Solutionnaire du chapitre 6

1.8 On a

$$y' = -3x^{-2}$$

On a donc

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} + y &= x \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right) + \frac{3}{x} \\ &= -\frac{3}{x} + \frac{3}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

1.9 On a

$$y' = 4e^{3x} \cdot 3 \cdot \sin x + 4e^{3x} \cdot \cos x$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4e^{3x} \cdot 3 \cdot \sin x + 4e^{3x} \cdot \cos x \\ &= 3 \cdot \left(4e^{3x} \sin x\right) + 4e^{3x} \cdot \cos x \\ &= 3 \cdot y + 4e^{3x} \cdot \cos x \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot y + 4e^{3x} \cdot \cos x$$

1.10 On a

$$y' = \sec^2 x + \sec x \tan x$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y\sec x &= \left(\sec^2 x + \sec x \tan x\right) - \left(\sec x + \tan x\right)\sec x \\ &= \sec^2 x + \sec x \tan x - \sec^2 x - \tan x \sec x \\ &= 0\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{dy}{dx} - y\sec x = 0$$

1.11 On a

$$\begin{aligned}y' &= -\tfrac{3}{2} x^{-5/2} \\ y'' &= \tfrac{15}{4} x^{-7/2}\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}4x^2 y'' + 12xy' + 3y &= 4x^2 \tfrac{15}{4} x^{-7/2} + 12x\left(-\tfrac{3}{2} x^{-5/2}\right) + 3x^{-3/2} \\ &= 15x^2 \cdot x^{-7/2} - 18x \cdot x^{-5/2} + 3x^{-3/2} \\ &= 15x^{-3/2} - 18x^{-3/2} + 3x^{-3/2} \\ &= \left(15 - 18 + 3\right) x^{-3/2} \\ &= 0\end{aligned}$$

On a donc

$$4x^2 y'' + 12xy' + 3y = 0$$

1.12 On a

$$\begin{aligned}y' &= -x^{-3/2} \\ y'' &= \tfrac{3}{2} x^{-5/2}\end{aligned}$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
4x^2y'' + 12xy' + 3y &= 4x^2 \tfrac{3}{2} x^{-5/2} + 12x\left(-x^{-3/2}\right) + 3\cdot 2x^{-1/2} \\
&= 6x^2 \cdot x^{-5/2} - 12x \cdot x^{-3/2} + 6x^{-1/2} \\
&= 6x^{-1/2} - 12x^{-1/2} + 6x^{-1/2} \\
&= (6 - 12 + 6)\, x^{-1/2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On a donc

$$4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$$

1.13 On a

$$
\begin{aligned}
y' &= -\tfrac{1}{2} Ax^{-3/2} - \tfrac{3}{2} Bx^{-5/2} \\
y'' &= \tfrac{3}{4} Ax^{-5/2} + \tfrac{15}{4} Bx^{-7/2}
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
4x^2y'' + 12xy' + 3y &= 4x^2\left(\tfrac{3}{4} Ax^{-5/2} + \tfrac{15}{4} Bx^{-7/2}\right) + 12x\left(-\tfrac{1}{2} Ax^{-3/2} - \tfrac{3}{2} Bx^{-5/2}\right) + 3\cdot\left(Ax^{-1/2} + Bx^{-3/2}\right) \\
&= x^2\left(3Ax^{-5/2} + 15Bx^{-7/2}\right) - x\left(6Ax^{-3/2} + 18Bx^{-5/2}\right) + \left(3Ax^{-1/2} + 3Bx^{-3/2}\right) \\
&= \left(3Ax^{-1/2} + 15Bx^{-3/2}\right) - \left(6Ax^{-1/2} + 18Bx^{-3/2}\right) + \left(3Ax^{-1/2} + 3Bx^{-3/2}\right) \\
&= (3A - 6A + 3A)\, x^{-1/2} + (15B - 18B + 3B)\, x^{-3/2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On a donc

$$4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$$

Trouvons maintenant la solution particulière si $y = 5$ et $y' = -1/2$ quand $x = 1$.

On a donc

$$
\begin{aligned}
y &= Ax^{-1/2} + Bx^{-3/2} \\
5 &= A + B
\end{aligned}
$$

Et

$$y' = -\tfrac{1}{2}Ax^{-3/2} - \tfrac{3}{2}Bx^{-5/2}$$
$$-\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}A - \tfrac{3}{2}B$$
$$1 = A + 3B$$

On a donc les deux équations suivantes.

$$5 = A + B$$
$$1 = A + 3B$$

Si on fait (équation 1) – (équation 2), on a

$$5 - 1 = (A + B) - (A + 3B)$$
$$4 = -2B$$
$$B = -2$$

De là on trouve facilement que $A = 7$. La solution particulière est donc

$$y = 7x^{-1/2} - 2x^{-3/2}$$

2.1

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2x$$
$$\frac{dy}{y^2} = 6xdx$$
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 6xdx$$
$$-\frac{1}{y} = 3x^2 + C$$

Puisque si y (1) = 1/5, on a

$$-\frac{1}{y} = 3x^2 + C$$
$$-\frac{1}{\frac{1}{5}} = 3 + C$$
$$-5 = 3 + C$$
$$C = -8$$

La solution est donc

$$-\frac{1}{y}=3x^2-8$$
$$\frac{1}{y}=8-3x^2$$
$$y=\frac{1}{8-3x^2}$$

2.2

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x-4}{2y-4}$$
$$(2y-4)\,dy=\left(3x^2+4x-4\right)dx$$
$$\int(2y-4)\,dy=\int\left(3x^2+4x-4\right)dx$$
$$y^2-4y=x^3+2x^2-4x+C$$

Puisque si y (1) = 3, on a

$$y^2-4y=x^3+2x^2-4x+C$$
$$9-4\cdot 3=1+2-4+C$$
$$-3=-1+C$$
$$C=-2$$

La solution est donc

$$y^2-4y=x^3+2x^2-4x-2$$

2.3

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\frac{1}{y^3}\,dy=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$
$$\int\frac{1}{y^3}\,dy=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$
$$\frac{-1}{2y^2}=\sqrt{x^2+1}+C$$

Puisque si y (0) = -1, on a

$$\frac{-1}{2} = \sqrt{0+1} + C$$
$$\frac{-1}{2} - 1 = C$$
$$C = \frac{-3}{2}$$

La solution est donc

$$\frac{-1}{2y^2} = \sqrt{x^2+1} - \frac{3}{2}$$
$$\frac{-1}{y^2} = 2\sqrt{x^2+1} - 3$$
$$\frac{1}{y^2} = 3 - 2\sqrt{x^2+1}$$
$$y^2 = \frac{1}{3-2\sqrt{x^2+1}}$$

