1 QUELQUES RAPPELS

1.1 LES UNITÉS DE MESURE

Nous allons travailler ici avec le système d'unités international, aussi appelé système SI.

La longueur

L'unité de base de la longueur du système SI est le mètre, abrégé *m*.

À partir de cette unité, on peut faire plusieurs autres unités de longueur en utilisant certains préfixes. Les préfixes utilisés dans ce cours seront les suivants.

Préfixe	Facteur de multiplication	Symbole
giga	x 1 000 000 000	G
méga	x 1 000 000	M
kilo	x 1000	k
déci	x 0,1	d
centi	x 0,01	c
milli	x 0,001	m
micro	x 0,000 001	μ

Ainsi, 1 kilomètre (1 km) correspond à une distance de 1000 m alors qu'un centimètre correspond à une longueur de 0,01 m.

Comment convertir les unités avec des préfixes ?

Pour transformer une unité avec un préfixe en mètre, il suffit de remplacer le préfixe par le facteur de conversion du tableau précédent.

Exemple 1.1.1

Convertissez 5,34 cm en mètre.

Puisque le préfixe centi vaut 0,01, on a

$$5,34 \times 0,01m = 0,0534m$$

Si on veut transformer une unité sans préfixe dans une unité avec un préfixe, il faut diviser par le facteur de multiplication du tableau.

Exemple 1.1.2

Convertissez 0,629 m en millimètre.

Puisque le préfixe milli vaut 0,001, on a

$$0,629m = \frac{0,629}{0,001} mm = 629mm$$

On peut aussi mesurer la longueur avec d'autres systèmes d'unités. Dans le système anglais, on mesure les distances en pieds, en pouces ou en verge. (En fait, il y en a bien d'autres, mais qui ne seront pas utilisés ici.)

Système anglais : pouce (po) et pied (pi)

12 pouces = 1 pied
3 pieds = 1 verge

On utilise alors les facteurs de conversions suivants pour changer les unités de mesure.

Unité de départ	Multipliez par	Pour obtenir des
pi	30,48	cm
pi	0,3048	m
po	2,540	cm
po	0,0254	m
verge	91,44	cm
verge	0,9144	m

Exemple 1.1.3

Convertissez 45,78 pouces en centimètre.

Selon le tableau, il faut multiplier par 2,540 pour convertir les pouces en centimètres. On a donc

$$45,78 \times 2,540 = 116,2812cm$$

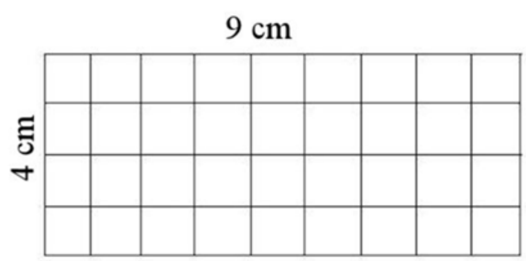
L’aire

L’unité de base pour mesurer l’aire d’une surface est le mètre carré, abrégé m².

À partir de cette unité, on peut faire plusieurs autres unités de longueur en utilisant les préfixes. Par exemple, on peut mesurer l’aire en cm².

<u>*Comment convertir les unités avec des préfixes ?*</u>

Pour bien comprendre la règle qu’on obtiendra, imaginons qu’on calcule l’aire de cette surface rectangulaire.



En cm², l’aire est de

$$4cm \cdot 9cm = 36cm^2$$

Pour obtenir une aire en m², il faut convertir chacune de ces unités en mètres. On aura alors

$$\begin{aligned} 4cm \cdot 9cm &= \left(4 \times 0{,}01m\right) \cdot \left(9 \times 0{,}01m\right) \\ &= 0{,}0036m^2 \end{aligned}$$

Puisqu’on a dû appliquer le facteur de conversion deux fois, on arrive à la règle suivante : Pour transformer une unité d’aire avec un préfixe, il suffit de remplacer le préfixe par le facteur de conversion <u>au carré</u>.

Exemple 1.1.4

Convertissez 165,2 cm² en m².

Puisque le préfixe centi vaut 0,01, on a

$$165{,}2cm^2 = 165{,}2 \times \left(0{,}01\right)^2 m^2 = 0{,}01652m^2$$

Si on veut transformer une unité sans préfixe dans une unité avec un préfixe, il faut diviser par le facteur de multiplication du tableau <u>au carré</u>.

Exemple 1.1.5

Convertissez 0,361 m² en mm².

Puisque le préfixe milli vaut 0,001, on a

$$0,361 m^2 = \frac{0,361}{(0,001)^2} mm^2 = 361\,000 mm^2$$

On peut aussi mesurer l'aire avec d'autres systèmes d'unités. Dans le système anglais, on mesure les aires en pieds carrés et en pouces carrés. (En fait, il y en a bien d'autres, mais qui ne seront pas utilisés ici.)

Système anglais : pouce carré (po²) et pied carré (pi²)

144 po² = 1 pi²

On utilise alors les facteurs de conversions suivants pour changer les unités de mesure.

Unité de départ	Multipliez par	Pour obtenir des
pi²	929,0	cm²
pi²	0,0929	m²
po²	6,452	cm²
po²	0,000 645 2	m²

Exemple 1.1.6

Convertissez 13,4 po² en cm².

Selon le tableau, il faut multiplier par 6,452 pour convertir les pouces carrés en centimètres carrés. On a donc

$$13,4 \times 6,452 = 86,4568 cm^2$$

Exemple 1.1.7

Convertissez 55 po² en mm².

Malheureusement, on n'a pas le facteur de conversion des po² vers les mm² dans le tableau. Dans ce cas, on va commencer par convertir en m². Selon le tableau, il faut multiplier par 0,000 645 2 pour convertir les pouces carrés en mètres carrés. On a donc

$$55 \times 0,000\ 645\ 2 = 0,035486 m^2$$

On ajoute ensuite le préfixe milli

$$0,035486 m^2 = \frac{0,035486}{\left(0,001\right)^2} mm^2 = 35\ 486 mm^2$$

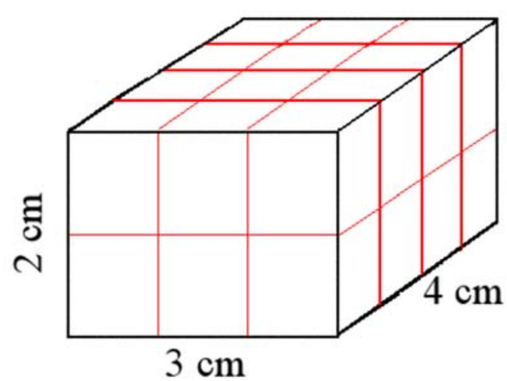
Le volume

L'unité de base pour mesurer le volume d'un objet est le mètre cube, abrégé m³.

À partir de cette unité, on peut faire plusieurs autres unités de longueur en utilisant les préfixes. Par exemple, on peut mesurer le volume en cm³.

Comment convertir les unités avec des préfixes ?

Pour bien comprendre la règle qu'on obtiendra, imaginons qu'on calcule le volume de cet objet.



En cm³, le volume est de

$$2cm \cdot 3cm \cdot 4cm = 24cm^3$$

Pour obtenir un volume en m³, il faut convertir chacune de ces unités en mètres. On aura alors

$$\begin{aligned} 2cm \cdot 3cm \cdot 4cm &= (2 \times 0{,}01m) \cdot (3 \times 0{,}01m) \cdot (4 \times 0{,}01m) \\ &= 0{,}000024m^3 \end{aligned}$$

Puisqu'on a dû appliquer le facteur de conversion trois fois, on arrive à la règle suivante : Pour transformer une unité de volume avec un préfixe, il suffit de remplacer le préfixe par le facteur de conversion au cube.

Exemple 1.1.8

Convertissez 3580 dm³ en m³.

Puisque le préfixe déci vaut 0,1, on a

$$3580dm^3 = 3580 \times (0{,}1)^3 m^3 = 3{,}58m^3$$

Si on veut transformer une unité de volume sans préfixe dans une unité de volume avec un préfixe, il faut diviser par le facteur de multiplication de tableau au cube.

Exemple 1.1.9

Convertissez 0,0856 m³ en cm³.

