Les nombres complexes

L'origine des nombres complexes

Les nombres complexes ont été utilisés longtemps avant d'être clairement définis. Lors de la résolution de certains problèmes, on avait à effectuer certains calculs intermédiaires dans lesquels on retrouvait des équations n'ayant pas de solution réelle, même si on savait que la réponse finale du problème était réelle. Par exemple, on pouvait retrouver des équations telles que

$$x^2 = -3$$

et

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

qui n'ont aucune solution réelle.

Le premier à utiliser les nombres complexes pour résoudre de tels calculs fut Girolamo Cardano (Italie 1501-1576) en 1545. Il dut avoir recours aux nombres complexes comme intermédiaires pour résoudre les équations du troisième degré. Les nombres complexes n'étaient alors employés que durant quelques étapes du calcul, mais n'apparaissaient jamais dans les solutions finales. On ne considérait pas alors les nombres complexes comme un véritable objet mathématique, mais plutôt comme un truc mathématique pour résoudre des équations. De plus, les quelques paradoxes qu'on obtenait alors avec ces nombres, dus à une notation insuffisante, firent qu'on regardait souvent les nombres complexes d'une façon suspecte.

Il faudra attendre environ deux siècles, en 1777, avant que Leonard Euler (Suisse 1707-1783) n'introduise une notation plus rigoureuse et explore l'extension aux nombres complexes des fonctions telles que la fonction exponentielle. Caspar Wessel (Norvège 1745-1818) en 1797 et Karl Friedrich Gauss (Allemagne 1777-1855) clarifièrent beaucoup le concept de nombre complexe en donnant une interprétation géométrique dans laquelle les nombres complexes sont représentés par des points dans un plan. L'étude des nombres complexes prit donc son envol au XIX^{e} siècle. On a même dit que, du point de vue technique, la théorie des fonctions complexes fut la création la plus originale de ce siècle. On alla jusqu'à l'appeler la joie mathématique du siècle.

Reste que, bien que l'étude purement mathématique des nombres complexes soit intéressante, la principale utilité de ceux-ci reste leur utilisation comme intermédiaire dans les calculs. En utilisant les nombres complexes, on simplifie grandement certains calculs autrement difficiles, voire impossibles. Jacques Hadamard nous dit que « le *chemin le plus rapide entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe* ».

Bien sûr, l'étude des fonctions complexes est un vaste domaine et il ne serait être question de l'aborder entièrement ici. Nous n'allons en fait que faire l'extension des fonctions réelles au domaine complexe et monter comment utiliser ces connaissances pour prouver des identités réelles, particulièrement les identités trigonométriques.

Définition des nombres complexes

À la base, on a besoin que d'un seul outil pour arriver aux nombres complexes. Il suffit alors de définir

$$\boxed{i=\sqrt{-1}}\,.$$

(Notez qu'en génie, on utilise parfois la lettre j plutôt que i.) Euler a appelé ce nombre un nombre imaginaire, nom qui malheureusement est demeuré jusqu'à aujourd'hui et qui reflète bien le mystère qui entourait les nombres complexes à cette époque.

Les nombres complexes s'écrivent en général sous la forme

$$\boxed{z=x+iy}$$

où x est la partie réelle et y est la partie imaginaire du nombre complexe. Nous pourrions écrire cela sous la forme

$$\operatorname{Re}(z)=x \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(z)=y\,.$$

Exemple Résoudre $x^2 = -3$.

Nous avons

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{-3} \\
&= \sqrt{3}\sqrt{-1} \\
&= \sqrt{3}\, i.
\end{aligned}
$$

La solution de cette équation est alors un nombre purement imaginaire. Pour cette solution, nous avons

$$\mathrm{Re}\left(\sqrt{-3}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\sqrt{-3}\right) = \sqrt{3}.$$

Exemple Résoudre $x^2 - 4x + 5 = 0$.

En appliquant la formule quadratique, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5}}{2} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} \\
&= \frac{4 \pm 2i}{2} \\
&= 2 + i \quad \text{et} \quad 2 - i
\end{aligned}
$$

Égalité entre deux nombres complexes

Lorsque deux nombres complexes sont égaux, il faut absolument que les parties réelles soient égales et que les parties imaginaires soient égales entre elles. Ainsi si

