Solutionnaire du chapitre 12

1. Comme la Terre fait un tour en 24 heures, la vitesse angulaire est

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ &= \frac{2\pi}{24\times 60\times 60s} \\ &= 7,272\times 10^{-5}\,\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

2. a) La vitesse angulaire est

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ &= 0\tfrac{rad}{s} + 5\tfrac{rad}{s^2}\cdot 10s \\ &= 50\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

b) Le déplacement angulaire est

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= 0rad + 0\tfrac{rad}{s}\cdot 10s + \tfrac{1}{2}5\tfrac{rad}{s^2}\cdot(10s)^2 \\ &= 250rad\end{aligned}$$

Le nombre de tours est donc

$$\frac{250rad}{2\pi\frac{rad}{tour}} = 39,79\ tours$$

c) Le temps pour faire 50 tours, donc 100π rad, est

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ 100\pi rad &= 0rad + 0\tfrac{rad}{s}\cdot t + \tfrac{1}{2}5\tfrac{rad}{s^2}\cdot t^2 \\ 100\pi rad &= \tfrac{1}{2}5\tfrac{rad}{s^2}\cdot t^2 \\ t &= 11,21s\end{aligned}$$

3. Trouvons premièrement les vitesses angulaires en rad/s.

$$\omega_0 = 120 \tfrac{\text{tours}}{\text{minute}} = 120 \tfrac{\text{tours}}{\text{minute}} \cdot \frac{2\pi rad}{1\text{ tour}} \cdot \frac{1\text{ minute}}{60s} = 4\pi \tfrac{rad}{s}$$

$$\omega = 80 \tfrac{\text{tours}}{\text{minute}} = 80 \tfrac{\text{tours}}{\text{minute}} \cdot \frac{2\pi rad}{1\text{ tour}} \cdot \frac{1\text{ minute}}{60s} = \tfrac{8\pi}{3} \tfrac{rad}{s}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t \\ &= 0rad + \frac{1}{2}\left(4\pi \tfrac{rad}{s} + \tfrac{8\pi}{3} \tfrac{rad}{s}\right) \cdot 20s \\ &= \tfrac{200\pi}{3} rad\end{aligned}$$

Le nombre de tours est donc

$$\frac{\tfrac{200\pi}{3} rad}{2\pi \tfrac{rad}{tour}} = \tfrac{100}{3} tours = 33,33 tours$$

4. a) La position angulaire à $t = 5$ s est

$$\begin{aligned}\theta &= 10 \tfrac{rad}{s} t - 0,5 \tfrac{rad}{s^2} t^2 \\ &= 10 \tfrac{rad}{s} \cdot 5s - 0,5 \tfrac{rad}{s^2} (5s)^2 \\ &= 37,5 rad\end{aligned}$$

Le nombre de tours est donc

$$\frac{37,5 rad}{2\pi \tfrac{rad}{tour}} = 5,968 tours$$

b) La vitesse angulaire moyenne est

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ &= \frac{37,5 rad}{5s} \\ &= 7,5 \tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

c) On trouve premièrement la formule de la vitesse angulaire en dérivant la formule de la position angulaire

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\theta}{dt}\\ &= \frac{d\left(10\,\tfrac{rad}{s}\,t - 0,5\,\tfrac{rad}{s^2}\,t^2\right)}{dt}\\ &= 10\,\tfrac{rad}{s} - 1\,\tfrac{rad}{s^2}\,t\end{aligned}$$

La vitesse angulaire à t = 4 s est donc

$$\begin{aligned}\omega &= 10\,\tfrac{rad}{s} - 1\,\tfrac{rad}{s^2}\,t\\ &= 10\,\tfrac{rad}{s} - 1\,\tfrac{rad}{s^2}\cdot 4s\\ &= 6\,\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

d) On trouve premièrement la formule de l'accélération angulaire en dérivant la formule de la vitesse angulaire.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{d\omega}{dt}\\ &= \frac{d\left(10\,\tfrac{rad}{s} - 1\,\tfrac{rad}{s^2}\,t\right)}{dt}\\ &= -1\,\tfrac{rad}{s^2}\end{aligned}$$

L'accélération angulaire à t = 4 s est donc -1 rad/s².

e) On a

$$\begin{aligned}\omega &= 10\,\tfrac{rad}{s} - 1\,\tfrac{rad}{s^2}\,t\\ 0\,\tfrac{rad}{s} &= 10\,\tfrac{rad}{s} - 1\,\tfrac{rad}{s^2}\cdot t\\ t &= 10s\end{aligned}$$

5. a) La vitesse des bouts est

$$\begin{aligned}v &= \omega r\\ &= 2\pi\,\tfrac{rad}{s}\cdot 2m\\ &= 12,566\,\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

b) L'accélération angulaire de la tige se trouve avec

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\tfrac{2\pi}{5}\tfrac{rad}{s} = 2\pi \tfrac{rad}{s} + \alpha \cdot 0,2s$$
$$\alpha = -25,13\tfrac{rad}{s^2} \quad \left(8\pi \tfrac{rad}{s^2}\right)$$

c) L'accélération centripète du bout de la tige est

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(4\pi \tfrac{m}{s}\right)^2}{2m} = 78,96\tfrac{m}{s^2}$$

ou

$$a_c = \omega^2 r = \left(2\pi \tfrac{rad}{s}\right)^2 \cdot 2m = 78,96\tfrac{m}{s^2}$$

d) L'accélération tangentielle du bout de la tige est

$$\begin{aligned} a_T &= \alpha r \\ &= -25,13\tfrac{m}{s^2} \cdot 2m \\ &= -50,27\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

e) L'accélération du bout est

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_c^2 + a_T^2} \\ &= \sqrt{\left(78,96\tfrac{m}{s^2}\right)^2 + \left(50,27\tfrac{m}{s^2}\right)^2} \\ &= 93,6\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

6. Comme la corde attachée au bloc de 20 kg est entourée autour de la poulie à une distance de 25 cm, le déplacement de la poulie à 25 cm de l'axe de rotation doit être le même que celui du bloc. Ce déplacement est

$$\begin{aligned} s &= \theta r \\ &= \left(200° \cdot \tfrac{\pi rad}{180°}\right) \cdot 0,25m \\ &= 0,8727m \end{aligned}$$

Selon le sens de rotation de la poulie, le bloc se déplace vers le haut.

Comme la corde attachée au bloc de 30 kg est entourée autour de la poulie à une distance de 50 cm, le déplacement de la poulie à 50 cm de l'axe de rotation doit être le même que celui du bloc. Ce déplacement est

$$\begin{aligned} s &= \theta r \\ &= \left(200° \cdot \tfrac{\pi rad}{180°}\right) \cdot 0,50m \\ &= 1,745m \end{aligned}$$

Selon le sens de rotation de la poulie, le bloc se déplace vers le bas.

7. Comme la corde attachée au bloc de 20 kg est entourée autour de la poulie à une distance de 25 cm, la vitesse de la poulie à 25 cm de l'axe de rotation doit être la même que celle du bloc. Cette vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ &= 8 \tfrac{rad}{s} \cdot 0,25m \\ &= 2 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Selon le sens de rotation de la poulie, le bloc se déplace vers le haut.

Comme la corde attachée au bloc de 30 kg est entourée autour de la poulie à une distance de 50 cm, la vitesse de la poulie à 50 cm de l'axe de rotation doit être la même que celle du bloc. Cette vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ &= 8 \tfrac{rad}{s} \cdot 0,50m \\ &= 4 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Selon le sens de rotation de la poulie, le bloc se déplace vers le bas.

8. a) La vitesse du centre de masse des roues est évidemment la même que celle de la voiture. On a donc

$$\omega = \frac{v_{cm}}{R} = \frac{40 \tfrac{m}{s}}{0,40m} = 100 \tfrac{rad}{s}$$

b) L'accélération du centre de masse des roues est évidemment la même que celle de la voiture. L'accélération de la voiture est

$$\begin{aligned} 2a\left(x - x_0\right) &= v^2 - v_0^2 \\ 2a\left(160m - 0m\right) &= 0 - \left(40 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ a &= -5 \tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\alpha = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{-5\frac{m}{s^2}}{0,40m} = -12,5\frac{rad}{s^2}$$

9. L'accélération angulaire de la poulie est

$$\begin{aligned} 2\alpha(\theta-\theta_0) &= \omega^2-\omega_0^2 \\ 2\alpha(120\pi rad - 0rad) &= \left(10\pi\frac{rad}{s}\right)^2 - \left(3\pi\frac{rad}{s}\right)^2 \\ \alpha &= 1,191\frac{rad}{s^2} \end{aligned}$$

b) La position angulaire est

$$\begin{aligned} 2\alpha(\theta-\theta_0) &= \omega^2-\omega_0^2 \\ 2\cdot 1,191\frac{rad}{s^2}\cdot(\theta-0rad) &= \left(3\pi\frac{rad}{s}\right)^2 - 0 \\ \theta &= 37,28rad = 5,934tours \end{aligned}$$

10. a) Comme l'accélération angulaire change, il faut séparer le problème en parties dans lesquelles l'accélération angulaire est constante.

Première phase : α = 8 rad/s² (durée 4 s)

À la fin de cette phase, on a

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ &= 0\frac{rad}{s} + 8\frac{rad}{s^2}\cdot 4s \\ &= 32\frac{rad}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= 0rad + 0\frac{rad}{s}\cdot t + \tfrac{1}{2}8\frac{rad}{s^2}\cdot(4s)^2 \\ &= 64rad \end{aligned}$$

Deuxième phase : α =0 rad/s² (durée 1 s)

La position angulaire à la fin de cette phase est

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= 64rad + 32\tfrac{rad}{s}\cdot 1s + \tfrac{1}{2}0\tfrac{rad}{s^2}\cdot(1s)^2 \\ &= 96rad\end{aligned}$$

Le nombre de tours est donc

$$\frac{96rad}{2\pi\frac{rad}{tour}} = 15,28tours$$

b) Puisque la tige a tourné de seulement 64 rad = 10,2 tours pendant la première partie, il est clair qu'on atteindra 100 tours durant la deuxième partie. On a donc

$$\begin{gathered}\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ 200\pi rad = 64rad + 32\tfrac{rad}{s}\cdot t + \tfrac{1}{2}0\tfrac{rad}{s^2}\cdot t^2 \\ 564,32rad = 32\tfrac{rad}{s}\cdot t \\ t = 17,635s\end{gathered}$$

Avec les 4 secondes de la première phase, le temps total est donc de 21,635 s.