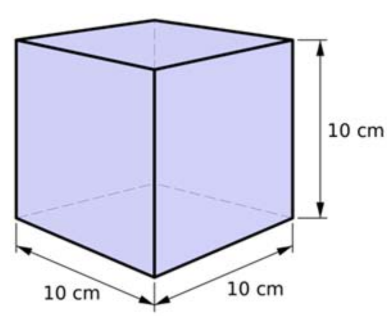
Puisque le préfixe centi vaut 0,01, on a

$$0{,}0856m^3 = \frac{0{,}0856}{(0{,}01)^3} cm^3 = 85\,600cm^3$$

Notez qu'on utilise aussi le litre pour mesurer le volume. Le litre est simplement

1 litre = 0,001 m³

En fait, c'est le volume d'un cube de 10 cm par 10 cm par 10 cm. Cela fait que 1000 cm³ = 1 litre, et donc que 1 cm³ est égal à un 1 millilitre.



en.wikipedia.org/wiki/Metric_system

Exemple 1.1.10

À combien de mm³ correspond un volume de 400 ml ?

Convertissons premièrement les millilitres en litre. On a

$$400ml = 400 \times 0,001l = 0,4l$$

Puisqu'un litre vaut 0,001 m³, ce volume est

$$0,4 \times 0,001m^3 = 0,0004m^3$$

Changeons finalement les m³ en mm³

$$0,0004m^3 = \frac{0,0004}{0,001^3}mm^3 = 400\,000mm^3$$

On peut aussi mesurer l'aire avec d'autres systèmes d'unités. Dans le système anglais, on mesure les volumes en pieds cubes et en pouces cubes.

Système anglais : pouce cube (po³) et pied cube (pi³)

1728 po³ = 1 pi³

On utilise alors les facteurs de conversions suivants pour changer les unités de mesure.

Unité de départ	Multipliez par	Pour obtenir des
pi³	28 317	cm³
pi³	0,02832	m³
po³	16,39	cm³
po³	0,00001639	m³

Exemple 1.1.11

Convertissez 24 pi³ en m³.

Selon le tableau, il faut multiplier par 0,02832 pour convertir les pieds cubes en mètres cubes. On a donc

$$24 \times 0,02832 = 0,67968m^3$$

Il y a bien d'autres unités de volume utilisées dans le système anglais. Ce qui complique encore plus les choses, c'est que les Américains et les Anglais utilisent les mêmes noms d'unités, mais qui correspondent à des volumes différents ! Les unités principales sont

Système anglais : once fluide (oz), gallon (gal)

1 once fluide impériale = 28,41 ml
1 once fluide américaine = 29,57 ml

1 gallon impérial = 160 onces impériales = 4,546 l
1 gallon américain = 128 onces américaines = 3,785 l

On a alors les facteurs de conversion suivants pour convertir en unités du système international.

Unité de départ	Multipliez par	Pour obtenir des
once (imp)	28,41	cm^3 ou ml
once (imp)	0,028 41	l
once (US)	29,57	cm^3 ou ml
once (US)	0,02957	l
gal (imp)	4546	cm^3 ou ml
gal (imp)	4,546	l
gal (imp)	0,004546	m^3
gal (US)	3785	cm^3 ou ml
gal (US)	3,785	l
gal (US)	0,003785	m^3

Exemple 1.1.12

Convertissez 5 gallons (US) en litres

Selon le tableau, il faut multiplier par 3,785 pour convertir les gallons en litres. On a donc

$$5 \times 3,785 = 18,923 l$$

La masse

L'unité de base pour mesurer la masse est le gramme (g)

À partir de cette unité, on peut faire plusieurs autres unités de longueur en utilisant les préfixes. Par exemple, on peut mesurer la masse avec le kg.

Comment convertir les unités avec des préfixes ?

On change simplement le préfixe par le facteur de multiplication.

Exemple 1.1.13

Convertissez 350 mg en g.

Puisque le préfixe milli vaut 0,001, on a

$$350mg = 350 \times (0,001)\, g = 0,35g$$

Si on veut transformer une unité de volume sans préfixe dans une unité de volume avec un préfixe, il faut diviser par le facteur de multiplication.

Exemple 1.1.14

Convertissez 1200 g en kg.

Puisque le préfixe kilo vaut 1000, on a

$$1200g = \frac{1200}{1000} kg = 1,2kg$$

Exemple 1.1.15

Convertissez 50 mg en kg.

On va commencer par changer les mg en gramme pour éliminer le préfixe. Puisque le préfixe milli vaut 0,001, on a

$$50mg = 50 \times (0,001)\, g = 0,05g$$

Puis, on ajoute le préfixe kilo. Puisque le préfixe kilo vaut 1000, on a

$$0,05g = \frac{0,05}{1000} kg = 0,00005kg$$

Notez qu'on donne aussi le nom de tonne au mégagramme

1 tonne = 1000 kg = 1 Mg

On peut aussi mesurer la masse avec d'autres systèmes d'unités. Dans le système anglais, on mesure les masses avec des onces, des livres et des tonnes.

Système anglais : onces (oz) et livre (lb)

16 onces (oz) = 1 livre
2000 livres = 1 tonne
2240 livres = 1 tonne américaine ou tonne longue

On utilise alors les facteurs de conversions suivants pour changer les unités de mesure.

Unité de départ	Multipliez par	Pour obtenir des
oz	28,35	g
oz	0,02835	kg
lb	453,6	g
lb	0,4536	kg
Tonne (Imp)	907,2	kg
Tonne (US)	1016	kg

Exemple 1.1.16

Convertissez 320 livres en kg.

Selon le tableau, il faut multiplier par 0,4536 pour convertir les livres en kilogrammes. On a donc

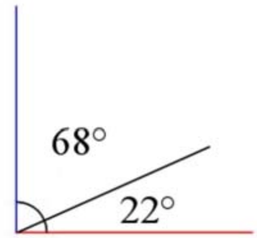
$$320 \times 0,4536 = 145,152 kg$$

1.2 LES ANGLES

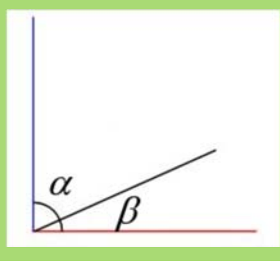
Les angles sont mesurés en degrés. Un tour est 360°. Voici quelques exemples d'angles.

Angles complémentaires

Deux angles sont complémentaires si la somme des deux angles est de 90°. Par exemple, les deux angles de la figure de droite sont complémentaires



Angles complémentaires



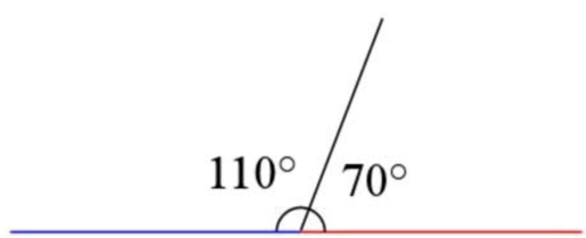
$$\alpha + \beta = 90°$$

Cette formule nous permet de constater qu'on va noter les angles avec des lettres de l'alphabet grec. Les noms de ces lettres sont les suivants.

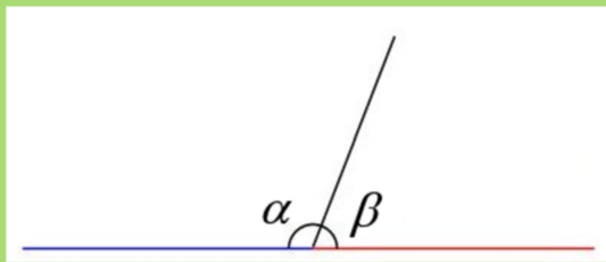
α	alpha	ν	nu
β	bêta	ξ	xi
γ	gamma	ο	omicron
δ	delta	π	pi
ε	epsilon	ρ	rhô
ζ	dzéta	σ	sigma
η	êta	τ	tau
θ	thêta	υ	upsilon
ι	iota	φ	phi
κ	kappa	χ	khi
λ	lambda	ψ	psi
μ	mu	ω	oméga

Angles supplémentaires

Deux angles sont supplémentaires si la somme des deux angles est de 180°. Par exemple, ces deux angles de la figure de droite sont supplémentaires.



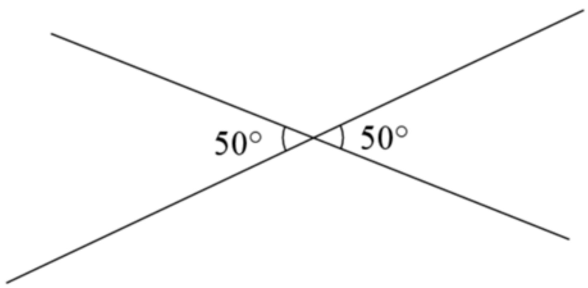
Angles supplémentaires



$\alpha + \beta = 180°$

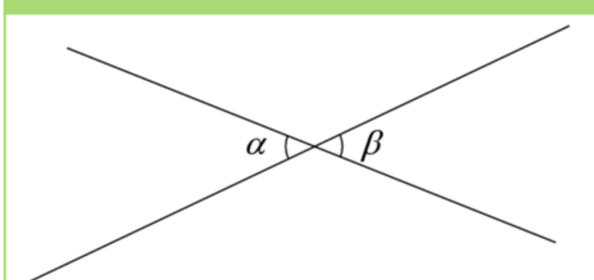
Angles opposés par le sommet

Quand deux droites se croisent, il y a deux angles opposés par le sommet. Voici deux angles opposés par le sommet.