$$a + ib = a' + ib'$$

alors

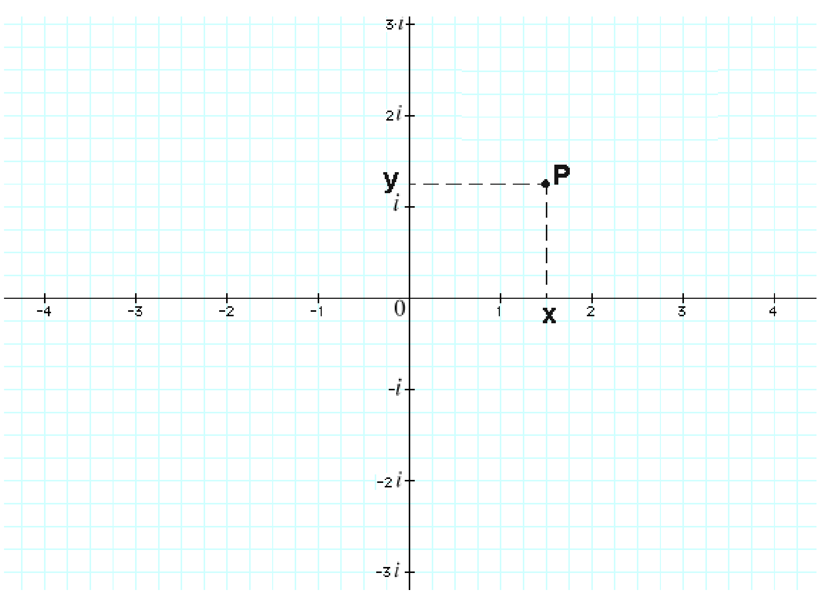
$$a = a'$$

et

$$b = b'.$$

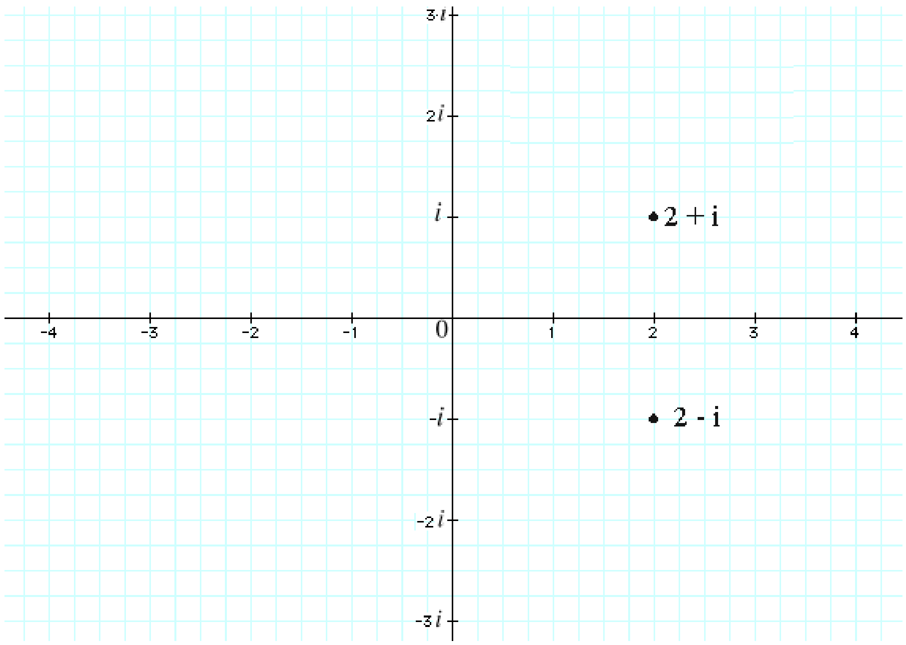
Le plan complexe

Il est possible de représenter graphiquement les nombres complexes. Comme il y a deux composantes dans un nombre complexe, la partie réelle et la partie imaginaire, on peut représenter un nombre complexe comme un point dans un plan. L'axe horizontal est l'axe des réels et l'axe vertical est l'axe des imaginaires. Ainsi, un point $z = x + iy$ sera placé à l'endroit décrit par la figure suivante.



Ce plan s'appelle le plan complexe ou, beaucoup moins fréquemment, un diagramme d'Argand (de Jean Robert Argand (Suisse 1768-1822), un des premiers à s'intéresser à la représentation géométrique des nombres complexes.).

Exemple Représentons les nombres z = 2 + *i* et z = 2 – *i* dans le plan complexe



Opérations sur les nombres complexes

Addition

L'addition de deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ donne

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Autrement dit, la partie réelle de la somme est la somme des parties réelles de chaque nombre, et la partie imaginaire est la somme des parties imaginaires de chaque nombre. Remarquer une certaine similitude entre l'addition des vecteurs et l'addition des nombres complexes.

Exemple

$$\begin{aligned}(5+i)+(1+3i) &= (5+1)+i(1+3)\\ &= 6+4i\end{aligned}$$

Soustraction

La soustraction de deux nombres complexes donne

$$\begin{aligned}z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)\\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).\end{aligned}$$

Encore une fois, la partie réelle de la différence est la différence des parties réelles de chaque nombre et la partie imaginaire de la différence est la différence des parties imaginaires de chaque nombre.

Exemple

$$\begin{aligned}(5+i)-(1+3i) &= (5-1)+i(1-3)\\ &= 4-2i\end{aligned}$$

Multiplication

La multiplication de deux nombres complexes donne

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 . \end{aligned}$$

Comme $i = \sqrt{-1}$, alors $i^2 = -1$ et nous avons alors

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 - y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Comme on peut le voir, le résultat est assez compliqué à retenir. Il est beaucoup mieux de se rappeler la façon de faire la multiplication que de se rappeler le résultat final.

Exemple

$$\begin{aligned} (5+i)\cdot(1+3i) &= 5 + i + 15i + 3i^2 \\ &= (5-3) + i(1+15) \\ &= 2 + 16i \end{aligned}$$

____

Division

Le calcul d'une division est un peu plus compliqué que celui des autres opérations. Il est compliqué par le fait qu'il ne doit jamais y avoir de i au dénominateur dans un nombre complexe. Pour y arriver, il existe cependant un truc qui consiste à multiplier au numérateur et au dénominateur par le même nombre qu'au dénominateur, mais avec une partie imaginaire de signe contraire. Il suffit ensuite de faire les multiplications et le tour est joué.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\\ &= \frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}\\ &= \frac{x_1x_2+iy_1x_2-ix_1y_2-i^2y_1y_2}{x_2^2+iy_2x_2-ix_2y_2-i^2y_2^2}\\ &= \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}\\ &= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\end{aligned}$$

Encore une fois, il ne faut pas se rappeler ce résultat final, mais plutôt la façon de procéder.

Exemple

$$\begin{aligned}\frac{9-8i}{5+2i} &= \frac{(9-8i)\cdot(5-2i)}{(5+2i)\cdot(5-2i)}\\ &= \frac{45-18i-40i-16}{25-10i+10i+4}\\ &= \frac{29-58i}{29}\\ &= 1-2i\end{aligned}$$

Résultat que l'on peut vérifier en calculant que $(5+2i)\cdot(1-2i)=9-8i$.

____

Propriétés des nombres complexes

À partir de ces résultats, nous pouvons déduire quelques propriétés des nombres complexes.

Commutativité de l'addition et de la multiplication

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

Associativité de l’addition et de la multiplication

$$z_1 + \left(z_2 + z_3\right) = \left(z_1 + z_2\right) + z_3$$

$$z_1 \cdot \left(z_2 \cdot z_3\right) = \left(z_1 \cdot z_2\right) \cdot z_3$$

Distributivité

$$z_1 \cdot \left(z_2 + z_3\right) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Élément nul

$$z + 0 = z$$

Élément neutre

$$z \cdot 1 = z$$

Élément inverse

$$z + \left(-z\right) = 0$$

EXERCICES

Si $z_1 = 3 + 4i$ et $z_2 = 5 - 2i$, trouvez (dans la forme $x + iy$)

1. $(z_1 - z_2)^2$ **2.** $\frac{z_1}{z_2}$ **3.** $\frac{1}{z_1^2}$ **4.** $\frac{z_2}{2z_1}$

Trouvez, dans la forme $x + iy$,

5. $(7 - 3i) - (-2 + 4i)$ **6.** $(2 + 4i)^2$

7. $(3 + 5i)(3 - 5i)$ **8.** $(5 + 2i)i$

9. $(1 - i)^4$ **10.** $\frac{11+2i}{4+3i}$

11. $\frac{52{,}5-12{,}5i}{3-i}$ **12.** $\frac{101}{10-i}$

Trouvez

13. $\mathrm{Re}\frac{1}{2+i}$ **14.** $\mathrm{Im}\frac{2+i}{3+4i}$

15. $\mathrm{Re}\frac{(1+i)^2}{3+2i}$ **16.** $\mathrm{Im}\frac{2-i}{4-3i}$

Le complexe conjugué

Lors du calcul de la division, nous avons multiplié par un nombre complexe dont la partie réelle était identique à un autre nombre, mais dont la partie imaginaire était de signe différent. Ainsi, nous avons multiplié par $x - iy$ lorsque nous avions $x + iy$ au dénominateur. C'est un élément qui revient souvent lorsqu'on travaille avec les nombres complexes : c'est le complexe conjugué.

Si on a un nombre complexe

$$z = x + iy$$

alors le complexe conjugué est

$$\boxed{\bar{z} = x - iy}.$$

Ainsi, le complexe conjugué de $5 + 2i$ est $5 - 2i$, et le complexe conjugué de $3 - i$ est $3 + i$. Le complexe conjugué est parfois noté z^*.