11. a) On a

$$\begin{gathered}\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \\ 40\pi\tfrac{rad}{s}\cdot 0,25m = \omega_2\cdot 0,15m \\ \omega_2 = 209,44\tfrac{rad}{s} = 2000\tfrac{tours}{\min}\end{gathered}$$

b) La vitesse de la chaine est la même que celle des bords de poulie. On peut prendre n'importe laquelle des deux poulies pour faire le calcul.

$$\begin{aligned}v &= \omega_1 R_1 \\ &= 125,66\tfrac{rad}{s}\cdot 0,25m \\ &= 31,416\tfrac{m}{s}\end{aligned} \qquad ou \qquad \begin{aligned}v &= \omega_2 R_2 \\ &= 209,44\tfrac{rad}{s}\cdot 0,15m \\ &= 31,416\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

12. a) Le moment d'inertie est

$$\begin{aligned}I &= \sum mr^2 \\ &= 120kg \cdot (1{,}5m)^2 + 120kg \cdot (1{,}5m)^2 + 120kg \cdot (1{,}5m)^2 + 120kg \cdot (1{,}5m)^2 \\ &= 1080\ kgm^2\end{aligned}$$

b) L'énergie cinétique est

$$\begin{aligned}E_k &= \frac{1}{2} I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2} 1080\ kgm^2 \cdot \left(\tfrac{2}{5}\pi \tfrac{rad}{s}\right)^2 \\ &= 852{,}73J\end{aligned}$$

(On aurait pu aussi trouver la vitesse avec $v = \omega r$ pour obtenir 1,885 m/s, et ensuite la somme des énergies $\frac{1}{2}mv^2$ des voitures pour aussi obtenir 852,73 J.)

13. a) Le moment d'inertie est

$$\begin{aligned}I &= \sum mr^2 \\ &= 0{,}2kg \cdot (0m)^2 + 0{,}2kg \cdot (0m)^2 + 0{,}3kg \cdot (0{,}15m)^2 + 0{,}3kg \cdot (0{,}15m)^2 \\ &= 0{,}0135\ kgm^2\end{aligned}$$

b) L'énergie cinétique est

$$\begin{aligned}E_k &= \frac{1}{2} I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2} 0{,}0135 kgm^2 \cdot \left(2 \tfrac{rad}{s}\right)^2 \\ &= 0{,}027J\end{aligned}$$

14. a) Le moment d'inertie est

$$
\begin{aligned}
I &= \sum mr^2 \\
&= 1kg \cdot (0,2m)^2 + 2kg \cdot (0,2m)^2 + 3kg \cdot (0,2m)^2 + 4kg \cdot (0,2m)^2 \\
&= 0,4\ kgm^2
\end{aligned}
$$

b) Le moment d'inertie est

$$
\begin{aligned}
I &= \sum mr^2 \\
&= 1kg \cdot (0,2828m)^2 + 2kg \cdot (0m)^2 + 3kg \cdot (0,2828m)^2 + 4kg \cdot (0m)^2 \\
&= 0,32kgm^2
\end{aligned}
$$

15. On doit trouver premièrement la position du centre de masse. On va prendre un axe qui va d'une masse à l'autre avec un $x = 0$ à l'endroit où est située la masse de 100 g. On a alors

$$
\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{0m \cdot 0,1kg + 0,6m \cdot 0,2kg}{0,1kg + 0,2kg} \\
&= 0,4m
\end{aligned}
$$

La masse de 100 g est donc à 40 cm de l'axe de rotation et la masse de 200 g est à 20 cm de l'axe de rotation. Le moment d'inertie est alors

$$
\begin{aligned}
I &= \sum mr^2 \\
&= 0,1kg \cdot (0,4m)^2 + 0,2kg \cdot (0,2m)^2 \\
&= 0,024kgm^2
\end{aligned}
$$

L'énergie cinétique totale est alors

$$
\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} 0,3kg \cdot \left(10\tfrac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2} 0,024\ kgm^2 \cdot \left(20\tfrac{rad}{s}\right)^2 \\
&= 15J + 4,8J \\
&= 19,8J
\end{aligned}
$$

16. a) On va trouver l'énergie cinétique avec

$$E_{k\,rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

On peut commencer par trouver le moment d'inertie. Pour une tige, on a

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12} mL^2 \\ &= \frac{1}{12} 3kg \cdot (1m)^2 \\ &= 0,25kgm^2 \end{aligned}$$

Il faut maintenant trouver la vitesse angulaire. Elle se trouve avec la vitesse des deux bouts de la tiges. Cette tige se déplace et tourne en même temps. Comme le haut de la tige va plus vite, elle tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. La vitesse due à la translation est v_{cm}. La vitesse du bout de la tige due à la rotation est v_{rot}.

Pour le bout d'en haut, la vitesse due à la translation est vers la droite et la vitesse due à la rotation est aussi vers la droite. Ainsi, ces deux vitesses s'additionnent

$$3\tfrac{m}{s} = v_{cm} + v_{rot}$$

Pour le bout d'en bas, la vitesse due à la translation est vers la droite et la vitesse due à la rotation est vers la gauche. Ainsi, les deux vitesses se soustraient

$$1\tfrac{m}{s} = v_{cm} - v_{rot}$$

En soustrayant ces deux équations, on peut trouver la vitesse due à la rotation.

$$\begin{aligned} 3\tfrac{m}{s} - 1\tfrac{m}{s} &= (v_{cm} + v_{rot}) - (v_{cm} - v_{rot}) \\ 2\tfrac{m}{s} &= 2v_{rot} \\ v_{rot} &= 1\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

On peut maintenant trouver la vitesse angulaire.

$$\begin{aligned} v_{rot} &= \omega r \\ 1\tfrac{m}{s} &= \omega \cdot 0,5m \\ \omega &= 2\tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

Ainsi, l'énergie cinétique de rotation est

$$\begin{aligned} E_{k\,rot} &= \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0,25kgm^2 \cdot \left(2\tfrac{rad}{s}\right)^2 \\ &= 0,5J \end{aligned}$$

b) L'énergie cinétique de translation est

$$E_{k\,trans} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2$$

Pour la trouver il nous faut la vitesse du centre de masse. On peut la trouver avec

$$\begin{aligned} 3\tfrac{m}{s} &= v_{cm} + v_{rot} \\ 3\tfrac{m}{s} &= v_{cm} + 1\tfrac{m}{s} \\ v_{cm} &= 2\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

L'énergie cinétique de translation est donc

$$\begin{aligned} E_{k\,trans} &= \frac{1}{2}mv_{cm}^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3kg \cdot \left(2\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 6J \end{aligned}$$

c) L'énergie cinétique totale est

$$\begin{aligned} E_k &= E_{k\,rot} + E_{k\,trans} \\ &= 0,5J + 6J \\ &= 6,5J \end{aligned}$$

17. Comme l'axe de rotation ne passe pas par le centre de masse de la sphère, le moment d'inertie de cette sphère est

$$\begin{aligned} I &= I_{cm\ sphère} + mh^2 \\ &= \frac{2}{5} mR^2 + mh^2 \\ &= \frac{2}{5} 2kg \cdot (0,06m)^2 + 2kg \cdot (0,03m)^2 \\ &= 0,00468 kgm^2 \end{aligned}$$

18. Cet objet est formé d'une tige et de deux sphères.

Comme l'axe de rotation passe par le centre de masse de la tige, le moment d'inertie de la tige est

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{cm\ tige} \\ &= \frac{1}{12} mL^2 \\ &= \frac{1}{12} 15kg \cdot (0,8m)^2 \\ &= 0,8\ kgm^2 \end{aligned}$$

Comme l'axe de rotation ne passe pas par le centre de masse de la sphère de droite, le moment d'inertie de cette sphère est

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{cm\ sphère} + mh^2 \\ &= \frac{2}{5} mR^2 + mh^2 \\ &= \frac{2}{5} 10kg \cdot (0,12m)^2 + 10kg \cdot (0,52m)^2 \\ &= 2,7616\ kgm^2 \end{aligned}$$

Comme l'axe de rotation ne passe pas par le centre de masse de la sphère de gauche, le moment d'inertie de cette sphère est

$$\begin{aligned} I_3 &= I_{cm\ sphère} + mh^2 \\ &= \frac{2}{5} mR^2 + mh^2 \\ &= \frac{2}{5} 10kg \cdot (0,12m)^2 + 10kg \cdot (0,52m)^2 \\ &= 2,7616\ kgm^2 \end{aligned}$$

Le moment d'inertie total est donc

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= 0,8kgm^2 + 2,7616\ kgm^2 + 2,7616\ kgm^2 \\ &= 6,3232\ kgm^2 \end{aligned}$$

19. Cet objet est formé d'une tige et de deux disques.

Comme l'axe de rotation passe par le centre de masse de la tige (qu'on considère comme un cylindre parce que l'axe est dans le sens de la tige), le moment d'inertie de la tige est

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{cm\ \ cylindre} \\ &= \frac{1}{2} mR^2 \end{aligned}$$

On doit trouver la masse de ce morceau. La masse est

$$\begin{aligned} m &= \rho \cdot volume \\ &= \rho \cdot \pi r^2 l \\ &= 5000 \tfrac{kg}{m^3} \cdot \pi \cdot (0,05m)^2 \cdot 0,1m \\ &= 3,927kg \end{aligned}$$

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} mR^2 \\ &= \frac{1}{2} 3,927kg \cdot (0,05m)^2 \\ &= 0,0049\ kgm^2 \end{aligned}$$

Comme l'axe de rotation passe par le centre de masse du disque de droite, le moment d'inertie du disque est

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{cm\ cylindre} \\ &= \frac{1}{2} mR^2 \end{aligned}$$