2.4

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}\left(2x-4\right)$$
$$e^y dy = \left(2x-4\right)dx$$
$$\int e^y dy = \int \left(2x-4\right)dx$$
$$e^y = x^2 - 4x + C$$

Puisque si y (5) = 0, on a

$$e^y = x^2 - 4x + C$$
$$e^0 = 25 - 4\cdot 5 + C$$
$$1 = 25 - 20 + C$$
$$C = -4$$

La solution est donc

$$e^y = x^2 - 4x - 4$$
$$y = \ln\left(x^2 - 4x - 4\right)$$

2.5

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}$$
$$\frac{dr}{r^2} = \frac{d\theta}{\theta}$$
$$\int \frac{dr}{r^2} = \int \frac{d\theta}{\theta}$$
$$\frac{-1}{r} = \ln|\theta| + C$$

Puisque si r (1) = 2, on a

$$\frac{-1}{r} = \ln|\theta| + C$$
$$\frac{-1}{2} = \ln|1| + C$$
$$\frac{-1}{2} = 0 + C$$
$$C = -\frac{1}{2}$$

La solution est donc

$$\frac{-1}{r} = \ln|\theta| - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \ln|\theta|$$
$$r = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln|\theta|}$$
$$r = \frac{2}{1 - 2\ln|\theta|}$$
$$r = \frac{2}{1 - \ln\theta^2}$$

2.6

$$\frac{dy}{dt} = e^{y-t}\sec(y)\left(1+t^2\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = e^{y}e^{-t}\sec(y)\left(1+t^2\right)$$
$$\frac{e^{-y}}{\sec y}dy = e^{-t}\left(1+t^2\right)dt$$
$$e^{-y}\cos y dy = e^{-t}\left(1+t^2\right)dt$$
$$\int e^{-y}\cos y dy = \int e^{-t}\left(1+t^2\right)dt$$
$$\frac{1}{2}e^{-y}\left(\sin y - \cos y\right) = -e^{-t}\left(t^2+2t+3\right)+C$$

Puisque si y (0) = 0, on a

$$\frac{1}{2}e^{-0}\left(\sin 0 - \cos 0\right) = -e^{-0}\left(0^2+0+3\right)+C$$
$$\frac{1}{2}(0-1) = -1(3)+C$$
$$C = \frac{5}{2}$$

La solution est donc

$$\frac{1}{2}e^{-y}\left(\sin y - \cos y\right) = -e^{-t}\left(t^2+2t+3\right)+\frac{5}{2}$$
$$e^{-y}\left(\sin y - \cos y\right) = 5 - e^{-t}\left(2t^2+4t+6\right)$$

3.1

$$\begin{aligned} 3x^2+8xy-9y^2+1 &\rightarrow 3(\lambda x)^2+8(\lambda x)(\lambda y)-9(\lambda y)^2+1 \\ &\rightarrow \lambda^2\left(3x^2+8xy-9y^2\right)+1 \end{aligned}$$

L'équation n'est pas homogène.

3.2

$$\begin{aligned} y^4-4xy^3+6x^2y^2+4x^3y+x^4 &\to (\lambda y)^4-4(\lambda x)(\lambda y)^3+6(\lambda x)^2(\lambda y)^2+4(\lambda x)^3(\lambda y)+(\lambda x)^4 \\ &\to \lambda^4 y^4-4\lambda^4 xy^3+6\lambda^4 x^2y^2+4\lambda^4 x^3 y+\lambda^4 x^4 \\ &\to \lambda^4\left(y^4-4xy^3+6x^2y^2+4x^3y+x^4\right) \end{aligned}$$

L'équation est homogène.

3.3

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+4y^2}-x &\to \sqrt{(\lambda x)^2+4(\lambda y)^2}-(\lambda x) \\ &\to \sqrt{\lambda^2 x^2+4\lambda^2 y^2}-\lambda x \\ &\to \sqrt{\lambda^2\left(x^2+4y^2\right)}-\lambda x \\ &\to \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\left(x^2+4y^2\right)}-\lambda x \\ &\to \lambda\sqrt{\left(x^2+4y^2\right)}-\lambda x \\ &\to \lambda\left(\sqrt{\left(x^2+4y^2\right)}-x\right) \end{aligned}$$

L'équation est homogène.

3.4

$$\begin{aligned} x\cos\left(\frac{x}{y}\right)+y\sin\left(\frac{x}{y}\right) &\to \lambda x\cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)+\lambda y\sin\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) \\ &\to \lambda x\cos\left(\frac{x}{y}\right)+\lambda y\sin\left(\frac{x}{y}\right) \\ &\to \lambda\left(x\cos\left(\frac{x}{y}\right)+y\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right) \end{aligned}$$

L'équation est homogène.

3.5

$$x\cosh(x)+y\sinh(y) \to \lambda x\cosh(\lambda x)+\lambda y\sinh(\lambda y)$$

Comme on n'a pas de moyen de mettre les λ à l'intérieur des fonctions hyperboliques en évidence, l'équation n'est pas homogène.

3.6 L'équation est

$$x\sinh\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\sinh\left(\frac{y}{x}\right) - x$$

Comme l'équation est homogène, on pose $y = ux$. On a alors

$$dy = udx + xdu$$

L'équation devient alors

$$\begin{aligned}
x\sinh\left(\frac{ux}{x}\right)\frac{udx + xdu}{dx} &= ux\sinh\left(\frac{ux}{x}\right) - x \\
x\sinh(u)\left(u + x\frac{du}{dx}\right) &= ux\sinh(u) - x \\
xu\sinh(u) + x^2\sinh(u)\frac{du}{dx} &= ux\sinh(u) - x \\
x^2\sinh(u)\frac{du}{dx} &= -x \\
\sinh(u)\,du &= -\frac{1}{x}dx
\end{aligned}$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\begin{aligned}
\int \sinh(u)\,du &= -\int \frac{1}{x}dx \\
\cosh u &= -\ln|x| + C
\end{aligned}$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$\cosh\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln|x| + C$$