Le complexe conjugué peut également être utilisé pour calculer les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Puisque

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$$

et

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy\ ,$$

on a

$$\boxed{\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}}$$

et

$$\boxed{\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}}.$$

On peut facilement vérifier les propriétés suivantes

$$\boxed{\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$$

$$\boxed{\overline{(z_1 - z_2)} = \overline{z_1} - \overline{z_2}}$$

$$\boxed{\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}$$

et

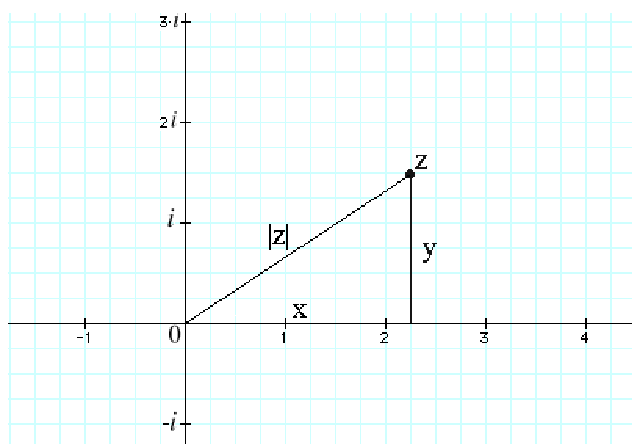
$$\boxed{\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}.$$

Module ou valeur absolue d'un nombre complexe

Le complexe conjugué est utile parce que lorsqu'on multiplie un nombre complexe par son complexe conjugué, on obtient toujours un nombre réel. En effet, on a

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (x + iy) \cdot (x - iy) \\ &= x^2 - ixy + iyx - i^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

qui est toujours un nombre réel positif.



Le module (ou valeur absolue) d'un nombre complexe est d'ailleurs défini par

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si on examine le résultat de ce calcul sur le plan complexe, on peut voir que ce calcul nous donne simplement la longueur de l'hypoténuse du triangle. Autrement dit, le module d'un nombre complexe est simplement la distance entre l'origine du plan complexe et le point représentant le nombre complexe.

Distance entre deux nombres complexes dans le plan complexe

La distance entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans un plan est donnée par

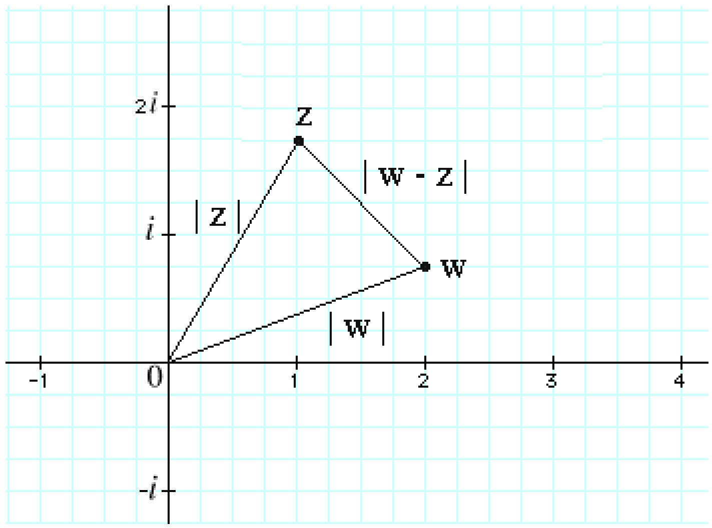
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \ .$$

Or si on a deux nombres complexes $w = x_1 + iy_1$ et $z = x_2 + iy_2$ et que l'on calcule, $|w - z|$ on obtient

$$\begin{aligned} |w - z| &= \sqrt{(w - z)\overline{(w - z)}} \\ &= \sqrt{[(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)] \cdot [(x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2)]} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

En comparant, on obtient

$$d = |w - z|.$$



EXERCICES

Trouvez

1. $|1 - i|^2$

2. $\left|-\dfrac{3i}{2}\right|$

3. $|\cos\theta + i\sin\theta|$

4. $|6 - 8i|$

5. $\left|\dfrac{1+4i}{4+i}\right|$

6. $\left|\dfrac{z}{\bar{z}}\right|$

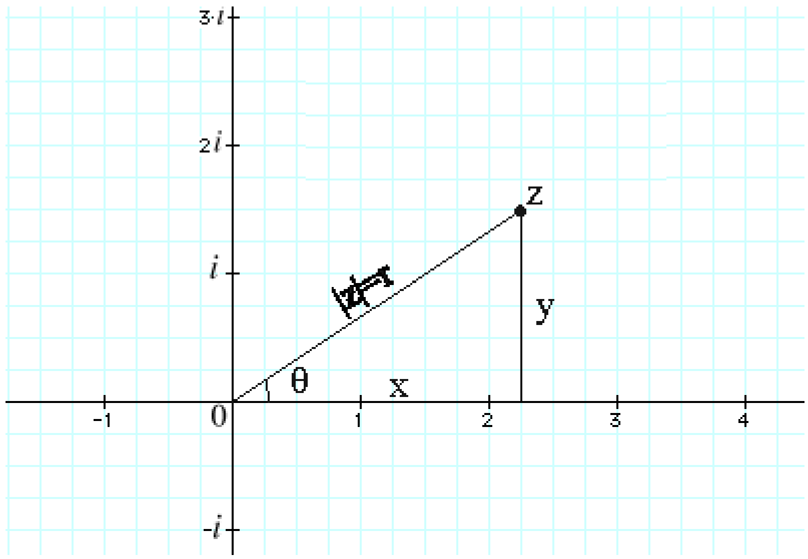
7. $\left|\dfrac{(3+4i)^2}{(3-4i)}\right|$

8. $\left|\dfrac{1}{7-\pi i}\right|$

La forme polaire des nombres complexes

Comme les nombres complexes peuvent être représentés par des points dans le plan complexe et comme il y a plusieurs façons de donner la position d’un point dans le plan, il y a plusieurs façons d’écrire les nombres complexes.

Une des formes les plus utiles fait appel aux coordonnées polaires. Pour donner la position d'un point dans le plan, on peut, au lieu des coordonnées cartésiennes x et y, utiliser la distance du point jusqu'à l'origine ainsi que l'angle que fait ce rayon avec l'axe des x.



Chaque point peut donc être décrit par les valeurs de r et θ.

Lorsqu'on connaît les coordonnées polaires d'un point, il est très facile d'en obtenir les coordonnées cartésiennes. À l'aide d'un peu de géométrie élémentaire, on obtient les équations suivantes :

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = r\sin\theta .$$

On peut également obtenir les coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes à l'aide des équations suivantes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x} .$$

Les nombres complexes $z = x + iy$ peuvent donc être aussi bien représentés par la forme polaire

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}.$$

On reconnaît immédiatement que r est le module du nombre complexe. θ s'appelle l'argument du nombre complexe. Cela peut d'ailleurs s'écrire

$$r = |z|$$

et

$$\theta = \arg z \,.$$

Notez que les angles sont toujours donnés en radians et mesurés dans le sens antihoraire à partir de l'axe des x. Si l'angle est mesuré dans le sens horaire, il sera alors négatif.