On doit trouver la masse de ce morceau. La masse est

$$\begin{aligned} m &= \rho \cdot volume \\ &= \rho \cdot \pi r^2 l \\ &= 5000 \tfrac{kg}{m^3} \cdot \pi \cdot (0,2m)^2 \cdot 0,04m \\ &= 25,13kg \end{aligned}$$

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} mR^2 \\ &= \frac{1}{2} 25,13kg \cdot (0,2m)^2 \\ &= 0,5027\ kgm^2 \end{aligned}$$

Le calcul est identique pour le disque de gauche. On a donc

$$I_3 = 0,5027\ kgm^2$$

Le moment d'inertie total est donc

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= 0,0049kgm^2 + 0,5027kgm^2 + 0,5027kgm^2 \\ &= 1,0102\ kgm^2 \end{aligned}$$

20. Cet objet est formé d'un cylindre vide (le tour) et de deux disques (le couvercle et le fond).

Comme l'axe de rotation passe par le centre de masse du cylindre vide, le moment d'inertie du tour de la boite de conserve est

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{cm \text{ cylindre vide}} \\ &= mR^2 \end{aligned}$$

On doit trouver la masse de ce morceau. La masse est

$$\begin{aligned} m &= \sigma \cdot aire \\ &= \sigma \cdot 2\pi rh \\ &= 10 \tfrac{kg}{m^2} \cdot 2\pi \cdot 0,04m \cdot 0,09m \\ &= 0,2262kg \end{aligned}$$

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I_1 &= mR^2 \\ &= 0,2262kg \cdot (0,04m)^2 \\ &= 3,619\times10^{-4}\ kgm^2 \end{aligned}$$

Comme l'axe de rotation passe par le centre de masse du couvercle, le moment d'inertie du disque est

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{cm\ disque} \\ &= \frac{1}{2}mR^2 \end{aligned}$$

On doit trouver la masse de ce morceau. La masse est

$$\begin{aligned} m &= \sigma \cdot aire \\ &= \sigma \cdot \pi r^2 \\ &= 10\tfrac{kg}{m^2} \cdot \pi \cdot (0,04m)^2 \\ &= 0,05026kg \end{aligned}$$

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}mR^2 \\ &= \frac{1}{2}0,05026kg \cdot (0,04m)^2 \\ &= 4,021\times10^{-5}\ kgm^2 \end{aligned}$$

Le calcul est identique pour le disque qui forme le fond. On a donc

$$I_3 = 4,021\times10^{-5}\ kgm^2$$

Le moment d'inertie total est donc

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= 3,619\times10^{-4}\ kgm^2 + 4,02\times10^{-5}\ kgm^2 + 4,02\times10^{-5}\ kgm^2 \\ &= 4,423\times10^{-4}\ kgm^2 \end{aligned}$$

21. Comme il y a un seul objet qui tourne autour d'un axe sans se déplacer, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2} I\omega^2 + mgy$$

Instant 1 : poutre dans sa position montrée sur la figure.

À ce moment la tige ne tourne pas, et donc $\omega = 0$. Il ne reste qu'à trouver la hauteur du centre de masse, qui est au centre de la tige. Cette hauteur est

$$y = 3m \sin 60° = 2,598m$$

L'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I\omega^2 + mgy \\ &= 0 + 100kg \cdot 9,8 \tfrac{N}{kg} \cdot 2,598m \\ &= 2546,1J \end{aligned}$$

Instant 2 : tout juste avant que la poutre touche le sol

À ce moment la hauteur du centre masse sera nulle et l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2} I\omega'^2 + mgy \\ &= \frac{1}{2} I\omega'^2 + 0J \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

Selon le principe de conservation, on a

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 2546,1J &= \frac{1}{2} I\omega'^2 \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, on doit trouver le moment d'inertie de la poutre quand l'axe de rotation n'est pas au centre de masse. On a alors

$$\begin{aligned} I &= I_{cm} + mh^2 \\ &= \frac{1}{12} mL^2 + mh^2 \\ &= \frac{1}{12} 100kg \cdot (6m)^2 + 100kg \cdot (3m)^2 \\ &= 1200\ kgm^2 \end{aligned}$$

L'équation de la conservation de l'énergie mécanique devient donc

$$2546,1J = \frac{1}{2} I\omega'^2$$

$$2546,1J = \frac{1}{2} 1200\ kgm^2 \cdot \omega'^2$$

$$\omega' = 2,06 \tfrac{rad}{s}$$

La vitesse du bout de la poutre est donc

$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ &= 2,06 \tfrac{rad}{s} \cdot 6m \\ &= 12,36 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

22. Comme il y a un seul objet qui tourne autour de son centre de masse tout en se déplaçant, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2} mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + mgy$$

Comme la balle est une sphère et qu'elle roule sans glisser, on a

$$E_{mec} = \frac{1}{2} mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + mgy$$

$$E_{mec} = \frac{1}{2} mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} mr^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{r}\right)^2 + mgy$$

$$E_{mec} = \frac{1}{2} mv_{cm}^2 + \frac{1}{5} mv_{cm}^2 + mgy$$

$$E_{mec} = \frac{7}{10} mv_{cm}^2 + mgy$$

<u>*Instant 1 : boule à la position montrée sur la figure*</u>

À ce moment la boule ne se déplace pas et donc $v_{cm} = 0$. Il ne reste qu'à trouver la hauteur du centre de masse. La ressemblance avec le mouvement d'un pendule nous permet de trouver la hauteur avec la formule

$$y = R(1-\cos\theta) = 1m(1-\cos 45°) = 0,2929m$$

(Le $y = 0$ est donc à la hauteur du centre de la balle quand elle est au fond du bol.)

L'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{7}{10} m v_{cm}^2 + mgy \\ &= 0J + 0,8kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 0,2929m \\ &= 2,296J \end{aligned}$$

<u>*Instant 2 : balle au point le plus bas*</u>

À ce moment la hauteur du centre masse sera nulle et l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{7}{10} m v_{cm}'^2 + mgy' \\ &= \frac{7}{10} m v_{cm}'^2 + 0J \end{aligned}$$

<u>*Conservation de l'énergie mécanique*</u>

Selon le principe de conservation, on a

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 2,296J &= \frac{7}{10} m v_{cm}'^2 \\ 2,296J &= \frac{7}{10} 0,8kg \cdot v_{cm}'^2 \\ v_{cm}' &= 2,025\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

23. Comme il y a un seul objet qui tourne autour de son centre de masse tout en se déplaçant, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mgy$$

Comme le billot est un cylindre qui roule sans glisser, on a

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mgy$$
$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{r}\right)^2 + mgy$$
$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{4}mv_{cm}^2 + mgy$$
$$E_{mec} = \frac{3}{4}mv_{cm}^2 + mgy$$

<u>Instant 1 : pitoune en haut de la pente</u>

À ce moment le billot se déplace à v_{cm} = 5 m/s.

La hauteur du centre de masse, à 400 m en haut d'une pente inclinée à 40 °, est

$$y = 400m\sin 40° = 257,1m$$

(Le y = 0 est donc au bas de la pente.)

L'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{4}mv_{cm}^2 + mgy \\ &= \frac{3}{4}4000kg\cdot\left(5\tfrac{m}{s}\right)^2 + 4000kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 257,1m \\ &= 75\,000J + 1,008\times10^7 J \\ &= 1,01539\times10^7 J \end{aligned}$$

<u>Instant 2 : pitoune au bas de la pente</u>

À ce moment la hauteur du centre masse sera nulle et l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{3}{4} m v_{cm}'^2 + mgy' \\ &= \frac{3}{4} m v_{cm}'^2 + 0J \end{aligned}$$

<u>*Conservation de l'énergie mécanique*</u>

Selon le principe de conservation, on a

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 1{,}01539 \times 10^7 J &= \frac{3}{4} m v_{cm}'^2 \\ 1{,}01539 \times 10^7 J &= \frac{3}{4} 4000kg \cdot v_{cm}'^2 \\ v_{cm}' &= 58{,}18 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

24. Il y a deux objets ici. Une masse qui se déplace en ligne droite et une poulie qui tourne autour de son centre de masse sans se déplacer. L'énergie mécanique est donc

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m_1 v_{1cm}^2 + m_1 g y_1 + \frac{1}{2} I_{2cm} \omega_2^2 + m_2 g y_2$$

On va tout de suite placer le $y = 0$ de la poulie sur l'axe de rotation de la poulie, ce qui élimine le dernier terme.

Comme la corde doit avoir la même vitesse que le bloc de 5 kg, le bord de la poulie doit avoir la même vitesse que le bloc de 5 kg. Donc

$$\omega_2 = \frac{v_{1cm}}{r_2}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2} m_1 v_{1cm}^2 + m_1 g y_1 + \frac{1}{2} I_{2cm} \omega_2^2 \\ E_{mec} &= \frac{1}{2} m_1 v_{1cm}^2 + m_1 g y_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_2 r_2^2 \right) \left(\frac{v_{1cm}}{r_2} \right)^2 \\ E_{mec} &= \frac{1}{2} m_1 v_{1cm}^2 + m_1 g y_1 + \frac{1}{4} m_2 v_{1cm}^2 \end{aligned}$$

Instant 1 : bloc immobile

À ce moment, le bloc ne se déplace pas et donc $v_{1cm} = 0$. On va ensuite choisir le $y = 0$ pour le bloc. On va le placer à la position initiale du bloc. L'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1 v_{1cm}^2 + m_1 g y_1 + \frac{1}{4}m_2 v_{1cm}^2 \\ &= 0J + 0J + 0J \end{aligned}$$

Instant 2 : bloc 8 m plus bas

À ce moment le bloc est 8 m plus bas, et il est donc à $y = -8$ m. L'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}m_1 v_{1cm}'^2 + m_1 g y_1' + \frac{1}{4}m_2 v_{1cm}'^2 \\ &= \frac{1}{2}5kg \cdot v_{1cm}'^2 + 5kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot (-8m) + \frac{1}{4}10kg \cdot v_{1cm}'^2 \\ &= 5kg \cdot v_{1cm}^2 + -392J \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

Selon le principe de conservation, on a

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 0J &= 5kg \cdot v_{1cm}'^2 + -392J \\ v_{1cm} &= 8,854\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

25. Comme il y a un seul objet qui tourne autour d'un axe sans se déplacer, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy$$

Instant 1 : objet dans sa position montrée sur la figure.