On peut finalement isoler *y*. Pour y arriver, on redéfinit la constante

$$\cosh\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln|x| + \ln C$$

$$\cosh\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x|^{-1} + \ln C$$

$$\cosh\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(Cx^{-1}\right)$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{arcosh}\left(\ln\left(Cx^{-1}\right)\right)$$

$$y = x\operatorname{arcosh}\left(\ln\left(Cx^{-1}\right)\right)$$

$$y = x\operatorname{arcosh}\left(\ln\frac{C}{x}\right)$$

3.7 L'équation est

$$xy\frac{dy}{dx} + 4x^2 + y^2 = 0$$

Comme l'équation est homogène, on pose $y = ux$. On a alors

$$dy = udx + xdu$$

L'équation devient alors

$$xux\frac{udx + xdu}{dx} + 4x^2 + u^2x^2 = 0$$

$$xux\left(u + x\frac{du}{dx}\right) + 4x^2 + u^2x^2 = 0$$

$$x^2u^2 + ux^3\frac{du}{dx} + 4x^2 + u^2x^2 = 0$$

$$2x^2u^2 + ux^3\frac{du}{dx} + 4x^2 = 0$$

$$2u^2 + ux\frac{du}{dx} + 4 = 0$$

On peut alors séparer les variables.

$$2u^2 + ux\frac{du}{dx} + 4 = 0$$

$$ux\frac{du}{dx} = -4 - 2u^2$$

$$\frac{udu}{4+2u^2} = -\frac{1}{x}dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int \frac{udu}{4+2u^2} = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{4}\ln\left(2+u^2\right) = -\ln|x| + C$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$\frac{1}{4}\ln\left(2+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = -\ln|x| + C$$

On peut finalement isoler *y*. Pour y arriver, on redéfinit la constante

$$\frac{1}{4}\ln\left(2+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = -\ln|x| + \ln C$$

$$\frac{1}{4}\ln\left(2+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \ln|x|^{-1} + \ln C$$

$$\frac{1}{4}\ln\left(2+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \ln\frac{C}{x}$$

$$\ln\left(2+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = 4\ln\frac{C}{x}$$

$$\ln\left(2+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)=\ln\frac{C^4}{x^4}$$

$$2+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{C^4}{x^4}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{C^4}{x^4}-2$$

$$y^2=\frac{C^4}{x^2}-2x^2$$

En redéfinissant encore la constante, on arrive à

$$y^2=\frac{C}{x^2}-2x^2$$

3.8 L'équation est

$$x\frac{dy}{dx}=y(\ln x-\ln y)$$

$$x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{x}{y}$$

Comme l'équation est homogène, on pose $y = ux$. On a alors

$$dy=udx+xdu$$

L'équation devient alors

$$x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{x}{y}$$

$$x\frac{udx+xdu}{dx}=ux\ln\frac{x}{ux}$$

$$x\left(u+x\frac{du}{dx}\right)=ux\ln\frac{1}{u}$$

$$xu+x^2\frac{du}{dx}=ux\ln\frac{1}{u}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln\frac{1}{u}$$

On peut alors séparer les variables.

$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln\frac{1}{u}$$
$$x\frac{du}{dx}=u\ln\frac{1}{u}-u$$
$$x\frac{du}{dx}=u\ln u^{-1}-u$$
$$x\frac{du}{dx}=-u\ln u-u$$
$$\frac{du}{u\ln u+u}=-\frac{1}{x}dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int\frac{du}{u\ln u+u}=-\int\frac{1}{x}dx$$
$$\ln\left(\ln\left(u\right)+1\right)=-\ln\left|x\right|+C$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$\ln\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)=-\ln\left|x\right|+C$$

On peut finalement isoler *y*. Pour y arriver, on redéfinit la constante

$$\ln\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)=-\ln\left|x\right|+\ln C$$
$$\ln\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)=\ln\left|x\right|^{-1}+\ln C$$
$$\ln\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)=\ln Cx^{-1}$$
$$\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1=Cx^{-1}$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = Cx^{-1} - 1$$
$$\frac{y}{x} = e^{Cx^{-1}-1}$$
$$y = xe^{Cx^{-1}-1}$$
$$y = xe^{\frac{C}{x}-1}$$

3.9 L'équation est

$$\left(x^2 + 8xy - 9y^2\right)\frac{dy}{dx} + \left(3x^2 + 2xy + 4y^2\right) = 0$$

Comme l'équation est homogène, on pose $y = ux$. On a alors

$$dy = udx + xdu$$

L'équation devient alors

$$\left(x^2 + 8xux - 9u^2x^2\right)\frac{udx + xdu}{dx} + \left(3x^2 + 2xux + 4u^2x^2\right) = 0$$
$$\left(x^2 + 8x^2u - 9u^2x^2\right)\left(u + x\frac{du}{dx}\right) + \left(3x^2 + 2x^2u + 4u^2x^2\right) = 0$$
$$x^2u + 8x^2u^2 - 9u^3x^2 + \left(x^3 + 8x^3u - 9u^2x^3\right)\frac{du}{dx} + \left(3x^2 + 2x^2u + 4u^2x^2\right) = 0$$
$$3x^2 + 3x^2u + 12x^2u^2 - 9u^3x^2 + \left(x^3 + 8x^3u - 9u^2x^3\right)\frac{du}{dx} = 0$$
$$3 + 3u + 12u^2 - 9u^3 + \left(x + 8xu - 9u^2x\right)\frac{du}{dx} = 0$$
$$3 + 3u + 12u^2 - 9u^3 + x\left(1 + 8u - 9u^2\right)\frac{du}{dx} = 0$$

On peut alors séparer les variables.

$$3 + 3u + 12u^2 - 9u^3 + x\left(1 + 8u - 9u^2\right)\frac{du}{dx} = 0$$
$$x\left(1 + 8u - 9u^2\right)\frac{du}{dx} = -3 - 3u - 12u^2 + 9u^3$$
$$\frac{1 + 8u - 9u^2}{3 + 3u + 12u^2 - 9u^3}du = -\frac{1}{x}dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1+8u-9u^2}{3+3u+12u^2-9u^3}du &= -\frac{1}{x}dx \\
\frac{1+8u-9u^2}{1+u+4u^2-3u^3}du &= -\frac{3}{x}dx \\
\int\frac{1+8u-9u^2}{1+u+4u^2-3u^3}du &= -\int\frac{3}{x}dx \\
\ln\left(1+u+4u^2-3u^3\right) &= -3\ln|x|+C
\end{aligned}$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$\ln\left(1+\frac{y}{x}+4\frac{y^2}{x^2}-3\frac{y^3}{x^3}\right) = -3\ln|x|+C$$