Notez également que l'argument d'un nombre complexe n'est pas unique. En ajoutant 2π à l'argument, on effectue une rotation complète pour revenir au même angle. On peut donc ajouter ou enlever des 2π à l'argument autant qu'on veut sans changer la valeur d'un nombre complexe. Nous verrons plus tard que cela pourra avoir un impact sur le résultat de certains calculs.

Parfois, on limite la valeur de θ à un certain domaine. C'est ce qu'on fait lorsqu'on parle de la valeur principale de l'argument. Dans ce cas, la valeur de l'angle doit être entre $-\pi$ et π. On a donc

$$-\pi < \arg z \leq \pi \,.$$

Seul le nombre $z = 0$, l'origine, n'a pas d'argument défini. Comme ce point est à l'origine, il est impossible de donner l'angle que fait ce point avec l'axe des x .

Exemple Écrire $z = 1 + i$ sous forme polaire

Le module est

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

et l'argument est

$$\theta = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

La forme polaire est donc

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\,.$$

____

Avec la forme polaire, la multiplication et la division des nombres complexes prennent une forme intéressante.

La multiplication donne

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right]. \end{aligned}$$

En utilisant quelques identités trigonométriques, on a

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)}.$$

On a donc que

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1|\cdot|z_2|$$

et

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2\,.$$

C'est un résultat remarquablement simple et qui n'est pas sans rappeler les lois des exposants. Nous verrons plus tard que cela n'est pas fortuit.

Avec la division, nous obtenons des résultats similaires. Si on a $z = \frac{z_1}{z_2}$ alors

$$z_1 = z \cdot z_2\,.$$

Ainsi

$$|z_1| = |z \cdot z_2| = |z| \cdot |z_2|$$

et nous avons

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Nous avons également

$$\arg(z_1) = \arg(z) + \arg(z_2).$$

Ce qui nous donne

$$\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \theta_1 - \theta_2.$$

De là, on peut conclure que

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right)}.$$

Exemple Soit les nombres $z_1 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ et $z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Alors

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 3 \cdot 6\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 18(\cos\pi + i\sin\pi) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{6}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

____

EXERCICES

Déterminez la valeur principale de l'argument de

1. $-2 + 2i$

2. -4

3. $-3i / 2$

4. $1 - i\sqrt{3}$

Représentez dans la forme polaire

5. $1 + i$

6. $-4 + 4i$

7. $4i$

8. -7

9. $\dfrac{2+2i}{1-i}$

10. $\dfrac{i\sqrt{2}}{3+3i}$

11. $\dfrac{6+8i}{4-3i}$

12. $\dfrac{3+i\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-2i/3}$

Représentez dans la forme $x + iy$

13. $4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$

14. $\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

15. $\pi\left(\cos\pi + i \sin\pi\right)$

16. $\sqrt{50}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Puissance entière

On peut maintenant examiner d'autres opérations sur les nombres complexes, opérations que l'on peut au départ exprimer à l'aide des 4 opérations de base et qu'on généralise par la suite.

Commençons par la puissance entière d'un nombre, définie par

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot z\cdot z\cdot\ldots\cdot z\cdot z\cdot z}_{n\text{ fois}}.$$

Avec les nombres complexes, on obtient alors, selon les règles de multiplication de la section précédente,

$$\begin{aligned} z^2 &= r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\cdot r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \\ &= r^2\left(\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= z^2\cdot z \\ &= r^2\left(\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right)\cdot r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \\ &= r^3\left(\cos 3\theta + i\sin 3\theta\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^4 &= z^3\cdot z \\ &= r^3\left(\cos 3\theta + i\sin 3\theta\right)\cdot r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \\ &= r^4\left(\cos 4\theta + i\sin 4\theta\right). \end{aligned}$$

On peut donc déduire que

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

et

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)}.$$

Cette dernière formule est la formule de de Moivre (Abraham de Moivre (France 1667-1754)), très utile pour démontrer des identités trigonométriques comme nous le verrons plus tard.

Ces formules sont également valides pour des valeurs de *n* négatives puisque

$$\begin{aligned}
z^{-n} &= \frac{1}{z^n} \\
&= \frac{1}{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)} \\
&= r^{-n}\frac{(\cos n\theta - i\sin n\theta)}{(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos n\theta - i\sin n\theta)} \\
&= r^{-n}\frac{(\cos n\theta - i\sin n\theta)}{\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta} \\
&= r^{-n}(\cos n\theta - i\sin n\theta) \\
&= r^{-n}(\cos(-n)\theta + i\sin(-n)\theta).
\end{aligned}$$

Exemple Calculer $(3 + 4i)^3$.

Comme on a pu le voir, il est beaucoup plus facile de calculer la valeur d'une puissance d'un nombre complexe lorsque ce dernier est sous forme polaire. Calculons donc le module et l'argument du nombre complexe.

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta = \arctan\frac{4}{3} = 0{,}927 \text{ rad}$$

La forme polaire est donc

$$z = 5(\cos 0{,}927 + i\sin 0{,}927).$$

On peut alors calculer la puissance

$$\begin{aligned} z^3 &= 5^3\left(\cos(3\times 0{,}927) + i\sin(3\times 0{,}927)\right) \\ &= 125(\cos 2{,}782 + i\sin 2{,}782). \end{aligned}$$

On peut alors ramener ce résultat sous forme cartésienne en utilisant

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= 125\cos 2{,}782 \\ &= -117 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= 125\sin 2{,}782 \\ &= 44 \end{aligned}$$

pour obtenir le résultat qui est $-117 + 44\,i$.

Il aurait également été possible de calculer cette valeur en multipliant z par lui-même trois fois. Cette méthode deviendrait cependant longue lorsque viendrait le temps de calculer des puissances élevées.

____

Puissance fractionnaire : les racines

La formule du calcul des puissances reste également bonne lorsque l’exposant est fractionnaire.

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

Cela doit être vrai, car

$$\begin{aligned} z = \left(z^{1/n}\right)^n &= \left(r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\right)^n \\ &= r^{1/n\, n}\left(\cos\frac{n\theta}{n} + i\sin\frac{n\theta}{n}\right) \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

De plus, puisque $\left(z^{1/n}\right)^n = z$, il est clair que

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{z}\,.$$

La formule des puissances nous permet donc de calculer les racines des nombres complexes.

Exemple   Calculer $\sqrt[4]{1}$.

Comme $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, alors

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1} &= \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0}{4} + i\sin\frac{0}{4}\right) \\ &= 1(\cos 0 + i\sin 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

On s'attendait un peu à ce résultat, car $1^4 = 1$.