Les angles opposés par le sommet ont toujours la même valeur.

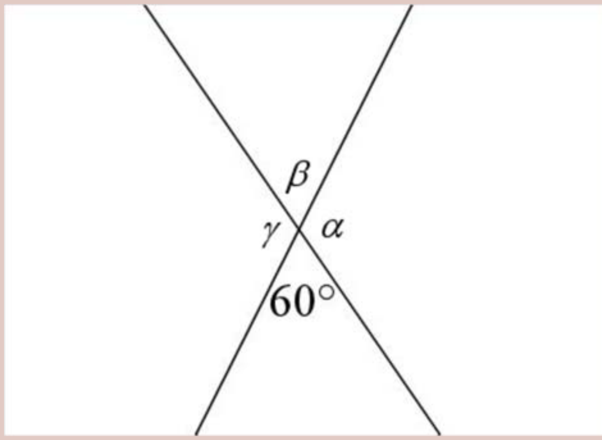
Angles opposés par le sommet



$\alpha = \beta$

Exemple 1.2.1

Trouvez les valeurs de α, β et γ.



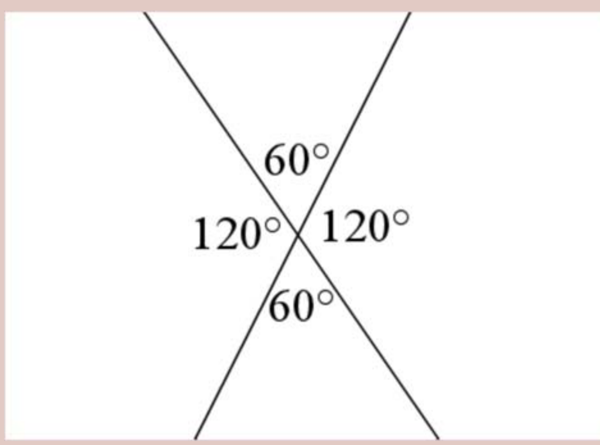
Les angles α et 60° sont supplémentaires. On a donc

$$\alpha + 60° = 180°$$
$$\alpha = 180° - 60°$$
$$\alpha = 120°$$

Les angles γ et 60° sont supplémentaires. On a donc

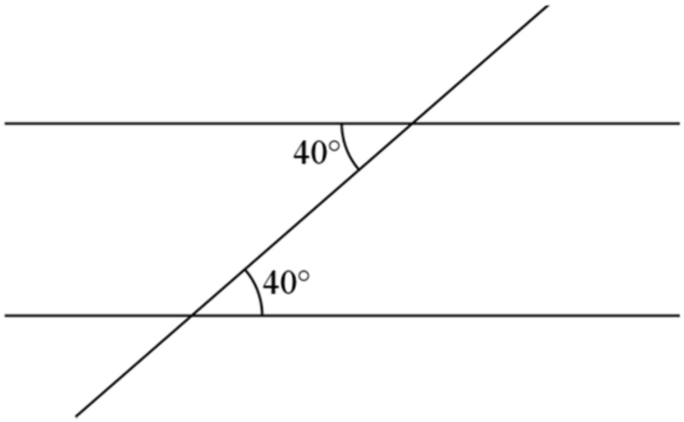
$$\gamma + 60° = 180°$$
$$\gamma = 180° - 60°$$
$$\gamma = 120°$$

Les angles β et 60° sont opposés par le sommet. L'angle β vaut donc 60°. Notre réponse finale est donc



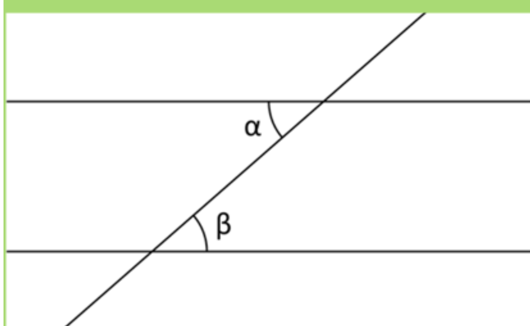
Angles alternes-internes

Quand une droite croise deux droites parallèles, on a la situation suivante.



Ces angles sont les angles alternes-internes et ils sont toujours égaux.

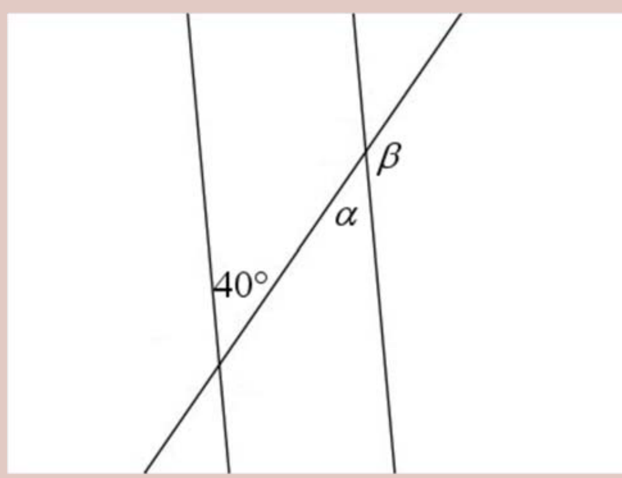
Angles alternes-internes



$\alpha = \beta$

Exemple 1.2.2

Trouvez les valeurs de α et β.

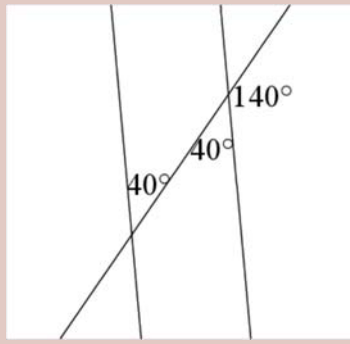


Les angles α et 40° sont alternes-internes. L'angle α vaut donc 40°.

Les angles α et β sont supplémentaires. On a donc

$$\alpha + \beta = 180°$$
$$40° + \beta = 180°$$
$$\beta = 180° - 40°$$
$$\beta = 140°$$

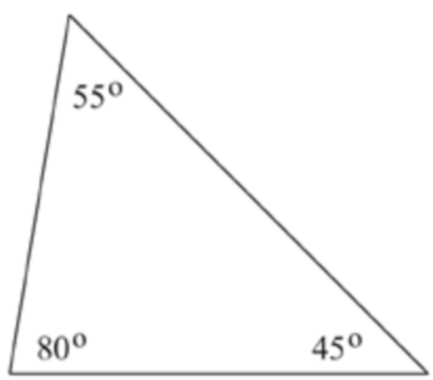
Notre réponse finale est donc



1.3 LES TRIANGLES

Somme des angles d'un triangle

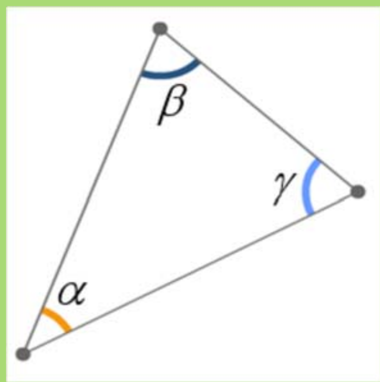
Dans un triangle comme celui-ci



openstudy.com/updates/51143c6ae4b0e554778b2344

On remarque que la somme des angles est toujours de 180°.