On peut finalement isoler *y*. Pour y arriver, on redéfinit la constante

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\frac{y}{x}+4\frac{y^2}{x^2}-3\frac{y^3}{x^3}\right) &= -3\ln|x|+\ln C \\
\ln\left(1+\frac{y}{x}+4\frac{y^2}{x^2}-3\frac{y^3}{x^3}\right) &= \ln|x|^{-3}+\ln C \\
\ln\left(1+\frac{y}{x}+4\frac{y^2}{x^2}-3\frac{y^3}{x^3}\right) &= \ln Cx^{-3} \\
1+\frac{y}{x}+4\frac{y^2}{x^2}-3\frac{y^3}{x^3} &= Cx^{-3} \\
x^3+x^2y+4xy^2-3y^3 &= C
\end{aligned}$$

3.10 L'équation est

$$x\frac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2+y^2}$$

Comme l'équation est homogène, on pose $y = ux$. On a alors

$$dy = udx + xdu$$

L'équation devient alors

$$x\frac{udx+xdu}{dx}-ux=\sqrt{x^2+u^2x^2}$$
$$x\left(u+x\frac{du}{dx}\right)-ux=\sqrt{x^2\left(1+u^2\right)}$$
$$ux+x^2\frac{du}{dx}-ux=\sqrt{x^2}\sqrt{1+u^2}$$
$$x^2\frac{du}{dx}=x\sqrt{1+u^2}$$
$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1+u^2}$$

On peut alors séparer les variables.

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}$$

Version 1

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{dx}{x}$$
$$\operatorname{arsinh}u=\ln|x|+C$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$\operatorname{arsinh}\frac{y}{x}=\ln|x|+C$$

On peut finalement isoler *y*. Pour y arriver, on redéfinit la constante

$$\operatorname{arsinh}\frac{y}{x}=\ln|x|+\ln C$$
$$\operatorname{arsinh}\frac{y}{x}=\ln Cx$$
$$\frac{y}{x}=\sinh\left(\ln Cx\right)$$
$$y=x\sinh\left(\ln Cx\right)$$

Version 2

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) = \ln|x| + C$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}\right) = \ln|x| + C$$

On peut finalement isoler *y*. Pour y arriver, on redéfinit la constante.

$$\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}\right) = \ln|x| + \ln C$$
$$\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}\right) = \ln Cx$$
$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} = Cx$$
$$y + x\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} = Cx^2$$
$$y + \sqrt{x^2}\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} = Cx^2$$
$$y + \sqrt{x^2\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)} = Cx^2$$
$$y + \sqrt{y^2+x^2} = Cx^2$$

C'est une réponse acceptable.

On peut même isoler *y* dans cette équation.

$$\sqrt{y^2+x^2}=Cx^2-y$$
$$y^2+x^2=\left(Cx^2-y\right)^2$$
$$y^2+x^2=C^2x^4-2Cx^2y+y^2$$
$$x^2=C^2x^4-2Cx^2y$$
$$2Cx^2y=C^2x^4-x^2$$
$$y=\frac{C^2x^4}{2Cx^2}-\frac{x^2}{2Cx^2}$$
$$y=\frac{Cx^2}{2}-\frac{1}{2C}$$

4.1 L'équation est

$$\frac{dy}{dx}=3\left(x+y-1\right)$$

On va poser $u = x + y$. On a alors

$$du=dx+dy$$

L'équation devient alors

$$\frac{du-dx}{dx}=3\left(u-1\right)$$
$$\frac{du}{dx}-1=3u-3$$

On peut alors séparer les variables.

$$\frac{du}{dx}=3u-2$$
$$\frac{du}{3u-2}=dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int\frac{du}{3u-2}=\int dx$$
$$\frac{1}{3}\ln\left(3u-2\right)=x+C$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\ln\left(3(x+y)-2\right)&=x+C\\ \ln\left(3x+3y-2\right)&=3x+3C\end{aligned}$$

On peut finalement isoler *y*.

$$\begin{aligned}\ln\left(3x+3y-2\right)&=3x+C\\ 3x+3y-2&=e^{3x+C}\\ 3x+3y-2&=e^{C}e^{3x}\\ 3y&=e^{C}e^{3x}-3x+2\\ y&=\frac{1}{3}e^{C}e^{3x}-x+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Si on redéfinit la constante, on obtient

$$y=Ce^{3x}-x+\frac{2}{3}$$

4.2 L'équation est

$$\frac{dy}{dx}=\left(4y+x\right)^2$$

On va poser $u = 4y + x$. On a alors

$$du=dx+4dy$$

L'équation devient alors

$$\frac{du-dx}{4dx}=u^2$$

On peut alors séparer les variables.

$$\frac{du-dx}{dx}=4u^2$$
$$\frac{du}{dx}-1=4u^2$$
$$\frac{du}{dx}=4u^2+1$$
$$\frac{du}{4u^2+1}=dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int\frac{du}{4u^2+1}=\int dx$$
$$\frac{1}{2}\arctan(2u)=x+C$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$\frac{1}{2}\arctan(2(4y+x))=x+C$$
$$\frac{1}{2}\arctan(8y+2x)=x+C$$

On peut finalement isoler *y*.

$$\arctan(8y+2x)=2x+2C$$
$$8y+2x=\tan(2x+2C)$$
$$8y=\tan(2x+2C)-2x$$
$$y=\frac{1}{8}\tan(2x+2C)-\frac{x}{4}$$

Si on redéfinit la constante, on obtient

$$y=\frac{1}{8}\tan(2x+C)-\frac{x}{4}$$

4.3 L'équation est

$$(4y-2x)\frac{dy}{dx}=e^{2y-x}+2y-x$$

On va poser $u = 2y - x$. On a alors

$$du = -dx + 2dy$$

L'équation devient alors

$$2u\frac{du+dx}{2dx} = e^u + u$$
$$u\frac{du+dx}{dx} = e^u + u$$

On peut alors séparer les variables.

$$u\left(\frac{du}{dx}+1\right) = e^u + u$$
$$u\frac{du}{dx}+u = e^u + u$$
$$u\frac{du}{dx} = e^u$$
$$\frac{u}{e^u}du = dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int\frac{u}{e^u}du = \int dx$$
$$-\frac{u+1}{e^u} = x + C$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$-\frac{2y-x+1}{e^{2y-x}} = x + C$$

On peut écrire ce résultat sous la forme suivante.