Mais ce n'est pas la seule réponse possible. Comme on peut également avoir

$1 = 1(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$, alors

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1} &= \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right) \\ &= 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= i. \end{aligned}$$

ce qui est également vrai, car $i^4 = 1$.

Ce n'est pas tout, on peut encore ajouter 2π à l'argument du nombre complexe de départ pour obtenir $1 = 1(\cos 4\pi + i \sin 4\pi)$. Alors

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1} &= \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4}\right)\\ &= 1(\cos\pi + i\sin\pi)\\ &= -1\end{aligned}$$

qui est encore une racine puisque $(-1)^4 = 1$.

On peut encore ajouter 2π à l'argument du nombre complexe de départ pour obtenir $1 = 1(\cos 6\pi + i \sin 6\pi)$. Alors

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1} &= \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4}\right)\\ &= 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\\ &= -i\end{aligned}$$

qui est encore une racine puisque $(-i)^4 = 1$.

Cependant, si on ajoute encore 2π, on obtient $1 = 1(\cos 8\pi + i \sin 8\pi)$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1} &= \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right)\\ &= 1(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)\\ &= 1\end{aligned}$$

et on revient à la première solution. En ajoutant encore des 2π à partir de là nous obtiendrons toujours une des quatre solutions précédentes.

Les quatre solutions sont donc 1, i, -1 et $-i$.

Toutes les solutions d'une racine s'obtiennent donc en ajoutant des 2π à l'argument du nombre complexe dont on fait la racine. Cela ne change pas ce nombre, mais change la valeur de la racine. En général, on revient aux mêmes solutions en ajoutant $2n\pi$ lorsqu'on fait la racine n-ième puisqu'on a alors

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)\\ &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)\right)\\ &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)\end{aligned}$$

qui est la première solution obtenue en n'ajoutant aucun 2π. Il y a donc n solutions lorsqu'on fait la racine n-ième du nombre complexe.

L'ensemble des solutions est donc obtenu par

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

où $k = 0,1,2,3,\ldots,n-1$.

Exemple Calculer $\sqrt{i}$.

Sous forme polaire, on a $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Les 2 solutions sont donc

$$\begin{aligned}\sqrt{i} &= \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi/2}{2}+i\sin\frac{\pi/2}{2}\right)\\ &= 1\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt{i} &= \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi/2+2\pi}{2}+i\sin\frac{\pi/2+2\pi}{2}\right)\\ &= 1\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Sous forme cartésienne, ces deux solutions sont $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$. Notez que la deuxième solution est identique à la première solution, mais avec les signes inverses. C'est toujours le cas lorsqu'on fait une racine carrée.

Exemple Résoudre $z^2-(2+2i)z+16-2i=0$.

Pour résoudre ce genre de problème, on n'a qu'à employer la formule pour résoudre les équations quadratiques en prenant les nombres complexes au lieu des nombres réels.

$$\begin{aligned}z &= \frac{2+2i+\sqrt{(2+2i)^2-4\cdot(16+2i))}}{2}\\ &= \frac{2+2i+\sqrt{(4+8i-4)-64-8i}}{2}\\ &= \frac{2+2i+\sqrt{-64}}{2}\\ &= \frac{2+2i\pm 8i}{2}\\ &= 1+5i \quad \text{et} \quad 1\text{-}3\text{i}\end{aligned}$$

Notez qu'avec les nombres complexes, il n'est pas nécessaire d'écrire le ± devant la racine. Ce ± apparaît lorsqu'on trouve toutes les solutions de la racine.

Représentations des racines dans le plan complexe

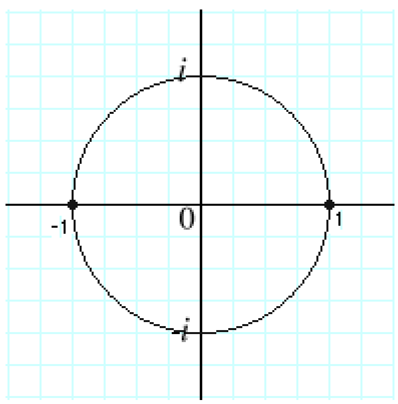
Il est également intéressant de représenter ces solutions dans le plan complexe. Prenons par exemple les racines de 1.

Si on calcule $\sqrt{1}$, on a les solutions

$$\sqrt{1} = \left(\cos\frac{0}{2} + i\sin\frac{0}{2} \right) = 1$$

et

$$\sqrt{1} = \left(\cos\frac{0+2\pi}{2} + i\sin\frac{0+2\pi}{2} \right) = -1 .$$



Ces racines sont situées aux endroits suivants dans le plan complexe.

Ces deux racines sont décalées dans le plan complexe de π radians. C'est en général le cas puisque l'argument de la première solution est $\frac{\theta}{2}$ alors que l'argument de la deuxième solution est $\frac{\theta+2\pi}{2} = \frac{\theta}{2} + \pi$. L'écart entre les deux solutions est donc toujours de π radians. Elles seront également à la même distance de l'origine puisque le module des deux racines est $\sqrt{r}$.

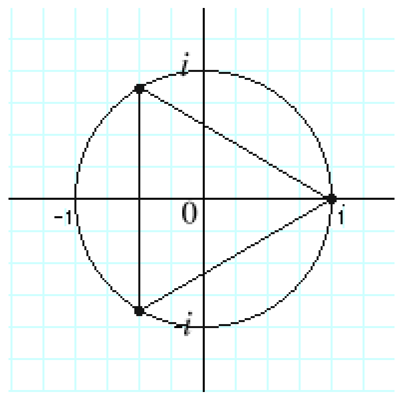
Dans le cas de la racine cubique, les solutions sont

$$\sqrt[3]{1} = \left(\cos\frac{0}{3} + i\sin\frac{0}{3}\right) = 1$$

$$\sqrt[3]{1} = \left(\cos\frac{0+2\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

et

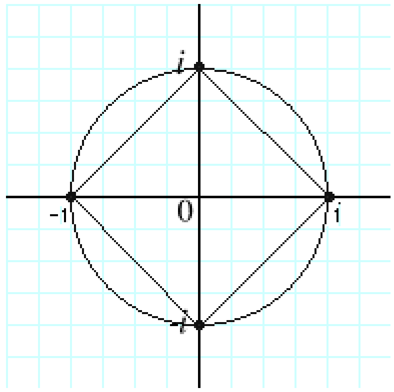
$$\sqrt[3]{1} = \left(\cos\frac{0+4\pi}{3} + i\sin\frac{0+4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

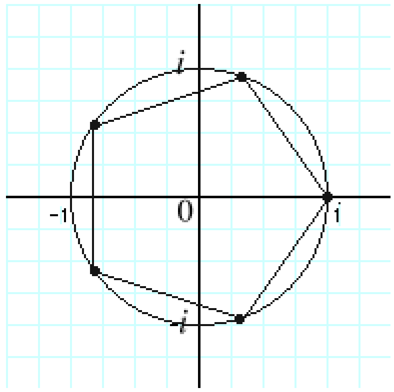


Ce qui donne les trois racines suivantes dans le plan complexe.