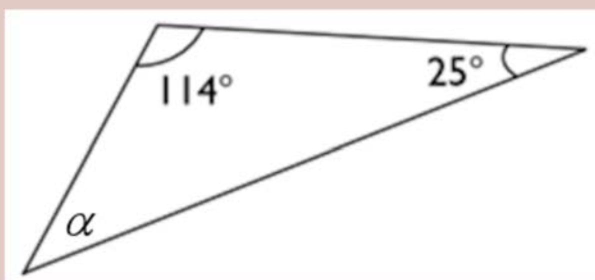
Somme des angles d'un triangle



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Exemple 1.3.1

Quel est le troisième angle de ce triangle



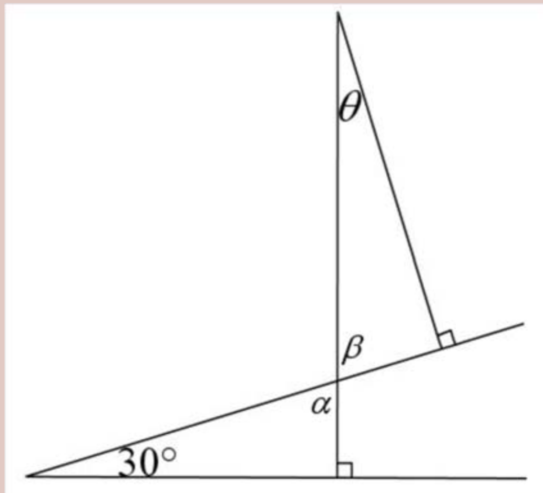
www.assistancescolaire.com/eleve/5e/maths/lexique/S-somme-des-angles-d-un-triangle-mc_s18

Puisque la somme des angles d'un triangle est de 180°, on a

$$\alpha + 114° + 25° = 180°$$
$$\alpha + 139° = 180°$$
$$\alpha = 180° - 139°$$
$$\alpha = 41°$$

Exemple 1.3.2

Quelle est la valeur de θ dans cette figure ?

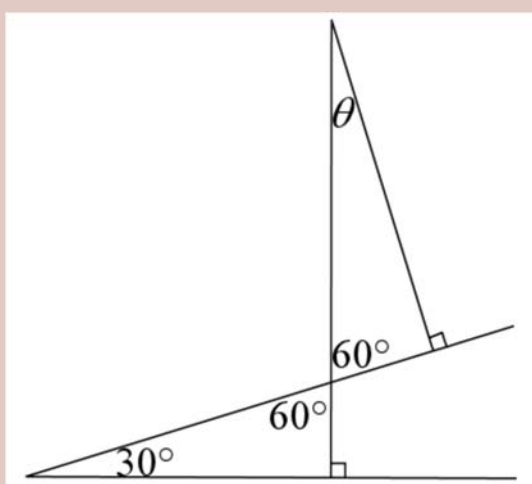


Note : les petits carrés signifient qu'on a un angle de 90° à cet endroit.

On peut premièrement trouver les angles du triangle du bas (celui avec l'angle de 30° et α). Comme la somme des angles de ce triangle doit être de 180°, on a

$$\begin{aligned}\alpha + 30° + 90° &= 180° \\ \alpha + 120° &= 180° \\ \alpha &= 180° - 120° \\ \alpha &= 60°\end{aligned}$$

Puisque les angles α et β sont opposés par le sommet, l'angle β vaut aussi 60°. On a maintenant la situation suivante.

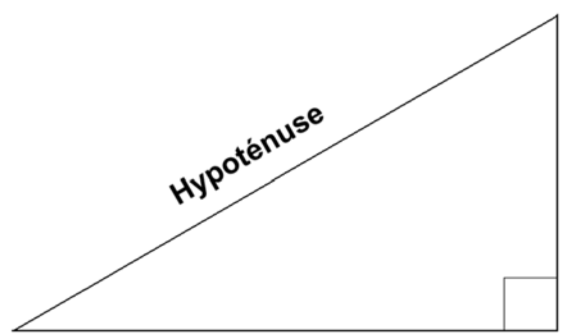


On peut finalement trouver les angles du triangle du haut (celui avec l'angle de 60° et θ). Comme la somme des angles de ce triangle doit être de 180°, on a

$$\theta + 60° + 90° = 180°$$
$$\theta + 150° = 180°$$
$$\theta = 180° - 150°$$
$$\theta = 30°$$

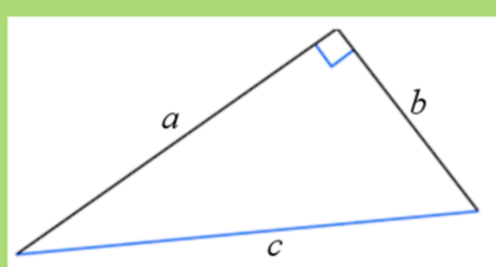
Le théorème de Pythagore

Un triangle rectangle est un triangle dont un des angles est de 90°. Le côté opposé à l'angle de 90° (qu'on appelle un angle droit) s'appelle l'hypoténuse.



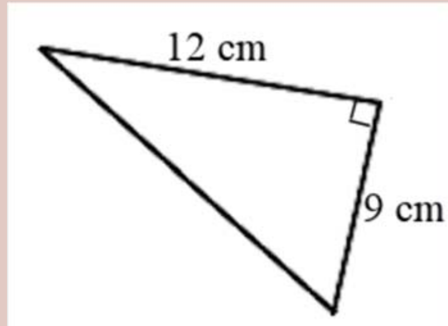
On peut trouver la grandeur de l'hypoténuse quand on connait la longueur des deux autres côtés du triangle grâce au théorème de Pythagore.

Théorème de Pythagore



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Exemple 1.3.3

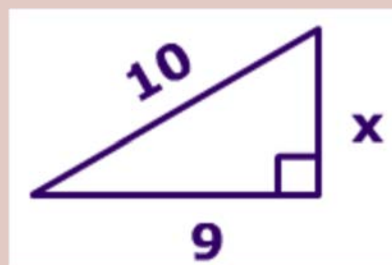


Quelle est la grandeur de l'hypoténuse de ce triangle ?

On trouve la grandeur de l'hypoténuse ainsi.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = (12cm)^2 + (9cm)^2$$
$$c^2 = 225cm^2$$
$$c = \sqrt{225cm^2}$$
$$c = 15cm$$

Exemple 1.3.4



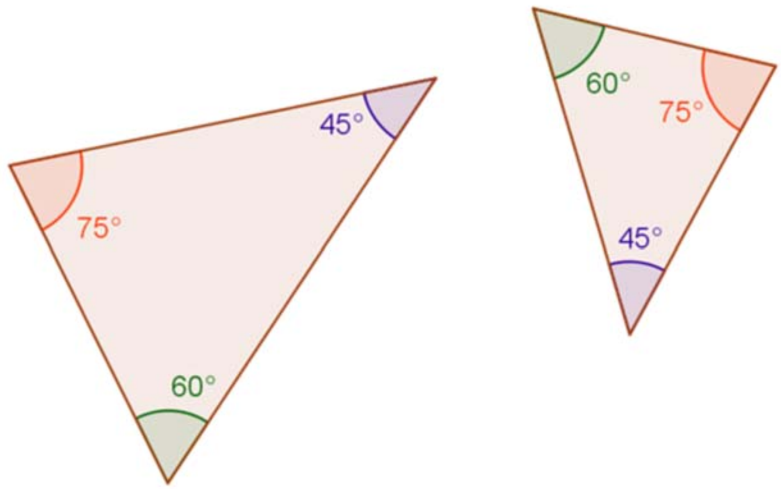
Quelle est la valeur de x dans ce triangle ?

Puisque la grandeur de l'hypoténuse est de 10, on a

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$(10cm)^2 = x^2 + (9cm)^2$$
$$100cm^2 = x^2 + 81cm^2$$
$$100cm^2 - 81cm^2 = x^2$$
$$19cm^2 = x^2$$
$$\sqrt{19cm^2} = x$$
$$4,359cm = x$$

Les triangles semblables

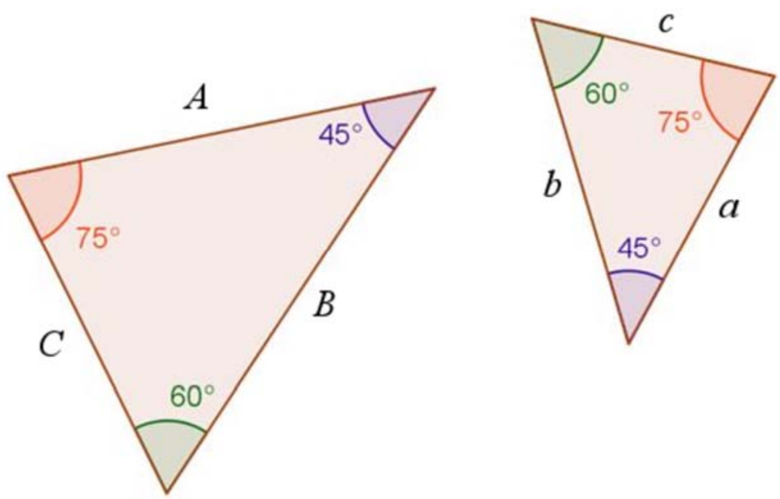
Des triangles semblables sont des triangles ayant des angles égaux. Par contre, la longueur des côtés peut être différente. Par exemple, les deux triangles suivants sont semblables.



mathe.lu/thales/page-1.cours

Avec des triangles semblables, le triangle 1 est identique au triangle 2, à l'exception qu'il peut y avoir un changement d'échelle et une rotation. Par exemple, dans notre figure, le triangle de gauche est identique au triangle de droite, sauf qui est 1½ fois plus gros que le triangle de droite et qu'il est tourné de 130° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre par rapport au triangle de droite.