À ce moment la tige ne tourne pas, et donc $\omega = 0$. On va choisir un $y = 0$ qui longe la tige dans cette position, ce qui fait que le centre de masse est $y = 0$ m initialement. L'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I\omega^2 + mgy \\ &= 0J \end{aligned}$$

Instant 2 : tige verticale

À ce moment, l'énergie mécanique est

$$E' = \frac{1}{2} I\omega'^2 + mgy'$$

Il y a deux éléments qu'on doit trouver alors : le moment d'inertie de cette tige et la hauteur du centre de masse.

Cet objet est formé d'une tige et d'un disque. Dans les deux cas, l'axe de rotation n'est pas au centre de masse. On a donc

$$\begin{aligned} I_{tige} &= I_{cm\,tige} + mh^2 \\ &= \frac{1}{12} mL^2 + mh^2 \\ &= \frac{1}{12} 0,25kg\left(0,8m\right)^2 + 0,25kg\left(0,4m\right)^2 \\ &= 0,05333kgm^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{disque} &= I_{cm\,disque} + mh^2 \\ &= \frac{1}{2} mr^2 + mh^2 \\ &= \frac{1}{2} 0,6kg\left(0,2m\right)^2 + 0,6kg\left(1m\right)^2 \\ &= 0,612kgm^2 \end{aligned}$$

Le moment d'inertie totale est donc de 0,66533 kgm².

Pour la hauteur du centre de masse quand la tige est verticale, on remplace la tige par une masse ponctuelle au centre de masse de la tige et le disque par une masse ponctuelle au centre du disque. Avec un $y = 0$ à l'axe de rotation, la position du centre de masse est

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{-0,4m \cdot 0,25kg + -1m \cdot 0,6kg}{0,25kg + 0,6kg} \\ &= -0,8235m \end{aligned}$$

L'énergie mécanique est donc

$$E' = \frac{1}{2} 0,66533kgm^2 \cdot \omega^2 + 0,85kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot (-0,8235m)$$
$$E' = 0,33267kgm^2 \cdot \omega^2 + -6,86J$$

Conservation de l'énergie mécanique

Selon le principe de conservation, on a

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 0J &= 0,33267kgm^2 \cdot \omega'^2 + -6,86J \\ \omega' &= 4,541\tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

26. Il y a quatre objets ici. Deux masses qui se déplacent en ligne droite, une poulie qui tourne autour de son centre de masse sans se déplacer et un ressort. L'énergie mécanique est donc

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m_1 v_{1cm}^2 + m_1 g y_1 + \frac{1}{2} m_2 v_{2cm}^2 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} I_{3cm} \omega_3^2 + m_3 g y_3 + \frac{1}{2} k x^2$$

On va tout de suite placer le $y = 0$ de la poulie sur l'axe de rotation de la poulie, ce qui élimine l'avant-dernier terme.

Comme les deux blocs sont reliés par une corde, ils doivent avoir la même vitesse. On va appeler cette vitesse v. Cela signifie que

$$v_{1cm} = v_{2cm} = v$$

L'énergie mécanique est maintenant

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1v^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}I_{3cm}\omega_3^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Comme la corde doit avoir la même vitesse que les blocs, cela signifie que la tour de la poulie a la même vitesse que les blocs. On doit donc avoir

$$\omega_3 = \frac{v}{r_3}$$

On a donc

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1v^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_3r_3^2\right)\left(\frac{v}{r_3}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1v^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{4}m_3v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

<u>Instant 1 : bloc de 36 kg à son plus haut</u>

À ce moment, les blocs ne se déplacent pas et donc $v = 0$. On va ensuite choisir le $y = 0$ de chaque bloc à la position initiale de chacun des blocs. Finalement, le ressort n'est pas étiré, ce qui signifie que $x = 0$. L'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1v^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{4}m_3v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J \end{aligned}$$

<u>Instant 2 : bloc de 36 kg 1 m plus bas</u>

À ce moment le bloc 2 est 1 m plus bas, alors que le bloc 1 est resté à son $y = 0$ m. Le ressort est maintenant étiré de 1 m. On a donc

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}m_1v_{1cm}'^2 + m_1gy_1' + \frac{1}{2}m_2v_{1cm}'^2 + m_2gy_2' + \frac{1}{4}m_3v_{1cm}'^2 + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}12kg \cdot v'^2 + 0J + \frac{1}{2}36kg \cdot v'^2 + 36kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot (-1m) + \frac{1}{4}20kg \cdot v'^2 + \frac{1}{2}200\tfrac{N}{m}(1m)^2 \\ &= 29kg \cdot v'^2 + -252,8J \end{aligned}$$

<u>Conservation de l'énergie mécanique</u>

Selon le principe de conservation, on a

$$
\begin{aligned}
E &= E' \\
0J &= 29kg \cdot v'^2 + -252,8J \\
v' &= 2,952 \tfrac{m}{s}
\end{aligned}
$$

27. En prenant le sens des aiguilles d'une montre comme sens positif, le moment de force net est

$$
\begin{aligned}
\tau_{net} &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\
&= -30N \cdot 2m \cdot \sin 135° + 25N \cdot 0m + 10N \cdot 2m \cdot \sin 160° \\
&= -35,586Nm
\end{aligned}
$$

28. En prenant le sens des aiguilles d'une montre comme sens positif, le moment de force net est

$$
\begin{aligned}
\tau_{net} &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\
&= -12N \cdot 0,15m \cdot \sin 90° + 10N \cdot 0,35m \sin 90° + 9N \cdot 0,25m \cdot \sin 90° \\
&= 4,85Nm
\end{aligned}
$$

29. En prenant le sens des aiguilles d'une montre comme sens positif, le moment de force fait par la force de 160 N

$$
\begin{aligned}
\tau_{net} &= Fr_{\perp} \\
&= -160N \cdot 0,165m \\
&= -26,4Nm
\end{aligned}
$$

30. On trouve l'accélération angulaire avec

$$\tau_{net} = I\alpha$$

Trouvons premièrement le moment d'inertie de la tige. La tige tourne autour d'un axe qui n'est pas au centre de masse. Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I &= I_{cm} + mh^2 \\ &= \frac{1}{12} mL^2 + mh^2 \\ &= \frac{1}{12} 100kg \cdot (6m)^2 + 100kg \cdot (3m)^2 \\ &= 1200kgm^2 \end{aligned}$$

Une fois que la corde a cassé, seule la gravitation fait un moment de force qui n'est pas nulle. Avec un sens positif dans le sens des aiguilles d'une montre, le moment de force net est

$$\begin{aligned} \tau &= Fr\sin\theta \\ &= 980N \cdot 3m \cdot \sin 30° \\ &= 1470Nm \end{aligned}$$

Ainsi, l'accélération angulaire est

$$\begin{aligned} \tau_{net} &= I\alpha \\ 1470Nm &= 1200kgm^2 \cdot \alpha \\ \alpha &= 1,225 \tfrac{rad}{s^2} \end{aligned}$$

31. a) On trouve l'accélération angulaire avec

$$\tau_{net} = I\alpha$$

Avec un sens positif dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, le moment de force net est

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_1 + \tau_2 \\ &= -100N \cdot 0,3m \cdot \sin 90° + 120N \cdot 0,3m \cdot \sin 90° \\ &= 6Nm \end{aligned}$$

Ainsi, l'accélération est

$$\begin{aligned} \tau_{net} &= I\alpha \\ 6Nm &= 0,5kgm^2 \cdot \alpha \\ \alpha &= 12 \tfrac{rad}{s^2} \end{aligned}$$

b) La vitesse de la poulie sera

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ &= \tfrac{50}{3}\pi \tfrac{rad}{s} + 12 \tfrac{rad}{s^2} \cdot 10s \\ &= 172,36 \tfrac{rad}{2} \\ &= 1646 \tfrac{tours}{\min}\end{aligned}$$

32. À l'équilibre, il n'y a pas d'accélération angulaire et on a

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= I\alpha \\ \tau_{net} &= 0\end{aligned}$$

Avec un sens positif dans le sens des aiguilles d'une montre, le moment de force net est

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_1 + \tau_2 \\ &= \left(120kg \cdot 9,8 \tfrac{N}{kg}\right) \cdot 1m \cdot \sin 90° - F_R \cdot 0,5m \cdot \sin 90° \\ &= 1176Nm - F_R \cdot 0,5m\end{aligned}$$

Puisque le moment de force net doit être nul, on a

$$\begin{aligned}0 &= 1176Nm - F_R \cdot 0,5m \\ F_R &= 2352N\end{aligned}$$

L'étirement du ressort est donc

$$\begin{aligned}F_R &= kx \\ 2352N &= 1000 \tfrac{N}{m} \cdot x \\ x &= 2,352m\end{aligned}$$

33. On trouve l'accélération angulaire avec

$$\tau_{net} = I\alpha$$

Les seules forces qui s'appliquent sur la meule ailleurs qu'au centre de la meule sont la normale et la friction (toutes deux faites par la hache), qui s'applique sur la circonférence de la meule. La normale a une grandeur de 160 N et la friction a une grandeur de 96 N (0,6 x 160 N).

Avec un sens positif dans le sens de rotation de la meule, le moment de force net est

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_1 + \tau_2 \\ &= 160N \cdot 0,35m \cdot \sin 0° - 96N \cdot 0,35m \cdot \sin 90° \\ &= -33,6Nm\end{aligned}$$

Ainsi, l'accélération angulaire est

$$\begin{gathered}\tau_{net} = I\alpha \\ \tau_{net} = \frac{1}{2}mr^2\alpha \\ -33,6Nm = \frac{1}{2}50kg \cdot (0,35m)^2 \cdot \alpha \\ \alpha = -10,97\,\tfrac{rad}{s^2}\end{gathered}$$

La vitesse angulaire de la poulie sera de 10 rad/s au bout de

$$\begin{gathered}\omega = \omega_0 + \alpha t \\ 10\,\tfrac{rad}{s} = 30\,\tfrac{rad}{s} + -10,97\,\tfrac{rad}{s^2} \cdot t \\ t = 1,823s\end{gathered}$$

34. Pendant que la vitesse de la roue augmente, il y a la force appliquée (qui fait un moment de force qu'on va appeler τ_{ext}) et la friction qui s'appliquent sur la roue. On a donc

$$\begin{gathered}\tau_{net} = I\alpha \\ \tau_{ext} + \tau_f = I\alpha\end{gathered}$$

Pour l'instant, on ne peut pas faire grand-chose avec cette équation parce qu'il y a deux inconnus (les deux moments de force).