Ces trois solutions sont décalées d'un angle de $2\pi/3$. C'est toujours le cas puisque la première solution d'une racine cubique sera à $\frac{\theta}{3}$, la deuxième sera à $\frac{\theta+2\pi}{3} = \frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}$ et la troisième sera à $\frac{\theta+4\pi}{3} = \frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}$. Ces solutions sont aussi toutes à la même distance de l'origine puisqu'elles auront toutes le même module, $\sqrt[3]{r}$. Si on relie ces racines entre elles, on obtient donc un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1 (en général, les racines forment un triangle inscrit dans un cercle de rayon $\sqrt[3]{r}$).

Ces idées se généralisent pour les racines n-ième. Les racines seront toutes décalées du même angle, ${}^{2\pi}\!/_{n}$, et seront toutes à la même distance de l'origine, $\sqrt[n]{r}$. Par exemple, les solutions des racines quatrième et cinquième de 1 ressembleraient à cela dans le plan complexe.





Ces solutions sont régulièrement espacées sur un cercle de rayon unitaire et forment toujours une figure géométrique régulière inscrite dans un cercle.

EXERCICES

Calculez la valeur des puissances suivantes

1. $\left(4+i4\sqrt{3}\right)^5$

2. $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^6$

3. $\left(\dfrac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}\right)^6$

4. $\left(\dfrac{6\sqrt{3}+6i}{6+6i}\right)^{-3}$

Trouvez toutes les valeurs possibles des racines suivantes et tracez-les dans le plan complexe

5. $\sqrt{i}$

6. $\sqrt{-i}$

7. $\sqrt{-4}$

8. $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$

9. $\sqrt[4]{-1}$

10. $\sqrt{3+4i}$

11. $\sqrt{-5+12i}$

12. $\sqrt{-8-6i}$

13. $\sqrt[3]{1+i}$

14. $\sqrt[5]{-1}$

15. $\sqrt[6]{-1}$

16. $\sqrt[8]{1}$

Trouvez toutes les solutions des équations suivantes

17. $z^2 + z + 1 = i$

18. $z^2 - 3z + 3 = i$

19. $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$

20. $z^4 - 3(1 + 2i)z^2 = 8 - 6i$

21. Soit P un polygone régulier à n cotés dont les sommets sont sur un cercle de rayon 1. Trouvez le produit des longueurs des n-1 segments de lignes droites qui joignent un sommet donné de P aux n-1 autres sommets de P. (Ouf!)

La fonction exponentielle

La fonction exponentielle d'un nombre complexe est

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x e^{iy}. \end{aligned}$$

Il est quand même assez facile de savoir ce que vaut e^x, mais il est plus difficile de calculer e^{iy}. Pour y arriver, nous allons utiliser l'identité

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}.$$

Cette relation est d'une importance capitale dans l'étude des nombres complexes et nous allons présenter deux preuves.

Première preuve

Posons $s = \cos y + i \sin y$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dy} &= -\sin y + i \cos y \\ &= i(\cos y + i \sin y) \\ &= is. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dy} &= is \\ \frac{ds}{s} &= idy. \end{aligned}$$

En intégrant de chaque côté nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \frac{ds}{s} &= \int idy \\ \ln s &= iy + K. \end{aligned}$$

On peut alors isoler s et redéfinir la constante pour obtenir

$$s = Ke^{iy}.$$

Ainsi, comme on a posé au départ que $s = \cos y + i \sin y$, on a

$$\cos y + i \sin y = Ke^{iy}.$$

Pour trouver la valeur de K, posons y = 0. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \cos 0 + i \sin 0 &= Ke^{0} \\ 1 &= K \cdot 1 \\ K &= 1. \end{aligned}$$

Nous avons alors le résultat final

$$\cos y + i \sin y = e^{iy}.$$

Deuxième preuve

Le développement en série d'une exponentielle est

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + (iy) - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right). \end{aligned}$$

Comme les développements en série des cosinus et sinus sont

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

Il s'ensuit que

$$\cos y + i \sin y = e^{iy}.$$

La forme polaire des nombres complexes devient donc

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Avec cette forme, il est encore plus facile de faire la multiplication de deux nombres complexes

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

On retrouve alors le résultat connu que lors de la multiplication de deux nombres complexes, le module est le produit des deux modules et l'argument est la somme des deux arguments. La ressemblance entre la loi pour les arguments et les exposants n'était donc pas fortuite puisque l'argument est bel et bien un exposant.

Exemple Calculer $e^{1,4-0,6i}$

$$\begin{aligned} e^{1,4-0,6i} &= e^{1,4} e^{-0,6i} \\ &= e^{1,4}\left(\cos(-0,6) + i\sin(-0,6)\right) \\ &= 4,055(0,825 - 0,565i) \\ &= 3,347 - 2,290i \end{aligned}$$

Il est important de noter quelques valeurs importantes de la fonction exponentielle

$$e^{i\pi/2} = i \qquad e^{i\pi} = -1 \qquad e^{-i\pi/2} = -i \qquad e^{-i\pi} = -1.$$

Pour Euler, la relation

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

était d'une importance fondamentale puisqu'elle relie entre elles les quatre nombres réels les plus importants en mathématique, e, π, 1 et 0.

Généralisation

On peut finalement conclure que

$$\boxed{e^z = e^x(\cos y + i \sin y)}$$

Période de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est particulière parce qu'elle est périodique. En effet, puisque

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+iy+2\pi i} \\ &= e^x\left(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)\right) \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^z, \end{aligned}$$

La fonction exponentielle est périodique avec une période purement imaginaire de $2\pi i$.

EXERCICES

Calculez e^z (dans la forme $x + iy$) lorsque z vaut

1. 1

2. $3 + \pi i$

3. $-i$

4. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

5. $-2 - 3\pi i$

6. $9\pi i/2$

7. $e + 5\pi i$

8. $\pi - i/2$

9. $-1 - 7\pi i/4$

Trouvez les parties réelles et imaginaires de

10. $e^{-z/2}$

11. $e^{2\pi z}$

12. e^{z^2}

13. $e^{(1+i)z}$

Écrivez les expressions suivantes dans la forme polaire ($z = r\,e^{i\theta}$)

14. $\sqrt{i}$

15. $-1 + i$

16. $6 - 8i$

La fonction logarithmique et la puissance généralisée

Il serait maintenant intéressant de connaître la fonction inverse de la fonction exponentielle. Autrement dit, quelle est la valeur de w dans l'équation suivante si on connaît la valeur de z?

$$e^w = z$$

Par définition, cette valeur sera appelée

$$w = \ln z\,.$$

En écrivant le nombre z sous la forme polaire, on obtient

$$e^w = re^{i\theta+2\pi ni}$$

et donc que

$$\begin{aligned} w &= \ln\left(re^{i\theta+2\pi ni}\right) \\ &= \ln r + i\theta + 2\pi ni. \end{aligned}$$

Comme $w = \ln z$, on a

$$\boxed{\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ni}.$$

Il y a donc une infinité de solutions au logarithme d'un nombre complexe.