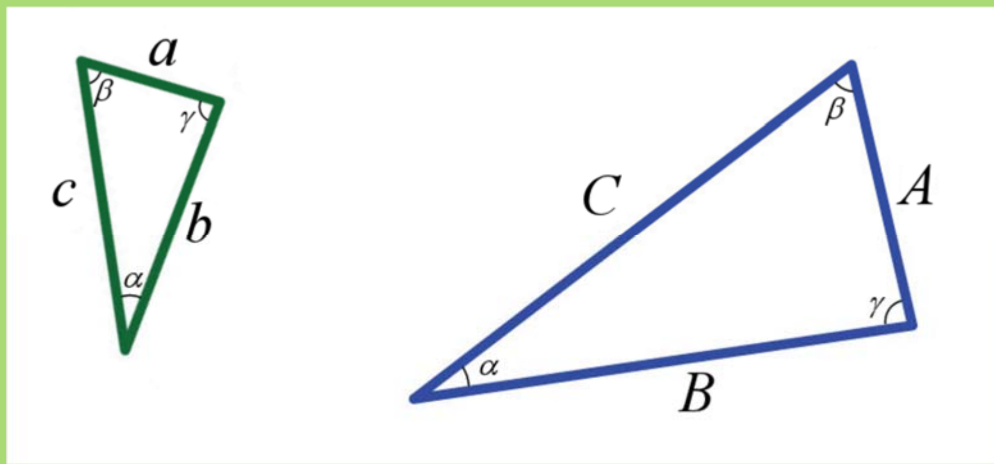
On va identifier les côtés par des lettres identiques (une sera minuscule et l'autre majuscule) quand les côtés sont opposés au même angle. Avec nos deux triangles, les côtés A et a pourraient être les côtés opposés à l'angle de 60°, les côtés B et b pourraient être les côtés opposés à l'angle de 75° et les côtés C et c pourraient être les côtés opposés à l'angle de 45°.



mathe.lu/thales/page-1.cours

Puisque le triangle de gauche est simplement une version agrandie du triangle de droite, le rapport des côtés correspondants devrait toujours être le même. Ainsi, si le côté A est 1½ fois plus grand que le côté a, alors le côté B est aussi 1½ fois plus grand que le côté b.
On a donc la loi suivante.

Rapport des côtés dans des triangles semblables

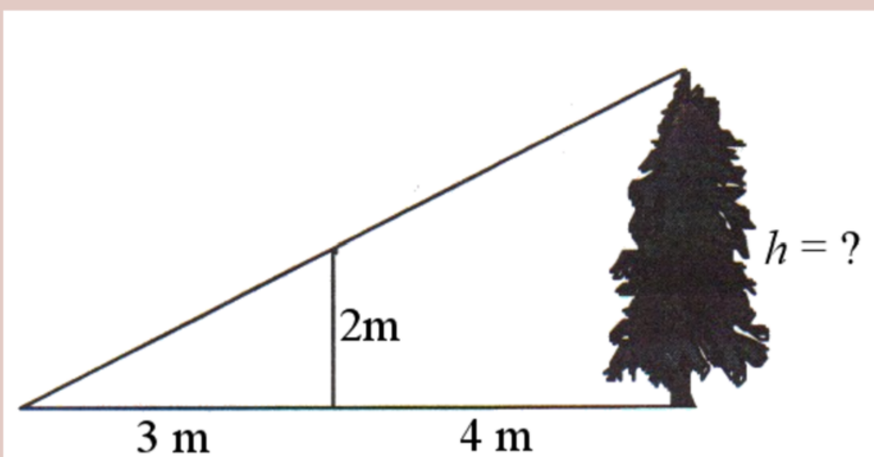


catalog.flatworldknowledge.com/bookhub/reader/128?e=fwk-redden-ch02_s06

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$$

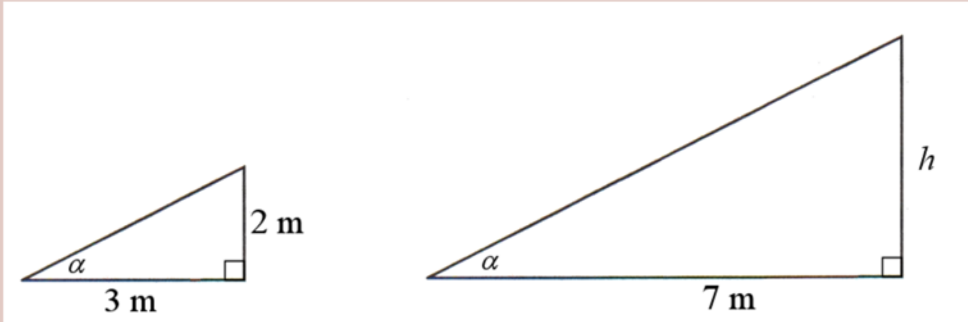
Exemple 1.3.5

Quelle est la hauteur de cet arbre ?



similartriangles3.pbworks.com/w/page/23053498/Applying%20Similar%20Triangles%20to%20the%20Real%20World

Dans cette situation, on a deux triangles qui sont les suivants.



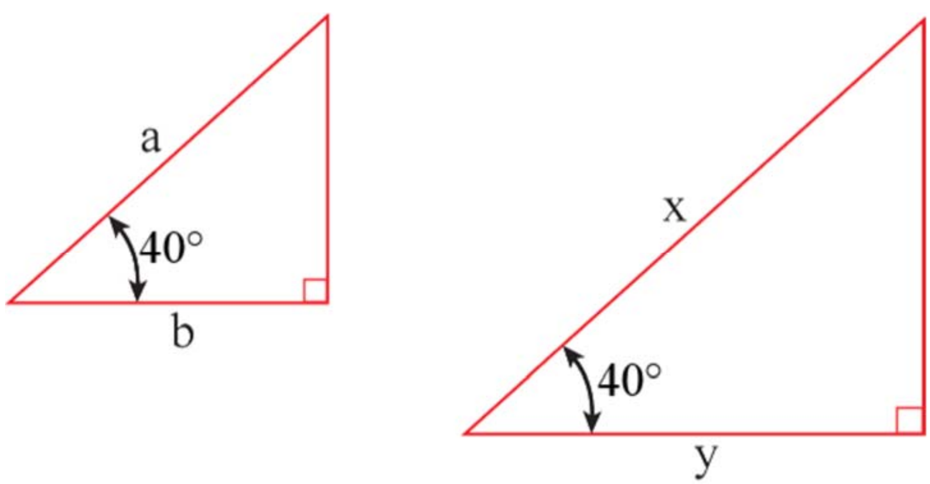
Les triangles sont similaires parce que les trois angles sont identiques. On a l'angle *a* qui est évidemment identique parce qu'il vient du même endroit sur la figure de départ et un autre angle de 90°. Puisque les triangles sont semblables, les rapports des côtés sont le même. On a donc

$$\frac{h}{2m} = \frac{7m}{3m}$$
$$h = \frac{7m}{3m} \cdot 2m$$
$$h = 4,667m$$

1.4 LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Le rapport des côtés d'un triangle rectangle

Selon la règle des triangles semblables, ces deux triangles sont identiques, sauf que le triangle de droite est une version de gauche.



www.codecogs.com/library/maths/geometry/pure/triangles-and-circles.php

On a donc, selon la loi des triangles semblables,

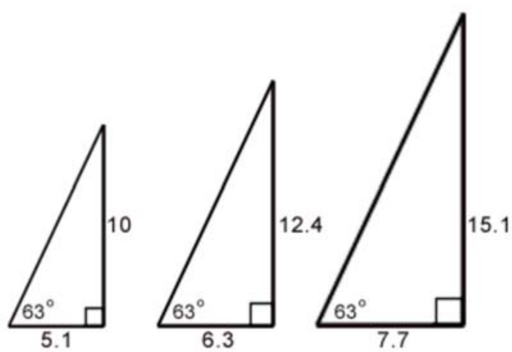
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

On peut réécrire cette formule ainsi

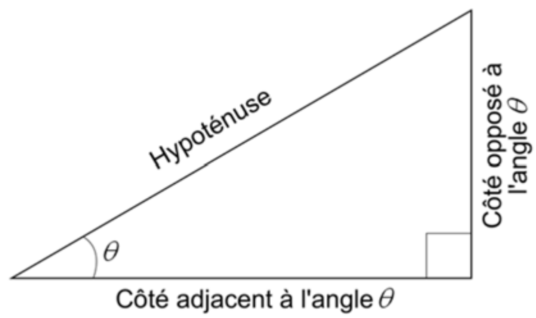
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$
$$\frac{xb}{a} = \frac{yb}{b}$$
$$\frac{xb}{a} = y$$
$$\frac{xb}{ax} = \frac{y}{x}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$$

Cette dernière équation nous dit que le rapport des côtés dans les deux triangles est le même. Quand on divise la longueur d'un côté par la longueur d'un autre côté d'un triangle, on obtient le même résultat pour tous les triangles semblables, donc tous les triangles qui ont les mêmes angles.