Suit ensuite la phase de ralentissement de la roue pendant laquelle seule la friction s'applique.

$$\begin{gathered}\tau_{net} = I\alpha \\ \tau_f = I\alpha\end{gathered}$$

Avec cette dernière équation, on pourra connaitre le moment de force fait par la friction. Avec un sens positif allant dans le sens de la rotation de la roue, on trouve que l'accélération pendant la phase de ralentissement est

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$0\tfrac{rad}{s} = 30\tfrac{rad}{s} + \alpha \cdot 120s$$
$$\alpha = -0,25\tfrac{rad}{s}$$

Le moment de force fait par la friction est donc

$$\begin{aligned}\tau_f &= I\alpha \\ &= 0,5kgm^2 \cdot -0,25\tfrac{rad}{s^2} \\ &= -0,125Nm\end{aligned}$$

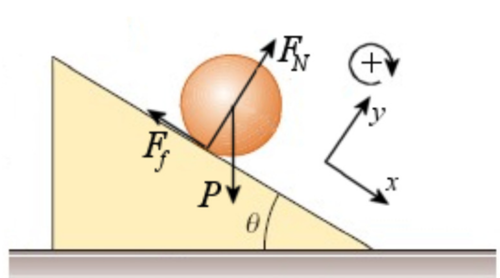
On peut alors retourner à la première phase du mouvement. Pendant cette phase, l'accélération est

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$30\tfrac{rad}{s} = 0\tfrac{rad}{s} + \alpha \cdot 10s$$
$$\alpha = 3\tfrac{rad}{s}$$

On a donc

$$\tau_{ext} + \tau_f = I\alpha$$
$$\tau_{ext} + -0,125Nm = 0,5kgm^2 \cdot 3\tfrac{rad}{s^2}$$
$$\tau_{ext} = 1,625Nm$$

35. a) Les forces sur la pitoune sont : le poids, la normale et la friction.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/solid-spherein-figure-calculate-translational-speed-center-ofmass-magnitude-translational--q420655

Comme la pitoune fait un mouvement de translation et un mouvement de rotation, on doit faire la somme des forces et la somme des moments de force. De plus, comme l'axe n'est pas fixe dans ce cas, on doit obligatoirement prendre le centre de masse de l'objet comme axe de rotation. On a donc

$$\sum F_x = mg\cos-(90°-\theta) - F_f = ma$$
$$\sum F_y = mg\sin-(90°-\theta) + F_N = 0$$
$$\sum \tau = \cancel{mg \times 0} + \cancel{F_N R \sin 0°} + F_f R \sin 90° = I\alpha$$

Dans cette dernière équation, la distance est nulle pour le moment de force fait par la force de gravitation, car la force s'applique au centre de masse et l'axe de rotation est aussi au centre de masse. L'angle est nul pour le moment de force fait par la normale, car la force est dirigée exactement vers le centre de masse ce qui fait que l'angle est nul entre la distance et la force. (On peut aussi voir que dans ce cas, le bras de levier est nul quand la force est dirigée vers l'axe de rotation.) On voit alors que le seul moment de force qui reste est le moment de force fait par la force de friction. C'est cette seule force qui est responsable de la rotation de la pitoune. Si on enlève la friction, la pitoune va simplement glisser sans tourner.

En utilisant la condition de roulement $a_{cm} = \alpha R$ et le moment d'inertie d'un cylindre, la somme des moments de force devient

$$F_f R \sin 90° = I\alpha$$
$$F_f R = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right)$$
$$F_f = \frac{1}{2}ma$$

C'est la force de friction qu'on doit avoir pour que la pitoune roule sans glisser.

On peut ensuite trouver l'accélération en utilisant la somme des forces en x.

$$mg\cos-(90°-\theta)-F_f=ma$$
$$\cancel{m}g\cos(90°-\theta)-\frac{1}{2}\cancel{m}a=\cancel{m}a$$
$$g\cos(90°-\theta)=a+\frac{1}{2}a$$
$$g\sin\theta=\frac{3}{2}a$$
$$a=\frac{2}{3}g\sin\theta$$
$$a=4,2\tfrac{m}{s^2}$$

b) La force de friction sur la pitoune est

$$F_f=\frac{1}{2}ma$$
$$F_f=\frac{1}{2}m\frac{2}{3}g\sin\theta$$
$$F_f=\frac{1}{3}mg\sin\theta$$

Comme c'est de la friction statique, cette force doit être inférieure au maximum de la friction statique. On doit donc avoir

$$\frac{1}{3}mg\sin\theta\leq\mu_sF_N$$

Selon la somme des forces en y, la normale est

$$mg\sin-(90°-\theta)+F_N=0$$
$$F_N=-mg\sin-\left(90°-\theta\right)$$
$$F_N=mg\sin\left(90°-\theta\right)$$
$$F_N=mg\cos\theta$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{3}\cancel{mg}\sin\theta\leq\mu_s\cancel{mg}\cos\theta$$
$$\mu_s\geq\frac{1}{3}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\mu_s\geq\frac{1}{3}\tan\theta$$

Le coefficient de friction minimum est donc

$$\begin{aligned}\mu_{s\,\min} &= \frac{1}{3}\tan\theta \\ &= 0,2797\end{aligned}$$

36. Comme le bloc se déplace et ne tourne pas, on doit faire uniquement la somme des forces sur l'objet. Les forces sur l'objet sont le poids, la normale et la tension de la corde. Avec un axe des x vers le bas de la pente, on a

$$\begin{aligned}&\sum F_x = m_1 a_x \\ &\qquad \to 49N\cos(-60°) - T = m_1 a_x \\ &\sum F_y = m_1 a_y \\ &\qquad \to 49N\sin(-60°) + F_N = 0\end{aligned}$$

(En fait, l'équation des forces en y sera inutile ici, elle ne permet que de trouver la normale et il n'est pas nécessaire de la connaitre ici.)

Le cylindre tourne et ne se déplace pas. Dans ce cas, on ne fait que la somme des moments de force. Les forces sur le cylindre sont le poids, la normale faite par l'essieu et la tension de la corde. Comme le poids et la normale s'appliquent à l'axe de rotation, ces deux forces ne font pas de moments de force. Il ne reste donc que la tension de la corde qui fait un moment de force. Avec une direction positive dans le sens des aiguilles d'une montre, on a

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= I\alpha \\ Tr\sin 90° &= I\alpha\end{aligned}$$

Le bord du cylindre doit avoir la même accélération que la corde, qui elle doit avoir la même accélération que le bloc. On a donc

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

En utilisant le moment d'inertie du cylindre, l'équation des moments de force du cylindre devient

$$Tr = I\alpha$$
$$Tr = \frac{1}{2}m_2 r^2 \frac{a}{r}$$
$$T = \frac{1}{2}m_2 a$$

Nos deux équations sont donc

$$49N\cos(-60°) - T = m_1 a \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2}m_2 a$$

En utilisant la deuxième équation dans la première équation, on a

$$49N\cos(-60°) - \frac{1}{2}m_2 a = m_1 a$$
$$m_1 a + \frac{1}{2}m_2 a = 49N\cos(-60°)$$
$$\left(m_1 + \frac{1}{2}m_2\right)a = 49N\cos(-60°)$$
$$\left(5kg + \frac{1}{2}10kg\right)a = 49N\cos(-60°)$$
$$a = 2,45\tfrac{m}{s^2}$$

37. Comme le bloc se déplace et ne tourne pas, on doit faire uniquement la somme des forces sur l'objet. Les forces sur l'objet sont le poids et la tension de la corde. Avec un axe des y vers le haut, on a

$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow -49N + T = 5kg \cdot a$$

La poulie tourne et ne se déplace pas. Dans ce cas, on ne fait que la somme des moments de forces. Les forces sur le cylindre sont le poids, la normale faite par l'essieu et les tensions des cordes. Comme le poids et la normale s'appliquent à l'axe de rotation, ces deux forces ne font pas de moments de force. Il ne reste donc que les tensions des cordes qui font des moments de force. Avec une direction positive dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, on a

$$\tau_{net} = I\alpha$$
$$-T \cdot 0,5m \cdot \sin 90° + 200N \cdot 0,25m \cdot \sin 90° = 8kgm^2 \cdot \alpha$$
$$-T \cdot 0,5m + 200N \cdot 0,25m = 8kgm^2 \cdot \alpha$$

Comme la corde reliée au bloc est enroulée à 50 cm de l'axe de la poulie, l'accélération tangentielle de la poulie à 50 cm de l'axe doit être la même que celle du bloc. On a donc

$$\alpha = \frac{a}{0,5m}$$

L'équation des moments de force du cylindre devient

$$-T \cdot 0,5m + 200N \cdot 0,25m = 8kgm^2 \cdot \alpha$$
$$-T \cdot 0,5m + 200N \cdot 0,25m = 8kgm^2 \cdot \frac{a}{0,5m}$$
$$-T \cdot 0,5m + 50Nm = 16kgm \cdot a$$

Nos deux équations sont donc

$$-49N + T = 5kg \cdot a \qquad \text{et} \qquad -T \cdot 0,5m + 50Nm = 16kgm \cdot a$$

En utilisant la première équation dans la deuxième équation, on a

$$-\left(5kg \cdot a + 49N\right) \cdot 0,5m + 50Nm = 16kgm \cdot a$$
$$-2,5kgm \cdot a - 24,5Nm + 50Nm = 16kgm \cdot a$$
$$25,5Nm = 18,5kgm \cdot a$$
$$a = 1,378 \tfrac{m}{s^2}$$