$$-2y + x - 1 = e^{2y-x}\left(x+C\right)$$

Trouvons maintenant la solution particulière puisqu'on sait que $y = 0$ quand $x = 0$. On a alors

$$0-0-1=e^{0-0}\left(0+C\right)$$
$$-1=C$$

La solution est donc

$$-2y+x-1=e^{2y-x}\left(x-1\right)$$

4.4 L'équation est

$$\left(1+xy\right)\frac{dy}{dx}-y^2=0$$

On va poser $u = xy$ (donc que $y = u/x$). On a alors

$$dy=-\frac{u}{x^2}dx+\frac{1}{x}du$$

L'équation devient alors

$$\left(1+u\right)\frac{1}{dx}\left(-\frac{u}{x^2}dx+\frac{1}{x}du\right)-\frac{u^2}{x^2}=0$$
$$\left(1+u\right)\left(-\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}\right)-\frac{u^2}{x^2}=0$$
$$-\frac{u\left(1+u\right)}{x^2}+\frac{1+u}{x}\frac{du}{dx}-\frac{u^2}{x^2}=0$$
$$-\frac{u}{x^2}-\frac{u^2}{x^2}+\frac{1+u}{x}\frac{du}{dx}-\frac{u^2}{x^2}=0$$
$$-\frac{u}{x^2}-\frac{2u^2}{x^2}+\frac{1+u}{x}\frac{du}{dx}=0$$

On peut alors séparer les variables.

$$-\frac{u}{x^2}-\frac{2u^2}{x^2}+\frac{1+u}{x}\frac{du}{dx}=0$$
$$-\frac{u}{x}-\frac{2u^2}{x}+(1+u)\frac{du}{dx}=0$$
$$(1+u)\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\left(u+2u^2\right)$$
$$\frac{1+u}{u+2u^2}du=\frac{1}{x}dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int\frac{1+u}{u+2u^2}du=\int\frac{1}{x}dx$$
$$\ln|u|-\frac{1}{2}\ln|2u+1|=\ln|x|+C$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$\ln|xy|-\frac{1}{2}\ln|2xy+1|=\ln|x|+C$$

On peut simplifier un peu. Pour y arriver, on redéfinit la constante.

$$\ln|xy|-\frac{1}{2}\ln|2xy+1|=\ln|x|+\ln C$$
$$\ln|xy|-\ln\sqrt{|2xy+1|}=\ln|x|+\ln C$$
$$\ln\frac{|xy|}{\sqrt{|2xy+1|}}=\ln Cx$$
$$\frac{xy}{\sqrt{|2xy+1|}}=Cx$$
$$\frac{y}{\sqrt{|2xy+1|}}=C$$
$$y=C\sqrt{|2xy+1|}$$
$$y^2=C^2|2xy+1|$$

En redéfinissant la constante, on arrive à

$$y^2=C(2xy+1)$$

5.1 L'équation est

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=3x$$

On a

$$P(x)=\frac{1}{x}$$

Le facteur intégrant est donc

$$e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

En multipliant par le facteur intégrant, l'équation devient

$$x\frac{dy}{dx}+y=3x^2$$
$$xdy+ydx=3x^2dx$$

On peut alors écrire l'équation sous la forme

$$d(xy)=3x^2dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int d(xy)=\int 3x^2dx$$
$$xy=x^3+C$$

Si on isole *y*, on a

$$y=x^2+\frac{C}{x}$$

5.2 L'équation est

$$x\frac{dy}{dx}+2y=4x^2$$
$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=4x$$

On a

$$P(x)=\frac{2}{x}$$

Le facteur intégrant est donc

$$e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$$

En multipliant par le facteur intégrant, l'équation devient

$$x^2\frac{dy}{dx}+2xy=4x^3$$
$$x^2dy+2xydx=4x^3dx$$

On peut alors écrire l'équation sous la forme

$$d\left(x^2y\right)=4x^3dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int d\left(x^2y\right)=\int 4x^3dx$$
$$x^2y=x^4+C$$

Si on isole y, on a

$$y=x^2+\frac{C}{x^2}$$

5.3 L'équation est

$$\cos x\frac{dy}{dx}+(\sin x)y=2\cos^3 x\sin x-1$$
$$\frac{dy}{dx}+(\tan x)y=2\cos^2 x\sin x-\frac{1}{\cos x}$$

On a

$$P(x) = \tan x$$

Le facteur intégrant est donc

$$e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln(\cos x)} = e^{\ln(\cos x)^{-1}} = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}$$

En multipliant par le facteur intégrant, l'équation devient

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\cos x}\frac{dy}{dx} + \frac{\tan x}{\cos x} y = 2\cos x \sin x - \frac{1}{\cos^2 x} \\
\sec x \frac{dy}{dx} + (\sec x \tan x)\, y = 2\cos x \sin x - \sec^2 x \\
\sec x dx + (\sec x \tan x)\, y dx = \left(2\cos x \sin x - \sec^2 x\right) dx
\end{gathered}$$

On peut alors écrire l'équation sous la forme

$$d\left((\sec x)\, y\right) = \left(2\cos x \sin x - \sec^2 x\right) dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\begin{gathered}
\int d\left(\sec(x)\, y\right) = \int \left(2\cos x \sin x - \sec^2 x\right) dx \\
\int d\left(\sec(x)\, y\right) = \int \left(\sin 2x - \sec^2 x\right) dx \\
\sec(x)\, y = \frac{1}{2}\cos 2x - \tan x + C
\end{gathered}$$

Si on isole *y*, on a

$$\begin{gathered}
\sec(x)\, y = -\frac{1}{2}\cos 2x - \tan x + C \\
\frac{1}{\cos x} y = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sin x}{\cos x} + C \\
y = -\frac{1}{2}\cos 2x \cdot \cos x - \sin x + C\cos x
\end{gathered}$$

On arrive à l'autre réponse en utilisant

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} y &= -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sin x}{\cos x} + C \\
\frac{1}{\cos x} y &= -\frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 x\right) - \frac{\sin x}{\cos x} + C \\
\frac{1}{\cos x} y &= \sin^2 x - \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{\cos x} + C \\
\frac{1}{\cos x} y &= \sin^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} + \left(C - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

On peut alors redéfinir la constante pour arriver à

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} y &= \sin^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} + C \\
y &= \sin^2 x \cos x - \sin x + C\cos x
\end{aligned}$$

5.4 L'équation est

$$\begin{aligned}
t\frac{dy}{dt} + 2y &= t^2 - t + 1 \\
\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t} y &= t - 1 + \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

On a

$$P(t) = \frac{2}{t}$$

Le facteur intégrant est donc

$$e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln t} = e^{\ln t^2} = t^2$$

En multipliant par le facteur intégrant, l'équation devient

$$\begin{aligned}
t^2\frac{dy}{dt} + 2ty &= t^3 - t^2 + t \\
t^2 dy + 2tydt &= \left(t^3 - t^2 + t\right)dt
\end{aligned}$$