Par exemple, vous obtenez toujours la même valeur (1,96) si vous divisez la longueur du côté verticale par la longueur du côté horizontale dans ces trois triangles rectangles semblables.



Ce résultat est particulièrement intéressant pour les triangles rectangles. Dans ces triangles, on donne les noms suivant aux différents côtés.



fr.wikiversity.org/wiki/Mécanique_pour_l'enseignement_technique_industriel/Éléments_de_géométrie

Selon ce qu'on a dit jusqu'ici, le rapport du côté opposé à l'angle et du l'hypoténuse est identique pour tous les triangles qui ont un angle de $\theta = 40°$, par exemple.

On a aussi donné un nom au rapport entre les côtés. Ces noms sont

Définition des sinus, cosinus et tangente

$$\text{sinus} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\text{cosinus} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

(C'est plate, mais il faut pratiquement connaître ces définitions par cœur.)

Tous les triangles rectangles qui ont un angle de 40° ont donc les même sinus, cosinus et tangente. Pour ces triangles, on a

sinus = 0,643 cosinus = 0,766 tangente = 0,839

Si on change l'angle, les rapports des côtés changent. Pour un triangle avec un angle de 42°, les rapports sont

sinus = 0,669 cosinus = 0,743 tangente = 0,900

Ces rapports sont bons pour tous les triangles rectangles avec un angle de 42°.

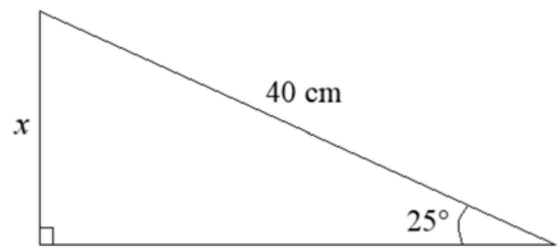
Comme la valeur des sinus, cosinus et tangente change selon l'angle, on va adopter la notation suivante pour qu'on puisse savoir à quel angle correspond la valeur du rapport des côtés.

sin 40° = 0,643	cos 40° = 0,766	tan 40° = 0,839
sin 42° = 0,669	cos 42° = 0,743	tan 42° = 0,900

Ces fonctions portent le nom de *fonctions trigonométriques*.

Ici, on a la valeur des fonctions trigonométriques uniquement pour des angles de 40° et 42°. Autrefois, on se promenait avec des tables de fonctions trigonométriques qui donnaient la valeur de chacune de ces fonctions pour tous les angles. Maintenant, on peut simplement utiliser la calculatrice pour obtenir la valeur d'une de ces fonctions trigonométriques. Ainsi, si on veut connaitre la valeur du sinus d'un triangle avec un angle de 22°, on n'a qu'à pitonner sinus 22° sur la calculatrice pour obtenir 0,3746. Cela signifie que « dans tous les triangles rectangles avec un angle de 22°, le rapport du côté opposé à l'angle de 22° et de l'hypoténuse vaut 0,3746 ».

Résolution de triangles à l'aide des fonctions trigonométriques



Supposons qu'on ait le triangle de la figure de droite et qu'on cherche la valeur de x.

On peut trouver la valeur de x en utilisant une des fonctions trigonométriques. Dans ce cas, on cherche la valeur du côté opposé à l'angle alors qu'on connait l'hypoténuse. La seule fonction trigonométrique qui fait le rapport entre ces deux côtés est le sinus

$$\text{sinus} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

On a donc

$$\sin 25° = \frac{x}{40cm}$$

Avec la calculatrice, on obtient

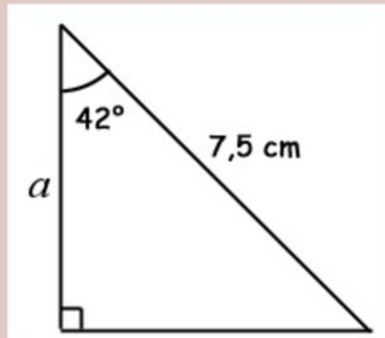
$$0,4226 = \frac{x}{40cm}$$

Il ne reste qu'à isoler x.

$$
\begin{aligned}
0,4226 &= \frac{x}{40cm} \\
0,4226 \times 40cm &= \frac{x}{40cm} \times 40cm \\
0,4226 \times 40cm &= x \\
16,90cm &= x
\end{aligned}
$$

Exemple 1.4.1

Quelle est la valeur de *a* dans ce triangle ?



www.intellego.fr/soutien-scolaire-4eme/aide-scolaire-mathematiques/06.-cosinus-d-un-angle/11784

On cherche l'angle adjacent à l'angle de 42° alors qu'on connait l'hypoténuse. La fonction trigonométrique qui fait le lien entre ces deux côtés est le cosinus.

$$\text{cosinus} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

On a donc

$$\cos 42° = \frac{a}{7,5cm}$$

Avec la calculatrice, on obtient

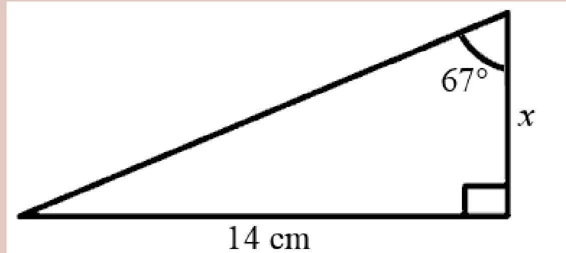
$$0,7431 = \frac{a}{7,5cm}$$

Il ne reste qu'à isoler *a*.

$$
\begin{aligned}
0,7431 &= \frac{a}{7,5cm} \\
0,7431 \times 7,5cm &= \frac{a}{7,5cm} \times 7,5cm \\
0,7431 \times 7,5cm &= a \\
5,574cm &= a
\end{aligned}
$$

Exemple 1.4.2

Quelle est la valeur de x dans ce triangle ?



On cherche l'angle adjacent à l'angle de 67° alors qu'on connait le côté opposé. La fonction trigonométrique qui fait le lien entre ces deux côtés est la tangente.

$$\text{tangente} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

On a donc

$$\tan 67° = \frac{14cm}{x}$$

Avec la calculatrice, on obtient

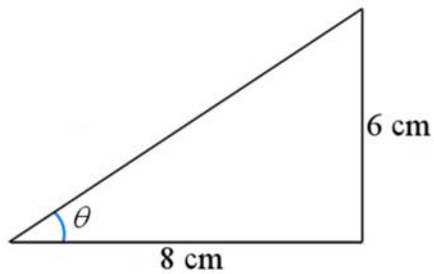
$$2,3559 = \frac{14cm}{x}$$

Il ne reste qu'à isoler x.

$$2,3559 = \frac{14cm}{x}$$
$$2,3559 \times x = \frac{14cm}{x} \times x$$
$$2,3559 \times x = 14cm$$
$$\frac{2,3559 \times x}{2,3559} = \frac{14cm}{2,3559}$$
$$x = \frac{14cm}{2,3559}$$
$$x = 5,943cm$$

Les fonctions trigonométriques inverses

Dans la situation suivante, on connait deux côtés du triangle, mais on ne connait pas l'angle.



Par contre, on connait les côtés opposé et adjacent à l'angle. On doit donc avoir

$$\text{tangente} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$
$$\tan\theta = \frac{6cm}{8cm}$$
$$\tan\theta = 0,75$$

Il faudra alors pouvoir trouver la valeur de θ dans cette équation. Pour y arriver, on utilise les fonctions trigonométriques inverses. Voici ce que sont ces fonctions.