Lorsqu'on limite la valeur de l'argument du nombre complexe à sa valeur principale, c'est-à-dire entre les valeurs de $-\pi$ et π, alors on obtient la valeur principale du logarithme. Dans ce cas, il s'écrit plutôt en commençant par une lettre majuscule

$$\boxed{\mathrm{Ln}\, z = \ln r + i\theta}.$$

Ainsi

$$\ln z = \mathrm{Ln}\, z + 2\pi ni\,.$$

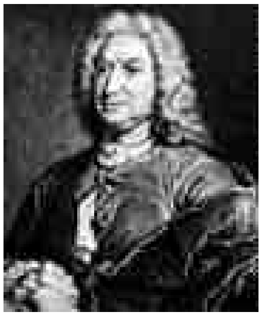
La querelle sur le logarithme des nombres négatifs

Si on calcule le logarithme d'un nombre réel positif, alors l'argument est zéro et la formule du logarithme redevient simplement le logarithme tel qu'on le connaît. Par contre, si on calcule le logarithme d'un nombre réel négatif, alors l'argument est π et on obtient

$$\ln(-x) = \ln x + i\pi$$

(où x est un entier positif). On voit donc que le logarithme des nombres réels négatifs comprend une partie imaginaire.

Avant de comprendre cela, les mathématiciens du XVIII[e] siècle, spécialement Gottfried Wilhelm Leibniz (Allemagne 1646-1716) et Johann Bernouilli (Suisse 1667-1748) au départ, se sont querellés sur cette question pendant près de 50 ans. Le tout commence en 1702 lorsque Bernouilli résolut quelques intégrales en supposant que ln(-x) avait une solution. Leibniz maintenait qu'il ne pouvait faire de tels calculs, car, selon lui, ln(-x) n'existait tout simplement pas. L'argument ressemblait un peu à cela : Les nombres entre 0 et 1 ont un logarithme compris entre -∞ et 0 et les nombres plus grands que 1 ont un logarithme entre 0 et ∞. Puisque deux nombres ne peuvent avoir le même logarithme, il ne peut y avoir de solution à ln(-x), car il ne reste plus de valeur possible à donner, toutes les valeurs des logarithmes ayant déjà été utilisées par les nombres positifs. (Ce résultat n'est pas correct, il n'explore pas la possibilité que la valeur du logarithme ne soit pas un nombre réel.)



Bernouilli répliqua alors que les logarithmes des nombres négatifs existent puisque

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(-x)}{(-x)}$$

et qu'en intégrant de chaque côté on obtient $\ln(x) = \ln(-x)$. (Ce résultat n'est pas correct, il manque la constante d'intégration qui dans ce cas est $i\pi$.)

Les deux, et d'autres qui embarquèrent dans le débat, n'arrêtèrent pas de s'envoyer ainsi des preuves et des arguments démontrant leurs points de vue et démolissant les arguments des autres. Tous ces arguments ne pouvaient être bons puisque ni l'un ni l'autre n'avait raison. Il fallut attendre aux environs de 1748 pour que le débat cesse. C'est alors qu'Euler démontra que les arguments des deux opposants étaient incorrects puisque le logarithme d'un nombre négatif est un nombre complexe.

La puissance généralisée

On a déjà calculé la puissance d'un nombre complexe, mais on a fait que les cas où la puissance était un nombre réel, comme z^3. On n'a pas fait des cas où l'exposant est un nombre complexe, tels que z^{3+2i}. Nous allons maintenant remédier à cette situation.

En écrivant la puissance sous une autre forme, nous allons pouvoir aisément calculer sa valeur. En effet, en écrivant

$$z^w = \left(e^{\ln z}\right)^w$$

ce qui devient, en utilisant les lois des exposants,

$$\boxed{z^w = e^{w \ln z}}$$

Il est facile de calculer la valeur de la puissance, car on sait déjà comment calculer les fonctions logarithmique et exponentielle. Comme il y a plusieurs valeurs possibles au logarithme, il y aura plusieurs valeurs possibles à la puissance. Nous nous limiterons parfois à une seule valeur si nous voulons la valeur principale de la puissance, qui se calcule avec la valeur principale du logarithme.

$$\text{Valeur principale de } z^w = e^{w \operatorname{Ln} z}$$

Exemple Calculer la valeur principale de i^i

$$\begin{aligned}
i^i &= e^{i \operatorname{Ln} i} \\
&= e^{i \operatorname{Ln}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)} \\
&= e^{i\left(i\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}} \\
&= 0{,}2078
\end{aligned}$$

Exemple Calculer $(1+i)^{2-i}$

$$\begin{aligned}(1+i)^{2-i} &= e^{(2-i)\ln(1+i)} \\ &= e^{(2-i)\left(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2\pi ni\right)} \\ &= e^{2\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{2}+4\pi ni-i\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2\pi n} \\ &= e^{2\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2\pi n}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+4\pi n-\ln\sqrt{2}\right)} \\ &= e^{2\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2\pi n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+4\pi n-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+4\pi n-\ln\sqrt{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Comme il est inutile d'ajouter des 4π à dans un cosinus ou un sinus et que $e^{2\ln\sqrt{2}}=2$, on a alors

$$\begin{aligned}(1+i)^{2-i} &= 2e^{\frac{\pi}{4}+2\pi n}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\ln\sqrt{2}\right)\right) \\ &= e^{2\pi n}(1{,}490+4{,}126i)\end{aligned}$$

EXERCICES

Trouvez la valeur principale de $\ln z$ lorsque z vaut

1. -7

2. $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

3. $(1-i)^2$

4. $3+i\sqrt{27}$

Trouvez toutes les valeurs des expressions suivantes

5. $\ln 2$

6. $\ln(-5)$

7. $\ln \frac{-i}{3}$

8. $\ln (3 + 2i)$

9. $\ln (e^{2i})$

10. $\ln (-¼ + 5i)$

11. $\ln (\pi - i)$

12. $\ln (e + i\pi)$

Résoudre les équations suivantes

13. $e^z = -3 + 4i$

14. $e^z = i$

15. $e^{2z} = -2$

16. $e^{z^2} = 1$

17. $\ln z = -\pi i/2$

18. $\ln z = -2 - \frac{3}{2} i$

19. $\ln z = 3 - i$

20. $\ln z = e - \pi i$

Trouvez la valeur principale de

21. $i^{\frac{1}{2}}$

22. $(2i)^{2i}$

23. $(1+3i)^{i}$

24. $(1+i)^{1-i}$

25. 3^{4-i}

26. $(3 + 4i)^{1/3}$

27. $(-5)^{2-4i}$

28. $(5-2i)^{3+\pi i}$

Les fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus des nombres complexes sont définies par

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}.$$

On peut montrer que ces définitions redonnent les fonctions que l'on connaît lorsque l'angle est un nombre réel. Dans le cas du cosinus on a

$$\begin{aligned}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} &= \frac{(\cos x + i\sin x) + (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2}\\ &= \frac{(\cos x + i\sin x) + (\cos x - i\sin x)}{2}\\ &= \cos x\end{aligned}$$

En procédant de la même façon, on peut montrer que la définition de $\sin x$ nous redonne bien la fonction que l'on connaît pour les nombres réels. Les autres fonctions trigonométriques sont définies à partir des fonctions sinus et cosinus exactement comme elles l'étaient pour les nombres réels.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

Si on sait calculer la fonction exponentielle d'un nombre complexe, on peut donc calculer la valeur des fonctions trigonométriques.