38. Comme le bloc de 20 kg se déplace et ne tourne pas, on doit faire uniquement la somme des forces sur l'objet. Les forces sur l'objet sont le poids et la tension de la corde. Avec un axe des y vers le haut, on a

$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow -196N + T_1 = 20kg \cdot a_1$$

Comme le bloc de 30 kg se déplace et ne tourne pas, on doit faire uniquement la somme des forces sur l'objet. Les forces sur l'objet sont le poids et la tension de la corde. Avec un axe des y vers le bas, on a

$$\sum F_y = ma_y$$
$$\rightarrow 294N - T_2 = 30kg \cdot a_2$$

La poulie tourne et ne se déplace pas. Dans ce cas, on ne fait que la somme des moments de forces. Les forces sur le cylindre sont le poids, la normale faite par l'essieu et les tensions des cordes. Comme le poids et la normale s'appliquent à l'axe de rotation, ces deux forces ne font pas de moments de force. Il ne reste donc que les tensions des cordes qui font des moments de force. Avec une direction positive dans le sens des aiguilles d'une montre, on a

$$\tau_{net} = I\alpha$$
$$-T_1 \cdot 0,25m \cdot \sin 90° + T_2 \cdot 0,5m \cdot \sin 90° = 8kgm^2 \cdot \alpha$$
$$-T_1 \cdot 0,25m + T_2 \cdot 0,5m = 8kgm^2 \cdot \alpha$$

Comme la corde reliée au bloc de 20 kg est enroulée à 25 cm de l'axe de la poulie, l'accélération tangentielle de la poulie à 25 cm de l'axe doit être la même que celle du bloc de 20 kg. On a donc

$$\alpha = \frac{a_1}{0,25m}$$

L'équation des forces sur le bloc de 20 kg devient donc

$$-196N + T_1 = 20kg \cdot a_1$$
$$-196N + T_1 = 20kg \cdot \alpha \cdot 0,25m$$
$$-196N + T_1 = 5kgm \cdot \alpha$$

Comme la corde reliée au bloc de 30 kg est enroulée à 50 cm de l'axe de la poulie, l'accélération tangentielle de la poulie à 50 cm de l'axe doit être la même que celle du bloc de 30 kg. On a donc

$$\alpha = \frac{a_2}{0,5m}$$

L'équation des forces sur le bloc de 30 kg devient donc

$$294N - T_2 = 30kg \cdot a_2$$
$$294N - T_2 = 30kg \cdot \alpha \cdot 0,5m$$
$$294N - T_2 = 15kgm \cdot \alpha$$

Nous avons alors 3 équations.

$$-196N + T_1 = 5kgm \cdot \alpha$$
$$294N - T_2 = 15kgm \cdot \alpha$$
$$-T_1 \cdot 0,25m + T_2 \cdot 0,5m = 8kgm^2 \cdot \alpha$$

En isolant les tensions dans les deux premières équations pour les remplacer dans la troisième équation, on obtient

$$-T_1 \cdot 0,25m + T_2 \cdot 0,5m = 8kgm^2 \cdot \alpha$$
$$-\left(5kgm \cdot \alpha + 196N\right) \cdot 0,25m + \left(294N - 15kgm \cdot \alpha\right) \cdot 0,5m = 8kgm^2 \cdot \alpha$$
$$-1,25kgm^2 \cdot \alpha - 49Nm + 147Nm - 7,5kgm^2 \cdot \alpha = 8kgm^2 \cdot \alpha$$
$$98Nm = 16,75kgm^2 \cdot \alpha$$
$$\alpha = 5,851 \tfrac{rad}{s^2}$$

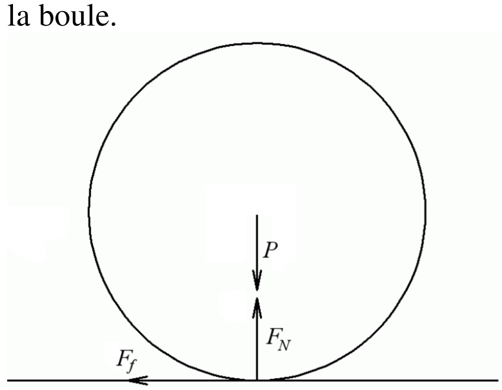
Ainsi, les accélérations sont

$$\alpha = \frac{a_1}{0,25m}$$
$$5,851 \tfrac{rad}{s^2} = \frac{a_1}{0,25m}$$
$$a_1 = 1,463 \tfrac{m}{s^2}$$

et

$$\alpha = \frac{a_2}{0,5m}$$
$$5,851 \tfrac{rad}{s^2} = \frac{a_2}{0,5m}$$
$$a_2 = 2,925 \tfrac{m}{s^2}$$

39. a) Voici les forces sur la boule.



Seule la friction fait un moment de force sur la boule. On a donc

$$\tau_{net} = I\alpha$$
$$F_f R = \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\alpha$$
$$\mu_c F_N R = \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\alpha$$
$$\mu_c mgR = \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\alpha$$
$$\alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}$$

La friction fait aussi ralentir la boule. On a donc

$$-F_f = ma$$
$$-\mu_c F_N = ma$$
$$-\mu_c mg = ma$$
$$a = -\mu_c g$$

Ainsi, la vitesse de rotation en fonction du temps est

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\omega = 0 + \frac{5\mu_c g}{2R}t$$
$$\omega = \frac{5\mu_c g}{2R}t$$

et la vitesse de la boule en fonction du temps est

$$v = v_0 + at$$
$$v = v_0 - \mu_c gt$$

Quand la boule roule sans glisser, on doit avoir

$$v = \omega R$$

Trouvons quand cette condition sera respectée. On a alors

$$v = \omega R$$
$$v_0 - \mu_c g t = \frac{5\mu_c g}{2R} t R$$
$$v_0 - \mu_c g t = \frac{5\mu_c g}{2} t$$
$$v_0 = \frac{5\mu_c g}{2} t + \mu_c g t$$
$$v_0 = \left(\frac{5\mu_c g}{2} + \mu_c g \right) t$$
$$v_0 = \frac{7\mu_c g}{2} t$$
$$t = \frac{2}{7\mu_c g} v_0$$

À ce moment, la vitesse de la boule sera

$$v = v_0 - \mu_c g t$$
$$v = v_0 - \mu_c g \frac{2}{7\mu_c g} v_0$$
$$= v_0 - \frac{2}{7} v_0$$
$$= \left(1 - \frac{2}{7} \right) v_0$$
$$= \frac{5}{7} v_0$$
$$= \frac{5}{7} 3,5 \tfrac{m}{s}$$
$$= 2,5 \tfrac{m}{s}$$

40. a) Trouvons premièrement l'accélération angulaire de la sphère.

$$\tau_{net} = I\alpha$$
$$0,45Nm = \left(\frac{2}{5} m r^2 \right) \alpha$$
$$0,45Nm = \left(\frac{2}{5} 10kg \cdot (0,20m)^2 \right) \alpha$$
$$\alpha = 2,8125 \tfrac{rad}{s^2}$$

Elle tourne donc de

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} 2{,}8125 \tfrac{rad}{s^2} (10s)^2 \\ &= 140{,}625 rad\end{aligned}$$

b) Le travail fait par le moment de force est

$$\begin{aligned}W &= \tau\Delta\theta \\ &= 0{,}45 Nm \cdot 140{,}625 rad \\ &= 63{,}28 J\end{aligned}$$

c) On peut trouver la vitesse angulaire avec le théorème de l'énergie cinétique.

$$W = \Delta E_k$$
$$W = \frac{1}{2} I\omega'^2 - \frac{1}{2} I\omega^2$$

Avec une vitesse angulaire initiale nulle, il ne reste que

$$W = \frac{1}{2} I\omega'^2$$
$$W = \frac{1}{2}\frac{2}{5} mr^2\omega'^2$$
$$W = \frac{1}{5} mr^2\omega'^2$$
$$63{,}28 J = \frac{1}{5} 10kg \cdot (0{,}2m)^2\ \omega'^2$$
$$63{,}28 J = 0{,}08 kgm^2 \cdot \omega'^2$$
$$\omega' = 28{,}125 \tfrac{rad}{s}$$

N.B. On aurait pu aussi utiliser l'accélération angulaire pour obtenir

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ &= 0 \tfrac{rad}{s} + 2{,}8125 \tfrac{rad}{s^2} \cdot 10s \\ &= 28{,}125 \tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

41. On peut trouver le travail avec le théorème de l'énergie cinétique.

$$W = \Delta E_k$$
$$W = \frac{1}{2}I\omega'^2 - \frac{1}{2}I\omega^2$$

Avec une vitesse initiale nulle, il ne reste que

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}I\omega'^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega'^2 \\ &= \frac{1}{5}mr^2\omega'^2 \\ &= \frac{1}{5}20kg \cdot (0,1m)^2 \cdot \left(80\pi \tfrac{rad}{s}\right)^2 \\ &= 2526,6J \end{aligned}$$

La puissance moyenne est donc

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{W}{\Delta t} \\ &= \frac{2526,6J}{30s} \\ &= 84,22W \end{aligned}$$

42. On a

$$P = \tau\omega$$
$$274 \times 746W = \tau \cdot \left(200\pi \tfrac{rad}{s}\right)$$
$$\tau = 325,32Nm$$

43. a) Le travail fait par le moteur correspond à la variation d'énergie du système.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec}$$

Ce système étant formé d'une masse qui se déplace en ligne droite et d'une poulie qui tourne, l'énergie mécanique de ce système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1 v^2 + m_1 g y + \frac{1}{2}I\omega^2$$

(Les deux premiers termes sont pour le bloc et le dernier est pour la poulie.)

