L'algèbre

Développer rapidement un polynôme

Comment calculer rapidement que

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6$$

On peut voir assez facilement comment évaluer les exposants. Au premier terme, l'exposant de x est 6 alors que celui de a est nul, puis à chaque terme qui suit, l'exposant de x diminue de 1 alors que celui de a augmente de 1. Il est par contre moins évident de connaître le coefficient devant chaque terme. Il existe un merveilleux truc pour les connaître : le triangle de Pascal. Ce triangle est

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}$$

On forme ce triangle en commençant chaque ligne par 1 et en la terminant par 1. Les deux premières rangées sont donc uniquement formées de 1. Pour les nombres qui ne sont pas au début ou à la fin, on fait la somme des deux nombres exactement au-dessus. Ainsi, le deuxième nombre de la quatrième rangée vaut 1 + 2 = 3 et le troisième terme de la sixième rangée vaut 4 + 6 = 10.

On remarque alors la rangée avec 6 comme deuxième terme (la septième rangée). Les termes de cette rangée sont 1, 6, 15, 20, 15, 6 et 1. On remarque que ce sont les coefficients des termes quand on fait une puissance 6! N'est-ce pas merveilleux.

Exemple Calculez

$$(x+2)^{10}$$

On développe ce polynôme à l'aide de la 11e rangée de notre triangle. On obtient

$$\begin{aligned}
&(x+2)^{10}\\
&= x^{10} + 10x^9 2 + 45x^8 2^2 + 120x^7 2^3 + 210x^6 2^4 + 252x^5 2^5 + 210x^4 2^6 + 120x^3 2^7 + 45x^2 2^8 + 10x 2^9 + 2^{10}\\
&= x^{10} + 10x^9 2 + 45x^8 4 + 120x^7 8 + 210x^6 16 + 252x^5 32 + 210x^4 64 + 120x^3 128 + 45x^2 256 + 10x 512 + 1024\\
&= x^{10} + 20x^9 + 180x^8 + 960x^7 + 3360x^6 + 8064x^5 + 13440x^4 + 15360x^3 + 11520x^2 + 5120x + 1024
\end{aligned}$$

Exemple Si la somme de deux nombres est 1 et que leur produit est 1, quelle est la somme de leur cube?

On a alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\
&= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)
\end{aligned}$$

Puisque ab = 1 et a+b = 1 on a

$$\begin{aligned}
&(1)^3 = a^3 + b^3 + 3\times 1(1)\\
&a^3 + b^3 = -2
\end{aligned}$$

Il est très possible de trouver les valeurs de a et b en faisant la solution du système d'équations ab=1 et a+b = 1, mais on trouve des valeurs complexes qui faut ensuite mettre au cube. C'est un peu plus long

Quelques factorisations intéressantes

Voici quelques factorisations qui permettent parfois de simplifier certains problèmes

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b)\\
a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab\\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)\\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2)
\end{aligned}$$

Exemple Calculez (a/c)³ si

$$\frac{1}{a+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

Si on élimine les dénominateurs, on obtient

$$ac=c\left(a+c\right)+a\left(a+c\right)$$

Ce qui nous donne,

$$a^2+ac+c^2=0$$

On semble aller nulle part ainsi, à moins de se rendre compte qu'il s'agit d'un facteur de a^3-c^3!. On a alors

$$\left(a^2+ac+b^2\right)\left(a-c\right)=a^3-c^3=0$$

Ce qui nous amène directement à

$$\left(\frac{a}{c}\right)^3=1$$

Exemple Quelle est la somme des diviseurs de $2^{16}-1$?

Comme il s'agit d'une différence de carrées, on a

$$2^{16}-1=\left(2^8-1\right)\left(2^8+1\right)$$

Le premier terme est encore une différence de carré, ce qui nous donne

$$2^{16}-1=\left(2^4-1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)$$

Le premier terme est encore une différence de carré, ce qui nous donne

$$2^{16}-1=\left(2^2-1\right)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)$$

Le premier terme est encore une différence de carré, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}2^{16}-1&=\left(2-1\right)\left(2+1\right)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\\&=1\times3\times5\times17\times257\end{aligned}$$

qui sont tous des nombres premiers. La somme des diviseurs est donc 283

Voici quelques autres exemples de manipulations intéressantes

Exemple Trouvez la somme

$$\frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

Ceci est équivalent à

$$\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$$

Ce qui nous permet de voir plus facilement la régularité. On peut éliminer les fractions en remarquant que

$$\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\left(\sqrt{9}+\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{9}-\sqrt{8}\right)}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{9-8}=\sqrt{9}-\sqrt{8}$$

Comme ce raisonnement est valide pour tous les termes, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}\\
&=\left(\sqrt{9}-\sqrt{8}\right)+\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)\\
&=\sqrt{9}-\sqrt{3}\\
&=3-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Exemple Trouvez $x^3+\frac{1}{x^3}$ si $x+\frac{1}{x}=1$

On a

$$\begin{aligned}
1^3&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3\\
&=x^3+3x^2\frac{1}{x}+3x\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\\
&=x^3+3x+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\\
&=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\
&=x^3+\frac{1}{x^3}+3\times 1
\end{aligned}$$

On a alors

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = -2$$

On aurait pu résoudre l’équation de départ pour trouver x pour ensuite faire le calcul, mais on serait encore une fois tombé sur des nombres complexes…

Exemple Trouvez $x^6 + \frac{1}{x^6}$ si $x + \frac{1}{x} = 3$

On a

$$\begin{aligned} 3^3 &= \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 \\ &= x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= 7 \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} 7^3 &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^3 \\ &= x^6 + 3x^4 \frac{1}{x^2} + 3x^2 \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \\ &= x^6 + 3x^2 + 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6} \\ &= x^6 + \frac{1}{x^6} + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^6 + \frac{1}{x^6} + 3 \times 7 \\ x^6 + \frac{1}{x^6} &= 322 \end{aligned}$$

On aurait pu résoudre l’équation de départ pour trouver x pour ensuite faire le calcul, mais on serait encore une fois tombé sur des nombres complexes…

Exemple Trouvez a^4+b^4 si $a+b=1$ et $a^2+b^2=2$

On a

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab\\ 1^2 &= 2+2ab\\ ab &= -1/2\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}\left(a^2+b^2\right)^2 &= a^4+b^4+2a^2b^2\\ 2^2 &= a^4+b^4+2(-1/2)^2\\ 4 &= a^4+b^4+1/2\\ a^4+b^4 &= 7/2\end{aligned}$$

On aurait pu résoudre l'équation de départ pour trouver x pour ensuite faire le calcul, mais on serait encore une fois tombé sur des nombres complexes…

EXERCICES

1. Trouver 1/A + 1/B si A+B = 6 et AB = 3

2. Trouvez $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ si $x+\dfrac{1}{x}=2$

3. Trouvez $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ si $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$