Fonctions trigonométriques inverses

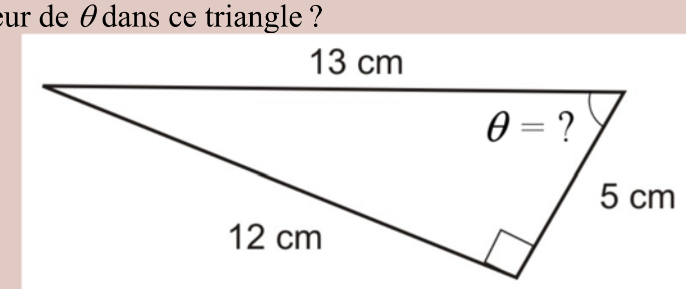
$$\sin\theta = x \quad \rightarrow \quad \theta = \sin^{-1} x$$
$$\cos\theta = x \quad \rightarrow \quad \theta = \cos^{-1} x$$
$$\tan\theta = x \quad \rightarrow \quad \theta = \tan^{-1} x$$

L'angle dans notre triangle est donc

$$\tan\theta = 0,75$$
$$\theta = \tan^{-1} 0,75$$
$$\theta = 36,9°$$

Exemple 1.4.3

Quelle est la valeur de θ dans ce triangle ?



www.ck12.org/user:YWtlZWxlckBhY2VsZnJlc25vLm9yZw../book/ACEL-Geometry-2012-2013/r2/section/8.5/

Comme on connait les trois côtés, on a le choix de prendre n'importe quelle fonction trigonométrique. On va prendre le sinus

$$\text{sinus} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

On a donc

$$\sin\theta = \frac{12cm}{13cm}$$

Avec la calculatrice, on obtient

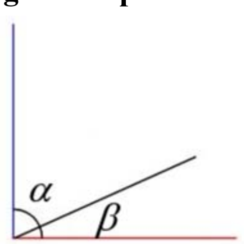
$$\sin\theta = 0,9231$$

Il ne reste qu'à isoler θ.

$$\begin{gathered}\sin\theta = 0,9231 \\ \theta = \sin^{-1} 0,9231 \\ \theta = 67,38°\end{gathered}$$

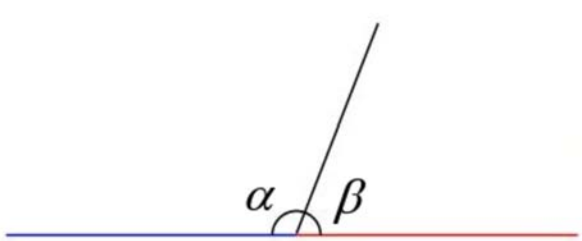
RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Angles complémentaires



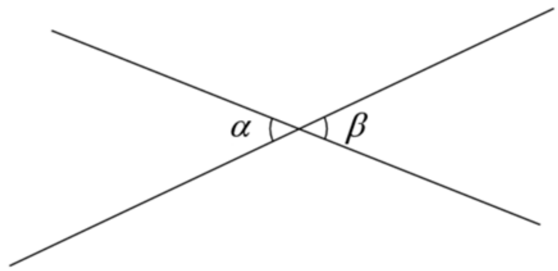
$$\alpha + \beta = 90°$$

Angles supplémentaires



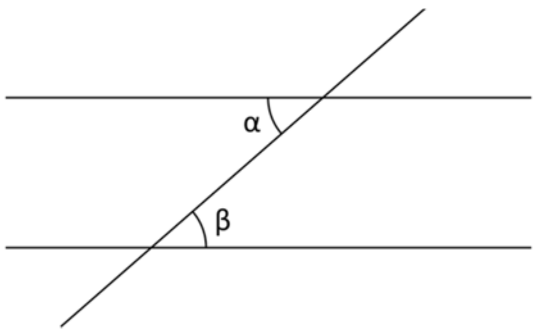
$$\alpha + \beta = 180°$$

Angles opposés par le sommet



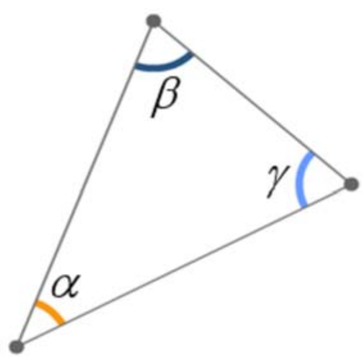
$\alpha = \beta$

Angles alternes-internes



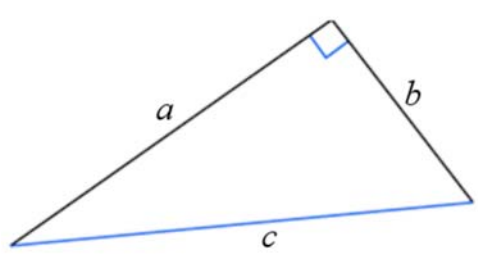
$\alpha = \beta$

Somme des angles d'un triangle



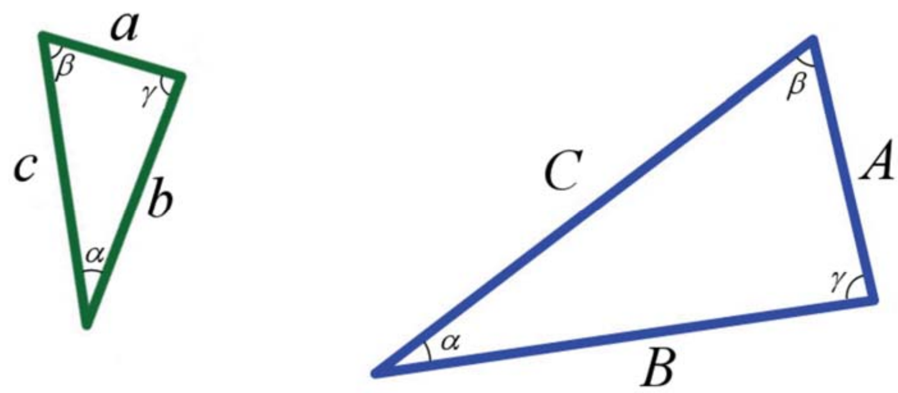
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Théorème de Pythagore



$c^2 = a^2 + b^2$

Rapport des côtés dans des triangles semblables



catalog.flatworldknowledge.com/bookhub/reader/128?e=fwk-redden-ch02_s06

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$$

Définition des sinus, cosinus et tangente

$$\text{sinus}=\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\text{cosinus}=\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\text{tangente}=\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Fonctions trigonométriques inverses

$$\sin\theta = x \qquad \rightarrow \qquad \theta=\sin^{-1}x$$
$$\cos\theta = x \qquad \rightarrow \qquad \theta=\cos^{-1}x$$
$$\tan\theta = x \qquad \rightarrow \qquad \theta=\tan^{-1}x$$

EXERCICES

1.1 Les unités de mesure

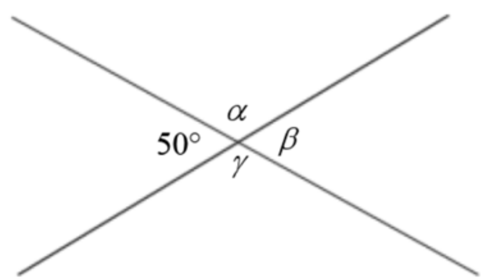
1. Transformez les unités suivantes

   a) 5,6 cm en mètres
   b) 3,45 m en centimètres
   c) 5 643 mg en grammes
   d) 56 po en cm
   e) 35 pieds en mètres
   f) 450 cm² en mètres carrés
   g) 50 po² en centimètres carrés
   h) 0,45 dm³ en centimètres cubes
   i) 56 cl en cm³ (cl est un centilitre)
   j) 45 pi³ et mètres cubes
   k) 80 onces liquides (US) en millilitres
   l) 2,4 gallons impériaux en litres
   m) 2,3 livres en kilogrammes
   n) 40 onces en grammes

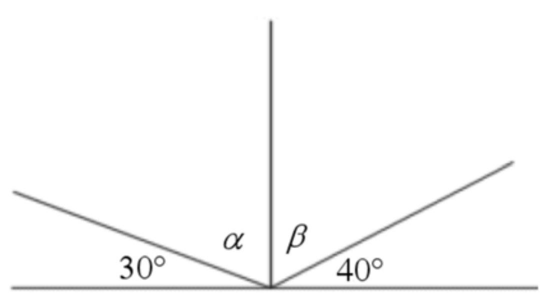
1.2 Les angles

2. Dans la situation montrée sur la figure…

   a) calculer la valeur de l'angle α.
   b) calculer la valeur de l'angle β.
   c) calculer la valeur de l'angle γ.