La corde passant sur le tour de la poulie, le tour de la poulie doit avoir la même vitesse que le bloc. On a donc

$$v = \omega r$$

Avec la formule du moment d'inertie du disque, l'énergie mécanique devient

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1 v^2 + mgy + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1 v^2 + m_1 g y + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2 r^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1 v^2 + m_1 g y + \frac{1}{4}m_2 v^2$$

En mettant le $y = 0$ à la position initiale du bloc, l'énergie mécanique initiale est nulle puisque les vitesses sont aussi nulles au départ.

$$E = 0$$

Une fois que le bloc a monté de 4,5 m, l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}m_1 v^2 + m_1 g y + \frac{1}{4}m_2 v^2 \\ &= \frac{1}{2}5kg \cdot \left(3\tfrac{m}{s}\right)^2 + 5kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 4,5m + \frac{1}{4}10kg \cdot \left(3\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 265,5J \end{aligned}$$

Le travail est donc

$$\begin{aligned} W_{ext} &= \Delta E_{mec} \\ &= E' - E \\ &= 265,5J - 0J \\ &= 265,5J \end{aligned}$$

b) La puissance moyenne est

$$\begin{aligned}\overline{P} &= \frac{W}{\Delta t}\\ &= \frac{265,5J}{3s}\\ &= 88,5W\end{aligned}$$

c) La puissance instantanée est

$$P_{mot} = \tau_{mot}\omega$$

On trouve simplement la vitesse angulaire avec

$$\begin{aligned}v &= \omega r\\ 3\tfrac{m}{s} &= \omega \cdot 0,4m\\ \omega &= 7,5\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

Pour trouver le moment de force, on va utiliser

$$\tau_{net} = I\alpha$$

L'accélération angulaire est

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t\\ 7,5\tfrac{rad}{s} &= 0\tfrac{rad}{s} + \alpha \cdot (3s)\\ \alpha &= 2,5\tfrac{rad}{s^2}\end{aligned}$$

Cela signifie que le moment de force net est de

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= I\alpha\\ &= \frac{1}{2}mr^2\alpha\\ &= \frac{1}{2}10kg \cdot (0,4m)^2\, 2,5\tfrac{rad}{s^2}\\ &= 2Nm\end{aligned}$$

Le moment de force net est fait par deux moments de force : celui du moteur et celui fait par la tension de la corde.

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= \tau_{mot} + \tau_T \\ &= \tau_{mot} - T \cdot 0,4m \cdot \sin 90° \\ &= \tau_{mot} - T \cdot 0,4m\end{aligned}$$

(On a mis le sens positif dans le sens de rotation de la poulie.)

On peut trouver la tension avec l'équation des forces sur le bloc.

$$T - 49N = 5kg \cdot a$$

Ce bloc ayant atteint une vitesse de 3 m/s en 3 secondes, son accélération est de 1 m/s² et la tension est

$$\begin{aligned}T - 49N &= 5kg \cdot 1\tfrac{m}{s^2} \\ T &= 54N\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= \tau_{mot} - T \cdot 0,4m \\ 2Nm &= \tau_{mot} - 54N \cdot 0,4m \\ \tau_{mot} &= 23,6Nm\end{aligned}$$

La puissance est donc

$$\begin{aligned}P_{mot} &= \tau_{mot}\omega \\ &= 23,6Nm \cdot 7,5\tfrac{rad}{s} \\ &= 177W\end{aligned}$$

44. Le moment cinétique est

$$\begin{aligned}L &= I\omega \\ &= \frac{1}{12}mL^2\omega \\ &= \frac{1}{12}0,3kg\left(2m\right)^2\left(4\pi\tfrac{rad}{s}\right) \\ &= 1,2566\tfrac{kgm^2}{s}\end{aligned}$$

45. *Moment cinétique à l'instant 1*

$$\begin{aligned} L &= L_{disque\,1} + L_{disque\,2} \\ &= I_1\omega_1 + I_2\omega_2 \\ &= \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega_1 + \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega_2 \\ &= 0 + \frac{1}{2}0,5kg\cdot(0,15m)^2\, 3,5\tfrac{rad}{s} \\ &= 0,01969\tfrac{kgm^2}{s} \end{aligned}$$

(Notre sens positif est dans le sens de la rotation du disque du bas.)

Moment cinétique à l'instant 2

$$\begin{aligned} L' &= L'_{disque\,1} + L'_{disque\,2} \\ &= I_1\omega' + I_2\omega' \\ &= \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega' + \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega' \\ &= \frac{1}{2}0,1kg\cdot(0,14m)^2\,\omega' + \frac{1}{2}0,5kg\cdot(0,15m)^2\,\omega' \\ &= 0,00098kgm^2\cdot\omega' + 0,005625kgm^2\cdot\omega' \\ &= 0,006605kgm^2\cdot\omega' \end{aligned}$$

Conservation du moment cinétique

$$\begin{aligned} L &= L' \\ 0,01969\tfrac{kgm^2}{s} &= 0,006605kgm^2\cdot\omega' \\ \omega' &= 2,98\tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

46. *Moment cinétique à l'instant 1*

$$\begin{aligned} L &= L_{tige} + L_{balle} \\ &= I\omega + mvr \\ &= 0 + 0,01kg\cdot 400\tfrac{m}{s}\cdot 1m \\ &= 4\tfrac{kgm^2}{s} \end{aligned}$$

(Notre sens positif est dans le sens des aiguilles d'une montre.)

Moment cinétique à l'instant 2

$$\begin{aligned}L' &= L'_{tige} \\ &= I'\omega' \\ &= \left(\frac{1}{12}m_{tige}L^2 + m_{balle}\left(1m\right)^2\right)\omega' \\ &= \left(\frac{1}{12}0,6kg\cdot\left(4m\right)^2 + 0,01kg\cdot\left(1m\right)^2\right)\omega' \\ &= 0,81kgm^2\cdot\omega' \\ &= 0,006605kgm^2\cdot\omega'\end{aligned}$$

Conservation du moment cinétique

$$\begin{aligned}L &= L' \\ 4\tfrac{kgm^2}{s} &= 0,81kgm^2\cdot\omega' \\ \omega' &= 4,938\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

47. *Moment cinétique à l'instant 1*

$$\begin{aligned}L &= I\omega \\ &= 35kgm^2\cdot 4\pi\tfrac{rad}{s} \\ &= 140\pi\tfrac{kgm^2}{s}\end{aligned}$$

(Notre sens positif est dans le sens de la rotation de la patineuse.)

Moment cinétique à l'instant 2

$$\begin{aligned}L' &= I'\omega' \\ &= 8kgm^2\cdot\omega'\end{aligned}$$

Conservation du moment cinétique

$$\begin{aligned}L &= L' \\ 140\pi\tfrac{kgm^2}{s} &= 8kgm^2\cdot\omega' \\ \omega' &= 54,98\tfrac{rad}{s} \\ &= 8,75\tfrac{tours}{s}\end{aligned}$$

48. a) Pour trouver le moment d'inertie, il faut savoir où est le centre de masse des deux astronautes. On va prendre un axe allant de Buzz vers Allan avec un $x = 0$ à l'endroit où est Buzz. La position du centre de masse est donc

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{0 + 10m \cdot 80kg}{120kg + 80Kg} \\ &= 4m \end{aligned}$$

Cela veut dire que Buzz est à 4 m de l'axe de rotation et que Alan est à 6 m de l'axe de rotation. Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I &= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \\ &= 120kg \cdot (4m)^2 + 80kg \cdot (6m)^2 \\ &= 4800kgm^2 \end{aligned}$$

b) En tirant sur la corde, le centre de masse est resté à la même place. Comme la distance entre les deux est de 4 m, on peut dire que Buzz est à la position x et qu'Allan est à la position $x + 4$ m. On a donc

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} \\ 4m &= \frac{x \cdot 120kg + (x + 4m) \cdot 80kg}{120kg + 80Kg} \\ 800kgm &= x \cdot 120kg + (x + 4m) \cdot 80kg \\ 800kgm &= x \cdot 120kg + x \cdot 80kg + \cdot 320kgm^2 \\ 480kgm^2 &= x \cdot 200kg \\ x &= 2,4m \end{aligned}$$

Buzz est donc à $x = 2,4$ m, ce qui veut dire qu'il est à 1,6 m de l'axe de rotation (qui est au centre de masse). Quant à Allan, il est à $x = 6,4$ m, donc à 2,4 m de l'axe de rotation. Le nouveau moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I &= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \\ &= 120kg \cdot (1,6m)^2 + 80kg \cdot (2,4m)^2 \\ &= 768kgm^2 \end{aligned}$$

c) Le moment cinétique quand les astronautes sont à 10 m l'un de l'autre est de

$$\begin{aligned} L &= I\omega \\ &= 4800kgm^2 \cdot 0,8\tfrac{rad}{s} \\ &= 3840\tfrac{kgm^2}{s} \end{aligned}$$

Quand les astronautes sont à 4 m l'un de l'autre, on a

$$\begin{aligned} L' &= I'\omega' \\ &= 768kgm^2 \cdot \omega' \end{aligned}$$

Par la conservation du moment cinétique, on a

$$\begin{aligned} L &= L' \\ 3840\tfrac{kgm^2}{s} &= 768kgm^2 \cdot \omega' \\ \omega' &= 5\tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

d) La vitesse de Buzz est

$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ &= 5\tfrac{rad}{s} \cdot 1,6m \\ &= 8\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse d'Allan est

$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ &= 5\tfrac{rad}{s} \cdot 2,4m \\ &= 12\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

e) Buzz fait un mouvement circulaire et c'est la tension de la corde qui fait la force centripète. On a donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{mv^2}{r} \\ &= \frac{120kg \cdot \left(8\tfrac{m}{s}\right)^2}{1,6m} \\ &= 4800N \end{aligned}$$

N.B. On aurait pu aussi le faire avec Allan.

$$\begin{aligned} T &= \frac{mv^2}{r} \\ &= \frac{80kg \cdot \left(12\frac{m}{s}\right)^2}{2,4m} \\ &= 4800N \end{aligned}$$

f) L'énergie cinétique quand les astronautes sont à 10 m l'un de l'autre est

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2} 4800kgm^2 \cdot \left(0,8\frac{rad}{s}\right)^2 \\ &= 1536J \end{aligned}$$

Quand les astronautes sont à 4 m l'un de l'autre, l'énergie cinétique est

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2} 768kgm^2 \cdot \left(5\frac{rad}{s}\right)^2 \\ &= 9600J \end{aligned}$$

L'énergie augmente donc de 8064 J.

g) C'est Buzz en tirant sur la corde qui fait le travail. Or, puisque

$$W = \Delta E_k$$

Buzz a fait un travail de 8064 J.