On peut alors écrire l'équation sous la forme

$$d\left(t^2 y\right) = \left(t^3 - t^2 + t\right) dt$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int d\left(t^2 y\right) = \int \left(t^3 - t^2 + t\right) dt$$
$$t^2 y = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$$

Si on isole y, on a

$$y = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + \frac{C}{t^2}$$

On peut ensuite trouver la valeur de la constante puisqu'on sait que $y = ½$ quand $t = 1$.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C$$
$$0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + C$$
$$C = \frac{1}{12}$$

La solution est donc

$$y = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}$$

5.5 L'équation est

$$t\frac{dy}{dt} - 2y = t^3 \sin\left(2t\right) - 2t^4 + 3t^5$$
$$\frac{dy}{dt} - \frac{2}{t}y = t^2 \sin\left(2t\right) - 2t^3 + 3t^4$$

On a

$$P\left(t\right) = -\frac{2}{t}$$

Le facteur intégrant est donc

$$e^{-\int \frac{2}{t}dt} = e^{-2\ln t} = e^{\ln t^{-2}} = t^{-2} = \frac{1}{t^2}$$

En multipliant par le facteur intégrant, l'équation devient

$$\frac{1}{t^2}\frac{dy}{dt} - \frac{2}{t^3}y = \sin(2t) - 2t + 3t^2$$
$$\frac{1}{t^2}dy - \frac{2}{t^3}ydt = \left(\sin(2t) - 2t + 3t^2\right)dt$$

On peut alors écrire l'équation sous la forme

$$d\left(\frac{1}{t^2}y\right) = \left(\sin(2t) - 2t + 3t^2\right)dt$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int d\left(\frac{1}{t^2}y\right) = \int\left(\sin(2t) - 2t + 3t^2\right)dt$$
$$\frac{1}{t^2}y = -\frac{1}{2}\cos(2t) - t^2 + t^3 + C$$

Si on isole *y*, on a

$$y = -\frac{t^2}{2}\cos(2t) - t^4 + t^5 + Ct^2$$

5.6 L'équation est

$$2\frac{dy}{dx} - y = 4\sin(3x)$$
$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = 2\sin(3x)$$

On a

$$P(x) = -\frac{1}{2}$$

Le facteur intégrant est donc

$$e^{\int \frac{-1}{2}dx} = e^{\frac{-x}{2}}$$

En multipliant par le facteur intégrant, l'équation devient

$$e^{-x/2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}e^{-x/2}y = 2e^{-x/2}\sin(3x)$$
$$e^{-x/2}dy - \frac{1}{2}e^{-x/2}ydx = 2e^{-x/2}\sin(3x)dx$$

On peut alors écrire l'équation sous la forme

$$d\left(e^{-x/2}y\right) = 2e^{-x/2}\sin(3x)dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int d\left(e^{-x/2}y\right) = \int 2e^{-x/2}\sin(3x)dx$$
$$e^{-x/2}y = \frac{-4}{37}e^{-x/2}\left(\sin(3x) + 6\cos(3x)\right) + C$$

Si on isole y, on a

$$y = \frac{-4}{37}\left(\sin(3x) + 6\cos(3x)\right) + Ce^{x/2}$$

On peut ensuite trouver la valeur de la constante puisqu'on sait que $y = 0$ quand $t = 0$.

$$0 = \frac{-4}{37}\left(\sin 0 + 6\cos 0\right) + Ce^{0}$$
$$0 = \frac{-4}{37}(0+6) + C$$
$$C = \frac{24}{37}$$

La solution est donc

$$y = \frac{-4}{37}\left(\sin(3x) + 6\cos(3x)\right) + \frac{24}{37}e^{x/2}$$
$$y = \frac{-4}{37}\sin(3x) - \frac{24}{37}\cos(3x) + \frac{24}{37}e^{x/2}$$

5.7 L'équation est

$$\left(e^{-y} + 2x\right)dy + dx = 0$$
$$e^{-y}dy + 2xdy + dx = 0$$
$$dx + 2xdy = -e^{-y}dy$$
$$\frac{dx}{dy} + 2x = -e^{-y}$$

(Ça semble un peu différent, mais c'est juste parce que les rôles de x et y sont inversés.)

On a

$$P(y) = 2$$

Le facteur intégrant est donc

$$e^{\int 2dy} = e^{2y}$$

En multipliant par le facteur intégrant, l'équation devient

$$e^{2y}\frac{dx}{dy} + 2e^{2y}x = -e^{-y}e^{2y}$$
$$e^{2y}\frac{dx}{dy} + 2e^{2y}x = -e^{y}$$
$$e^{2y}dx + 2e^{2y}xdy = -e^{y}dy$$

On peut alors écrire l'équation sous la forme

$$d\left(e^{2y}x\right) = -e^{y}dy$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int d\left(e^{2y}x\right) = -\int e^{y}dy$$
$$e^{2y}x = -e^{y} + C$$

Si on isole x, on a

$$x = -e^{y}e^{-2y} + Ce^{-2y}$$
$$x = -e^{-y} + Ce^{-2y}$$

6.1 L'équation est

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x}y = x^2y^2$$

Cette équation est une équation de Bernoulli avec $n = 2$. On va donc diviser par y^2 pour obtenir

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x}\frac{1}{y} = x^2$$

et ensuite poser que $z = y^{-1}$. On a alors $dz = -y^{-2}dy$. Cela nous amène à

$$-\frac{dz}{dx} + \frac{4}{x}z = x^2$$
$$\frac{dz}{dx} - \frac{4}{x}z = -x^2$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x) = -4/x$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$x^{-4}\frac{dz}{dx} - 4x^{-5}z = -x^{-4}x^2$$
$$x^{-4}dz - 4x^{-5}zdx = -x^{-2}dx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(x^{-4}z\right) = -x^{-2}dx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(x^{-4}z\right) = -\int x^{-2}dx$$
$$x^{-4}z = x^{-1} + C$$

Notre solution est donc

$$z = x^3 + Cx^4$$
$$\frac{1}{y} = x^3 + Cx^4$$
$$y = \frac{1}{x^3 + Cx^4}$$

6.2 L'équation est

$$\frac{dy}{dx} - 5y = e^{-2x}y^{-2}$$

Cette équation est une équation de Bernoulli avec n = -2. On va donc diviser par y^{-2} pour obtenir

$$y^2\frac{dy}{dx} - 5y^3 = e^{-2x}$$

et ensuite poser que $z = y^3$. On a alors $dz = 3y^2dy$. Cela nous amène à

$$\frac{1}{3}\frac{dz}{dx} - 5z = e^{-2x}$$
$$\frac{dz}{dx} - 15z = 3e^{-2x}$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x)$ = -15. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int -15dx} = e^{-15x}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$e^{-15x}\frac{dz}{dx}-15e^{-15x}z=3e^{-2x}e^{-15x}$$
$$e^{-15x}dz-15e^{-15x}zdx=3e^{-17x}dx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(e^{-15x}z\right)=3e^{-17x}dx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(e^{-15x}z\right)=\int 3e^{-17x}dx$$
$$e^{-15x}z=\frac{-3}{17}e^{-17x}+C$$