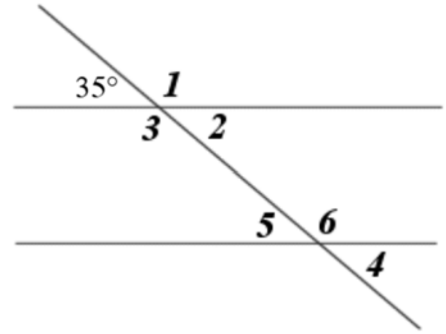


3. Dans la situation montrée sur la figure, calculer la valeur des angles α et β.



4. Dans la situation montrée sur la figure…

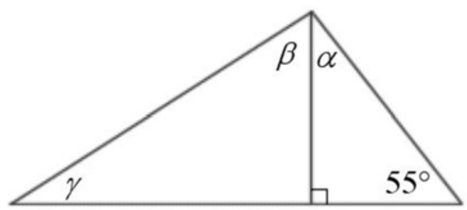
   a) calculer la valeur de l’angle 1
   b) calculer la valeur de l’angle 2
   c) calculer la valeur de l’angle 3
   d) calculer la valeur de l’angle 4
   e) calculer la valeur de l’angle 5
   f) calculer la valeur de l’angle 6



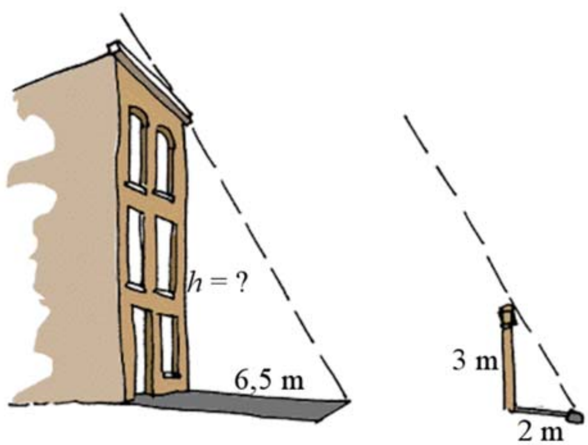
1.3 Les triangles

5. Dans ce triangle, les angles α et β sont complémentaires.

   a) Calculer la valeur de l’angle α.
   b) Calculer la valeur de l’angle β.
   c) Calculer la valeur de l’angle γ.



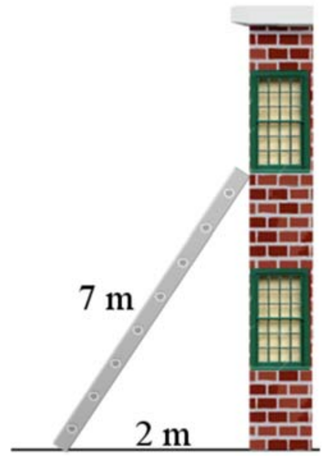
6. Dans la situation montrée sur la figure, les deux triangles sont semblables. Déterminez la hauteur de l’édifice.



designcoalition.org/kids/energyhouse/sunangles.htm

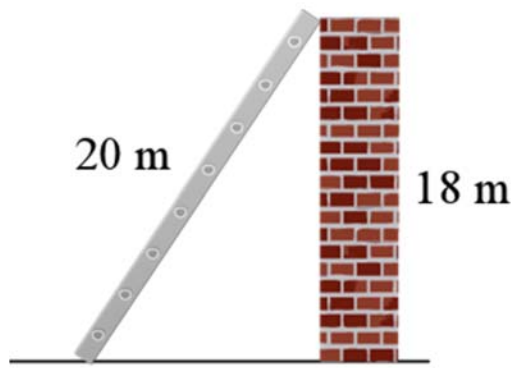
1.4 Les fonctions trigonométriques

7. Le bas d'une échelle d'une longueur de 7 mètres est placé à une distance de 2 mètres du mur d'une maison. L'autre extrémité atteint le bas d'une fenêtre. Trouver la hauteur du bas de la fenêtre.



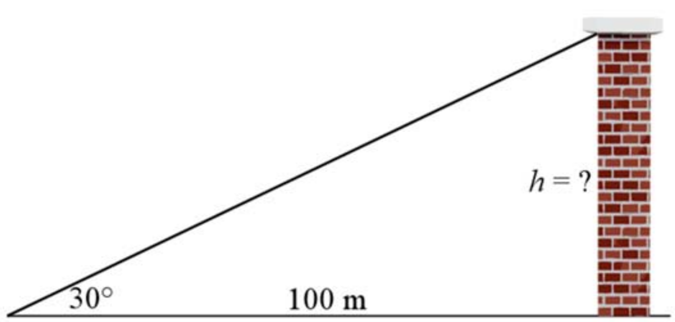
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/ladder-length-l-26-m-mass-m-15-kg-rests-floor-coefficient-static-friction-u03bcs-049-assum-q4152833

8. Une échelle a une longueur de 20 mètres. À quelle distance doit-on placer le bas de l'échelle pour que l'autre extrémité atteigne le sommet d'un mur de 18 mètres de haut ?



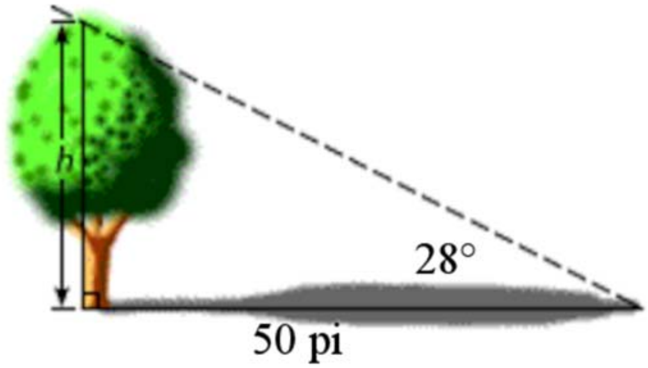
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/ladder-length-l-26-m-mass-m-15-kg-rests-floor-coefficient-static-friction-u03bcs-049-assum-q4152833

9. L'angle d'élévation du sommet d'une cheminée est de 30°. La distance entre le point d'observation et la base de la cheminée est de 100 mètres. Trouver la hauteur de la cheminée.



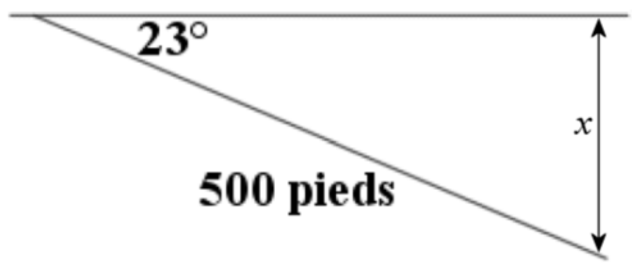
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/ladder-length-l-26-m-mass-m-15-kg-rests-floor-coefficient-static-friction-u03bcs-049-assum-q4152833

10. Un arbre produit sur le sol une ombre de 50 pieds de longueur lorsque l'élévation angulaire du soleil est de 28°. Trouver la hauteur de l'arbre. (Donnez votre réponse en mètres)

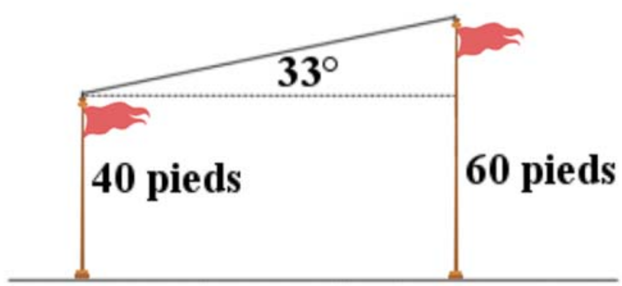


math.tutorvista.com/geometry/indirect-measurement.html

11. Dans une mine, une veine de charbon a une inclinaison de 23° avec l'horizontale. Un homme, en suivant cette veine, parcourt une distance de 500 pieds. Trouver à quelle profondeur se trouve alors cet homme. (Donnez votre réponse en mètre.)



12. Deux mâts ont respectivement une hauteur de 60 pieds et de 40 pieds. La droite joignant leur sommet fait un angle de 33° avec l'horizontale. Trouver la distance entre les deux mâts. (Donnez votre réponse en mètre)



proenix.deviantart.com/art/Flag-Pole-308689034

RÉPONSES

1.1 Les unités de mesure

1. a) 0,056 m b) 345 cm c) 5,643 g d) 142,24 cm e) 10,668 m
f) 0,045 m^2 g) 322,6 cm^2 h) 450 cm^3 i) 560 cm^3 j) 1,2744 m^3
k) 2365,6 ml l) 10,9104 l m) 1,04328 kg n) 1134 g

1.2 Les angles

2. a) 130° b) 50° c) 130°
3. $\alpha = 60°$ et $\beta = 50°$

1.3 Les triangles

4. a) 145° a) 35° b) 145° c) 35° d) 35° e) 145°
5. a) 35° b) 55° c) 35°
6. 9,75 m

1.4 Les fonctions trigonométriques

7. 6,708 m
8. 8,72 m
9. 57,74 m
10. 8,103 m
11. 59,55 m
12. 9,387 m