49. *Moment cinétique à l'instant 1*

$$\begin{aligned} L &= I\omega \\ &= \left(I_{disque} + I_{marj}\right)\omega \\ &= \left(\frac{1}{2}m_{disque}r_{disque}^2 + m_{marj}r_{marj}^2\right)\omega \\ &= \left(\frac{1}{2}200kg\cdot(1,5m)^2 + 60kg\cdot(1,5m)^2\right)\cdot 1,3\tfrac{rad}{s} \\ &= 468\tfrac{kgm^2}{s} \end{aligned}$$

(Notre sens positif est dans le sens de la rotation de la plaque circulaire.)

Moment cinétique à l'instant 2

$$\begin{aligned} L' &= I'\omega' \\ &= \left(I_{disque} + I'_{marj}\right)\omega' \\ &= \left(\frac{1}{2}m_{disque}r_{disque}^2 + m_{marj}r_{marj}'^2\right)\omega' \\ &= \left(\frac{1}{2}200kg\cdot(1,5m)^2 + 60kg\cdot(0m)^2\right)\cdot\omega' \\ &= 225kgm^2\cdot\omega' \end{aligned}$$

Conservation du moment cinétique

$$\begin{aligned} L &= L' \\ 468\tfrac{kgm^2}{s} &= 225kgm^2\cdot\omega' \\ \omega' &= 2,08\tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

50. a) On a deux équations pour résoudre ce problème. La première est l'équation de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique de rotation et de l'énergie du ressort.

$$126J = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

La deuxième équation est l'équation de la somme des forces sur les masses. Comme le ressort fait la force centripète, on doit avoir

$$kx = m\frac{v^2}{r}$$
$$kx = m\omega^2 r$$

Premièrement, on isole la vitesse angulaire dans la formule de l'énergie.

$$126J = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$\omega^2 = \frac{252J - kx^2}{I}$$

Puisque le moment d'inertie est

$$I = \sum mr^2 = 2mr^2$$

on a

$$\omega^2 = \frac{252J - kx^2}{2mr^2}$$

En prend alors cette valeur et on la remplace dans l'équation de la force centripète

$$kx = m\omega^2 r$$
$$kx = m\frac{252J - kx^2}{2mr^2}r$$
$$kx = \frac{252J - kx^2}{2r}$$
$$2kxr = 252J - kx^2$$

Le rayon est égal à la moitié de la longueur du ressort. Puisque la longueur du ressort est égale à sa longueur initiale plus son étirement, on a

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}(L_0 + x) \\ &= \frac{1}{2}(0,1m + x) \\ &= 0,05m + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Notre équation devient donc

$$2kxr = 252J - kx^2$$
$$2kx\left(0,05m + \frac{x}{2}\right) = 252J - kx^2$$

Il ne reste qu'à isoler *x* dans cette équation.

$$kx \cdot 0,1m + kx^2 = 252J - kx^2$$
$$2kx^2 + kx \cdot 0,1m - 252J = 0$$
$$2 \cdot 1200\tfrac{N}{m} \cdot x^2 + 1200\tfrac{N}{m} \cdot x \cdot 0,1m - 252J = 0$$
$$2400\tfrac{N}{m} \cdot x^2 + 120N \cdot x - 252J = 0$$

La solution positive de cette équation quadratique est

$$x = 0,3m$$

Le ressort est donc étiré de 30 cm.

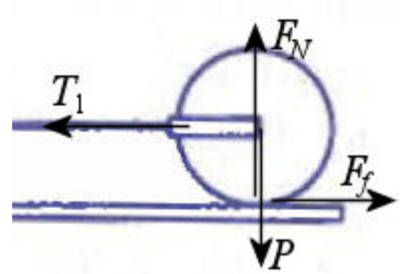
b) Si l'étirement est de 30 cm, alors la longueur totale du ressort est de 40 cm et le rayon de la trajectoire de chaque masse est de 20 cm.

On trouve alors facilement la vitesse angulaire avec

$$kx = m\omega^2 r$$
$$1200\tfrac{N}{m} \cdot 0,3m = 0,5kg \cdot \omega^2 \cdot 0,2m$$
$$\omega^2 = 3600\tfrac{rad^2}{s^2}$$
$$\omega = 60\tfrac{rad}{s}$$

51. Les forces sur le cylindre 1 sont

1. Le poids vers le bas
2. La normale vers le haut
3. La tension de la corde vers la gauche
4. La force de friction vers la droite



Avec un axe des *x* vers la gauche, la somme des forces en *x* est

$$T_1 - F_f = ma$$

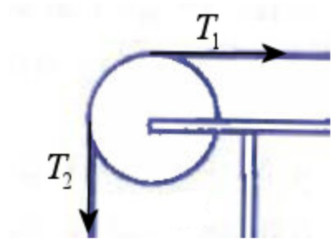
Comme ce cylindre doit aussi rouler, on doit également considérer les moments de force sur le cylindre. Comme il n'y a que la friction qui fait un moment de force, la somme des moments de forces est

$$F_f R = I\alpha$$

Le moment d'inertie est ½*mR*² et l'accélération angulaire doit être de *a/R* (condition de roulement). On a donc

$$F_f R = I\alpha$$
$$F_f R = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a}{R}$$
$$F_f = \frac{1}{2} ma$$

Le cylindre 2 ne fera que tourner. Ce sont les tensions des cordes qui feront tourner ce cylindre. La somme des moments de force (en utilisant une direction positive dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) est

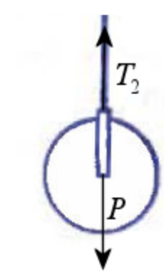


$$-T_1 R + T_2 R = I\alpha$$

Le moment d'inertie est ½*mR*² et l'accélération angulaire doit être de *a/R* (condition pour une corde sur une poulie). On a donc

$$-T_1 R + T_2 R = I\alpha$$
$$-T_1 R + T_2 R = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a}{R}$$
$$-T_1 + T_2 = \frac{1}{2} ma$$

Les forces sur le cylindre 3 sont



1- Le poids vers le bas
2- La tension vers le haut

La somme des forces en *x* (en utilisant un axe des *x* vers le bas) est

$$mg - T_2 = ma$$

Comme ce cylindre ne tournera pas, on n'a pas besoin de faire la somme des moments de force sur ce cylindre.

Nos équations sont donc

$$T_1 - F_f = ma$$
$$F_f = \frac{1}{2}ma$$
$$-T_1 + T_2 = \frac{1}{2}ma$$
$$mg - T_2 = ma$$

En prenant la valeur de la force de friction dans la 2e équation pour la remplacer dans la 1re équation, on arrive à

$$T_1 - F_f = ma$$
$$T_1 - \frac{1}{2}ma = ma$$
$$T_1 = \frac{3}{2}ma$$

Il nous reste maintenant ces 3 équations.

$$T_1 = \frac{3}{2}ma$$
$$-T_1 + T_2 = \frac{1}{2}ma$$
$$mg - T_2 = ma$$

Si on additionne ces 3 équations, on arrive à

$$T_1 + \left(-T_1 + T_2\right) + \left(mg - T_2\right) = \frac{3}{2}ma + \frac{1}{2}ma + ma$$
$$mg = 3ma$$

On peut alors trouver l'accélération

$$a = \frac{g}{3}$$

Puisqu'on doit parcourir 1,8 m avec cette accélération en partant d'une vitesse nulle, la vitesse finale est

$$2a\left(x-x_0\right)=v^2-v_0^2$$

$$2\frac{9,8\frac{m}{s^2}}{3}\cdot\left(1,8m-0m\right)=v^2-0$$

$$v^2=11,76\tfrac{m^2}{s^2}$$

$$v=3,429\tfrac{m}{s}$$

<u>*Solution alternative*</u>

L'énergie mécanique de ce système est

$$E_{mec}=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}I\omega_1^2+mgy_1+\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2+mgy_2+\frac{1}{2}mv_3^2+\frac{1}{2}I\omega_3^2+mgy_3$$

Énergie au départ

Dans la configuration initiale, les vitesses et les vitesses angulaires sont nulles. En prenant des $y = 0$ à la hauteur initiale de chaque cylindre, l'énergie mécanique est nulle.

$$E_{mec}=0$$

Énergie juste avant que le cylindre 3 frappe le sol

À ce moment, le cylindre 2 ne se déplace pas et le cylindre 3 ne tourne pas. Les cylindres 1 et 2 sont restés à leurs $y = 0$, mais le cylindre 3 est maintenant 1,8 m sous son $y = 0$. L'énergie mécanique est donc

$$E'_{mec}=\frac{1}{2}mv_1'^2+\frac{1}{2}I\omega_1'^2+\frac{1}{2}I\omega_2'^2+\frac{1}{2}mv_3'^2+mgy_3'$$

Pour le cylindre 1, le moment d'inertie est est $\frac{1}{2}mR^2$ et la vitesse angulaire doit être de v/R (condition de roulement).

Pour le cylindre 2, le moment d'inertie est $\frac{1}{2}mR^2$ et la vitesse angulaire doit être de v/R (condition pour une corde sur une poulie).

L'énergie est donc

$$\begin{aligned} E'_{mec} &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv'^2 + mgy'_3 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{4}mv'^2 + \frac{1}{4}mv'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 + mgy'_3 \\ &= \frac{3}{2}mv'^2 + mgy'_3 \end{aligned}$$

Avec la conservation de l'énergie, on arrive à

$$E_{mec} = E'_{mec}$$
$$0J = \frac{3}{2}mv'^2 + mgy'_3$$
$$\frac{3}{2}mv'^2 = -mgy'_3$$
$$v'^2 = -\frac{2}{3}gy'_3$$
$$v'^2 = -\frac{2}{3}9,8\tfrac{N}{kg}\cdot(-1,8m)$$
$$v'^2 = 11,76\tfrac{m^2}{s^2}$$
$$v' = 3,429\tfrac{m}{s}$$