Notre solution est donc

$$z=\frac{-3}{17}e^{-2x}+Ce^{15x}$$
$$y^3=\frac{-3}{17}e^{-2x}+Ce^{15x}$$
$$y=\sqrt[3]{Ce^{15x}-\frac{3}{17}e^{-2x}}$$

6.3 L'équation est

$$x\frac{dy}{dx}+2y=-x^3y^2\cos x$$
$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=-x^2y^2\cos x$$

Cette équation est une équation de Bernoulli avec $n = 2$. On va donc diviser par y^2 pour obtenir

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y^{-1}=-x^2\cos x$$

et ensuite poser que $z = y^{-1}$. On a alors $dz=-y^{-2}dy$. Cela nous amène à

$$-\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}z=-x^2\cos x$$
$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=x^2\cos x$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x) = -2/x$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}}=x^{-2}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$x^{-2}\frac{dz}{dx}-2x^{-3}z=\cos x$$
$$x^{-2}dz-2x^{-3}zdx=\cos xdx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(x^{-2}z\right)=\cos xdx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(x^{-2}z\right)=\int\cos xdx$$
$$x^{-2}z=\sin x+C$$

Notre solution est donc

$$z=x^2\sin x+Cx^2$$
$$\frac{1}{y}=x^2\sin x+Cx^2$$
$$y=\frac{1}{x^2\sin x+Cx^2}$$

6.4 L'équation est

$$x\frac{dy}{dx}+y=y^2x^2\ln\left(x\right)$$
$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=y^2x\ln\left(x\right)$$

Cette équation est une équation de Bernoulli avec $n = 2$. On va donc diviser par y^2 pour obtenir

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=x\ln(x)$$

et ensuite poser que $z = y^{-1}$. On a alors $dz = -y^{-2}dy$. Cela nous amène à

$$-\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z=x\ln(x)$$
$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-x\ln(x)$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x) = -1/x$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\int -\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=x^{-1}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$x^{-1}\frac{dz}{dx}-x^{-2}z=-\ln(x)$$
$$x^{-1}dz-x^{-2}zdx=-\ln(x)dx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(x^{-1}z\right)=-\ln(x)dx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(x^{-1}z\right)=-\int \ln(x)dx$$
$$x^{-1}z=-x\ln x+x+C$$

Notre solution est donc

$$z=-x^2\ln x+x^2+Cx$$
$$\frac{1}{y}=-x^2\ln x+x^2+Cx$$
$$y=\frac{1}{x^2+Cx-x^2\ln x}$$

6.5 L'équation est

$$6\frac{dy}{dx}-2y=xy^4$$
$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{3}y=\frac{1}{6}xy^4$$

Cette équation est une équation de Bernoulli avec $n = 4$. On va donc diviser par y^4 pour obtenir

$$y^{-4}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{3}y^{-3}=\frac{1}{6}x$$

et ensuite poser que $z=y^{-3}$. On a alors $dz=-3y^{-4}dy$. Cela nous amène à

$$-\frac{1}{3}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{3}z=\frac{1}{6}x$$
$$\frac{dz}{dx}+z=-\frac{1}{2}x$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x) = 1$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\int dx}=e^x$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$e^x\frac{dz}{dx}+e^xz=-\frac{1}{2}xe^x$$
$$e^xdz+e^xzdx=-\frac{1}{2}xe^xdx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(e^xz\right)=-\frac{1}{2}xe^xdx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(e^{x}z\right)=-\int\frac{1}{2}xe^{x}dx$$
$$e^{x}z=\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}xe^{x}+C$$

Notre solution est donc

$$z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+Ce^{-x}$$
$$\frac{1}{y^{3}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+Ce^{-x}$$
$$y=\sqrt[3]{\frac{2}{1-x+2Ce^{-x}}}$$
$$y=\sqrt[3]{\frac{8}{4-4x+8Ce^{-x}}}$$
$$y=\frac{2}{\sqrt[3]{4-4x+Ce^{-x}}}$$

(Notez qu'on a redéfini la constante à la dernière ligne.)

Trouvons alors la solution particulière sachant que y = -2 quand x = 0. On a alors

$$y=\frac{2}{\sqrt[3]{4-4x+Ce^{-x}}}$$
$$-2=\frac{2}{\sqrt[3]{4-0+Ce^{0}}}$$
$$-2=\frac{2}{\sqrt[3]{4+C}}$$
$$\sqrt[3]{4+C}=-1$$
$$4+C=-1$$
$$C=-5$$

La solution est donc

$$y=\frac{2}{\sqrt[3]{4-4x-5e^{-x}}}$$

6.6 L'équation est

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}-\sqrt{y}=0$$
$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=y^{1/2}$$

Cette équation est une équation de Bernoulli avec n = ½. On va donc diviser par $y^{½}$ pour obtenir

$$y^{-1/2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{1/2}=1$$

et ensuite poser que $z=y^{1/2}$. On a alors $dz=\frac{1}{2}y^{-1/2}dy$. Cela nous amène à

$$2\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z=1$$
$$\frac{dz}{dx}+\frac{1}{2x}z=\frac{1}{2}$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x) = 1/2x$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{1}{2x}dx}=e^{\frac{1}{2}\ln x}=e^{\ln x^{1/2}}=x^{1/2}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$x^{1/2}\frac{dz}{dx}+\frac{1}{2}x^{-1/2}z=\frac{1}{2}x^{1/2}$$
$$x^{1/2}dz+\frac{1}{2}x^{-1/2}zdx=\frac{1}{2}x^{1/2}dx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(x^{1/2}z\right)=\frac{1}{2}x^{1/2}dx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(x^{1/2}z\right)=\int\frac{1}{2}x^{1/2}dx$$
$$x^{1/2}z=\frac{1}{3}x^{3/2}+C$$

Notre solution est donc

$$z=\frac{1}{3}x+\frac{C}{\sqrt{x}}$$
$$y^{1/2}=\frac{1}{3}x+\frac{C}{\sqrt{x}}$$

