &= 12\tfrac{m}{s^4}\cdot(1s)^3 + 10\tfrac{m}{s^2}\cdot(1s) + 4\tfrac{m}{s} \\ &= 26\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

b) Pour obtenir la position, on intègre une autre fois. On a alors

$$\begin{aligned} x &= \int v dt \\ &= \int\left(12\tfrac{m}{s^4}t^3 + 10\tfrac{m}{s^2}t + 4\tfrac{m}{s}\right)dt \\ &= 3\tfrac{m}{s^4}t^4 + 5\tfrac{m}{s^2}t^2 + 4\tfrac{m}{s}t + cst \end{aligned}$$

Si on choisit l'origine de façon à ce que l'objet soit à x = 0 m au départ, on a

$$0m = 3\tfrac{m}{s^4}\cdot(0s)^4 + 5\tfrac{m}{s^2}\cdot(0s)^2 + 4\tfrac{m}{s}\cdot(0s) + cst$$
$$cst = 0m$$

La position est donc donnée par la formule

$$x = 3\tfrac{m}{s^4}t^4 + 5\tfrac{m}{s^2}t^2 + 4\tfrac{m}{s}t$$

À t = 4 s, la position est donc

$$\begin{aligned} x &= 3\tfrac{m}{s^4}\cdot(4s)^4 + 5\tfrac{m}{s^2}\cdot(4s)^2 + 4\tfrac{m}{s}\cdot(4s) \\ &= 864m \end{aligned}$$

Comme on a posé que la position à t = 0 s était de 0 m, le déplacement est de 864 m.

38. a) Durant la phase d'accélération, le déplacement est

$$x_1 = \frac{1}{2}at_1^2$$

Pendant la phase à vitesse constante, le déplacement est

$$x_2 = 148{,}33\tfrac{m}{s}t_2$$

Puisque le temps total fut de 4,503 s, on sait que

$$t_2 = 4,503s - t_1$$

Puisque le déplacement total est de 400 m, on doit avoir

$$\begin{aligned} 400m &= x_1 + x_2 \\ &= \frac{1}{2}at_1^2 + 148,33\tfrac{m}{s}t_2 \\ &= \frac{1}{2}at_1^2 + 148,33\tfrac{m}{s}\left(4,503s - t_1\right) \end{aligned}$$

On sait aussi qu'à la fin de la période d'accélération, la vitesse est at_1. Ainsi

$$\begin{aligned} v &= at_1 \\ 148,33\tfrac{m}{s} &= at_1 \\ a &= \frac{148,33\tfrac{m}{s}}{t_1} \end{aligned}$$

Avec ces deux équations, on trouve que

$$\begin{aligned} 400m &= \frac{1}{2}at_1^2 + 148,33\tfrac{m}{s}\left(4,503s - t_1\right) \\ 400m &= \frac{1}{2}\frac{148,33\tfrac{m}{s}}{t_1}t_1^2 + 148,33\tfrac{m}{s}\left(4,503s - t_1\right) \\ 400m &= 74,165\tfrac{m}{s}\cdot t_1 + 667,945m - 148,33\tfrac{m}{s}t_1 \\ -267,945m &= 74,165\tfrac{m}{s}\cdot t_1 - 148,33\tfrac{m}{s}t_1 \\ -267,945m &= -74,165\tfrac{m}{s}\cdot t_1 \\ t_1 &= 3,613s \end{aligned}$$

b) L'accélération est

$$\begin{aligned} a &= \frac{148,33\tfrac{m}{s}}{t_1} \\ &= \frac{148,33\tfrac{m}{s}}{3,613s} \\ &= 41,06\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

39. La position de Sophie est

$$x_1 = vt$$

La position du train est

$$x_2 = \frac{1}{2} 3 \tfrac{m}{s^2} t^2 + 10m$$

Si Sophie rattrape le train, on doit avoir alors

$$x_1 = x_2$$
$$vt = \frac{1}{2} 3 \tfrac{m}{s^2} t^2 + 10m$$

La solution de cette équation est

$$vt = \frac{1}{2} 3 \tfrac{m}{s^2} t^2 + 10m$$
$$3 \tfrac{m}{s^2} t^2 - 2vt + 20m = 0$$
$$t = \frac{2v \pm \sqrt{4v^2 - 4 \cdot 3 \tfrac{m}{s^2} \cdot 20m}}{6 \tfrac{m}{s^2}}$$

Si Sophie rattrape le train, c'est qu'il doit y avoir une solution. Pour qu'il y ait une solution, il faut que ce qu'il y a dans la racine soit positif. On doit donc avoir

$$4v^2 - 4 \cdot 3 \tfrac{m}{s^2} \cdot 20m > 0$$
$$v^2 - 60 \tfrac{m^2}{s^2} \geq 0$$
$$v^2 \geq 60 \tfrac{m^2}{s^2}$$
$$v \geq 7{,}746 \tfrac{m}{s}$$

La vitesse minimale est donc de 7,746 m/s.