Exemple Calculer $\cos i$.

$$\begin{aligned}\cos i &= \frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} \\ &= \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} \\ &= 1{,}543\end{aligned}$$

Les fonctions trigonométriques inverses

Maintenant si on a $\cos w = z$ et que l'on connaît z, que vaut w? Pour le calculer, il faut faire

$w = \arccos z$.

On le calcule en isolant w dans

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} e^{iw} - 2z + e^{-iw} &= 0 \\ \left(e^{iw}\right)^2 - 2ze^{iw} + 1 &= 0\end{aligned}$$

En appliquant la formule quadratique, on a

$$\begin{aligned} e^{iw} &= \frac{2z + \sqrt{4z^2 - 4}}{2} \\ &= z + \sqrt{z^2 - 1}\end{aligned}$$

Notez que le ± n'est pas nécessaire puisqu'on l'insère automatiquement en calculant toutes les valeurs possibles de la racine en nombre complexe. Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} w &= \frac{\ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)}{i} \\ &= -i\ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)\end{aligned}$$

et ainsi

$$\boxed{\arccos z = -i\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)}.$$

En procédant de même façon, on obtient

$$\boxed{\arcsin z = -i\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)}.$$

Exemple Calculer $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$

Nous allons calculer cette valeur parce que nous savons par la trigonométrie ce que vaut cette expression, elle vaut

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$$

On vérifiera alors que la formule 1.8.1 nous donne la même réponse. On a donc

$$\begin{aligned}
\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} &= -i\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-1}\right)\\
&= -i\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{-\frac{1}{2}}\right)\\
&= -i\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pm i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&= -i\ln\left(e^{\pm i\frac{\pi}{4}+2\pi n i}\right)\\
&= -i\left(\pm i\frac{\pi}{4}+2\pi n i\right)\\
&= \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n.
\end{aligned}$$

Ce qui est bien correct.

____

EXERCICES

Calculez

1. $\cos 2$

2. $\cos (3 + 2i)$

3. $\sin (3 + 2i)$

4. $\sin 3\pi i$

5. $\cos (\pi + i\pi)$

6. $\cos i$

7. $\sin \left(\sqrt{2} - 4i\right)$

Trouvez toutes les solutions de

8. $\cos z = 0$

9. $\sin z = \cos 2i$

10. $\cos z = 3i$

11. Montrez que $\arctan z = \frac{i}{2} \ln \frac{i + z}{i - z}$

Calculez les expressions suivantes

12. $\arccos(2)$

13. $\arcsin(i)$

14. $\arctan(2i)$

Applications : identités trigonométriques

Toutes les relations concernant les nombres complexes trouvées précédemment peuvent être utilisées pour prouver des identités trigonométriques beaucoup plus facilement qu'avec les méthodes géométriques. On utilisera très souvent la relation

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta .$$

Exemple Prouver que $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$.

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_1 + \theta_2) &= \operatorname{Re}\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{i(\theta_1 + \theta_2)}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right] \\
&= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2
\end{aligned}$$

Exemple Exprimer $\sin 3\theta$ en terme de puissance de $\sin\theta$.

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \operatorname{Im}\left[e^{i3\theta}\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\left(e^{i\theta}\right)^3\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^3\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta\right] \\
&= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta
\end{aligned}$$

En utilisant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ on a

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta \\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\end{aligned}$$

On peut même pousser cet exemple un peu plus loin et trouver une autre relation trigonométrique. Comme sin 3θ est un polynôme de degré trois, on devrait pouvoir le factoriser et obtenir

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = k(\sin\theta - \alpha_1)(\sin\theta - \alpha_3)(\sin\theta - \alpha_3)$$

où les α sont les zéros du polynôme $3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 0$ et k est une constante. Comme cette équation est équivalente à $\sin 3\theta = 0$, les racines sont celles pour lesquelles $\theta = n\pi / 3$. Il y a trois valeurs différentes possibles, sin 0, sin π/3 et sin -π/3. Nous avons donc

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = k(\sin\theta - \sin 0)(\sin\theta - \sin\pi/3)(\sin\theta + \sin\pi/3)$$

En effectuant la multiplication des facteurs, il est aisé de voir que le coefficient de $\sin^3\theta$ devrait être égal à –4, ce qui implique que k = -4. Nous avons donc

$$\sin 3\theta = -4\sin\theta(\sin\theta - \sin\pi/3)(\sin\theta + \sin\pi/3)$$

Exemple Exprimer $\cos^3\theta$ en terme de $\cos n\theta$, où n est un entier.

$$\begin{aligned}\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{(e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3}{8} \\ &= \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} \\ &= \frac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + 3(\cos\theta + i\sin\theta) + 3(\cos\theta - i\sin\theta) + (\cos 3\theta - i\sin 3\theta)}{8} \\ &= \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta\end{aligned}$$

Exemple Exprimer à l'aide d'un seul cosinus $4\cos(x+\pi)+3\cos(x-\pi/2)$.

$$\begin{aligned}
4\cos(x+\pi)+3\cos(x-\pi/2) &= \mathrm{Re}\left[4e^{i(x+\pi)}+3e^{i(x-\pi/2)}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[4e^{ix}e^{i\pi}+3e^{ix}e^{-i\pi/2}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{ix}\left(4e^{i\pi}+3e^{-i\pi/2}\right)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{ix}(-4-3i)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{ix}5e^{-2,498i}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[5e^{i(x-2,498)}\right] \\
&= 5\cos(x-2,489)
\end{aligned}$$

EXERCICES

1. Démontrez que $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

2. Démontrez que $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

3. Démontrez que $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

4. Démontrez que $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

5. Démontrez que $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

6. Démontrer que $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

5. Exprimez $\sin 3\theta$ comme un polynôme de $\sin\theta$.

6. Exprimez $\cos 7\theta$ comme un polynôme de $\cos\theta$.

7. Exprimez $\sin 7\theta$ comme un polynôme de $\sin\theta$.

8. Exprimez $\cos^6\theta$ comme une somme de $\cos n\theta$.

9. Démontrez $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

10. Calculez $3\cos(\theta+\pi) + 4\cos(\theta+\pi/2)$ sous la forme $A\cos(\theta+\phi)$.