Trouvons alors la solution particulière sachant que $y = 0$ quand $x = 1$. On a alors

$$y^{1/2}=\frac{1}{3}x+\frac{C}{\sqrt{x}}$$
$$0=\frac{1}{3}+C$$
$$C=-\frac{1}{3}$$

La solution est donc

$$y^{1/2}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
$$y=\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$
$$y=\frac{1}{9}\left(x^2-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)$$

7.1 L'équation est

$$2xy-9x^2+\left(2y+x^2+1\right)\frac{dy}{dx}=0$$
$$\left(2xy-9x^2\right)dx+\left(2y+x^2+1\right)dy=0$$

Vérifions premièrement si elle est exacte.

$$M=2xy-9x^2 \qquad\qquad N=2y+x^2+1$$

Si on fait les dérivées partielles, on arrive à

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

Puisque ces deux dérivées partielles sont égales, on a une équation exacte, ce qui signifie que la fonction *f* existe. Trouvons maintenant la valeur de *f*.

$$f=\int Mdx=\int\left(2xy-9x^2\right)dx=x^2y-3x^3+K_1$$

$$f=\int Ndy=\int\left(2y+x^2+1\right)dy=y^2+x^2y+y+K_2$$

Avec ces deux réponses, on peut reconstruire la fonction *f*. On arrive à

$$f=x^2y-3x^3+y^2+y$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$x^2y-3x^3+y^2+y=C$$

7.2 L'équation est

$$2xy^2+4=2\left(3-x^2y\right)\frac{dy}{dx}$$
$$\left(2xy^2+4\right)dx=2\left(3-x^2y\right)dy$$
$$\left(2xy^2+4\right)dx+\left(-6+2x^2y\right)dy=0$$

Vérifions premièrement si elle est exacte.

$$M=2xy^2+4 \qquad\qquad N=-6+2x^2y$$

Si on fait les dérivées partielles, on arrive à

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4xy \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=4xy$$

Puisque ces deux dérivées partielles sont égales, on a une équation exacte, ce qui signifie que la fonction *f* existe. Trouvons maintenant la valeur de *f*.

$$f=\int Mdx=\int\left(2xy^2+4\right)dx=x^2y^2+4x+K_1$$

$$f=\int Ndy=\int\left(-6+2x^2y\right)dy=-6y+x^2y^2+K_2$$

Avec ces deux réponses, on peut reconstruire la fonction *f*. On arrive à

$$f = x^2 y^2 + 4x - 6y$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$x^2 y^2 + 4x - 6y = C$$

7.3 L'équation est

$$\frac{2ty}{t^2+1} - 2t - \left(2 - \ln\left(t^2+1\right)\right)\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\left(\frac{2ty}{t^2+1} - 2t\right)dt - \left(2 - \ln\left(t^2+1\right)\right)dy = 0$$
$$\left(\frac{2ty}{t^2+1} - 2t\right)dt + \left(-2 + \ln\left(t^2+1\right)\right)dy = 0$$

Vérifions premièrement si elle est exacte.

$$M = \frac{2ty}{t^2+1} - 2t \qquad\qquad N = -2 + \ln\left(t^2+1\right)$$

Si on fait les dérivées partielles, on arrive à

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2t}{t^2+1} \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{2t}{t^2+1}$$

Puisque ces deux dérivées partielles sont égales, on a une équation exacte, ce qui signifie que la fonction *f* existe. Trouvons maintenant la valeur de *f*.

$$f = \int M dt = \int\left(\frac{2ty}{t^2+1} - 2t\right)dt = y\ln\left(t^2+1\right) - t^2 + K_1$$

$$f = \int N dy = \int\left(-2 + \ln\left(t^2+1\right)\right)dy = -2y + y\ln\left(t^2+1\right) + K_2$$

Avec ces deux réponses, on peut reconstruire la fonction *f*. On arrive à

$$f = y\ln\left(t^2+1\right) - t^2 - 2y$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$y\ln\left(t^2+1\right)-t^2-2y=C$$

Trouvons maintenant la solution particulière, sachant que $y = 0$ quand $t = 5$. On a alors

$$\begin{gathered}y\ln\left(t^2+1\right)-t^2-2y=C\\0-5^2-0=C\\C=-25\end{gathered}$$

La solution est donc

$$y\ln\left(t^2+1\right)-t^2-2y=-25$$

Si on isole y, on a

$$\begin{gathered}y\ln\left(t^2+1\right)-t^2-2y=-25\\y\ln\left(t^2+1\right)-2y=t^2-25\\y\left(\ln\left(t^2+1\right)-2\right)=t^2-25\\y=\frac{t^2-25}{\ln\left(t^2+1\right)-2}\end{gathered}$$

7.4 L'équation est

$$\begin{gathered}3y^3e^{3xy}-1+\left(2ye^{3xy}+3xy^2e^{3xy}\right)\frac{dy}{dx}=0\\\left(3y^3e^{3xy}-1\right)dx+\left(2ye^{3xy}+3xy^2e^{3xy}\right)dy=0\end{gathered}$$

Vérifions premièrement si elle est exacte.

$$M=3y^3e^{3xy}-1 \qquad\qquad N=2ye^{3xy}+3xy^2e^{3xy}$$

Si on fait les dérivées partielles, on arrive à

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 9y^2e^{3xy} + 3y^3e^{3xy}3x$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 9y^2e^{3xy} + 9xy^3e^{3xy}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2ye^{3xy}3y + 3y^2e^{3xy} + 3xy^2e^{3xy}3y$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 9y^2e^{3xy} + 9xy^3e^{3xy}$$

Puisque ces deux dérivées partielles sont égales, on a une équation exacte, ce qui signifie que la fonction f existe. Trouvons maintenant la valeur de f.

$$f = \int M dx = \int \left(3y^3e^{3xy} - 1\right) dx = y^2e^{3xy} - x + K_1$$

$$f = \int N dy = \int \left(2ye^{3xy} + 3xy^2e^{3xy}\right) dy = y^2e^{3xy} + K_2$$

Avec ces deux réponses, on peut reconstruire la fonction f. On arrive à

$$f = y^2e^{3xy} - x$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$y^2e^{3xy} - x = C$$

Trouvons maintenant la solution particulière, sachant que $y = 1$ quand $x = 0$. On a alors

$$y^2e^{3xy} - x = C$$
$$1e^0 - 0 = C$$
$$C = 1$$

La solution est donc

$$y^2e^{3xy} - x = 1$$

8.1 L'équation est

$$\left(x^3 + y\right) dx + x dy = 0$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ?

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

L'équation est donc exacte. On a alors

$$f = \int M dx = \int \left(x^3 + y\right) dx = \frac{1}{4}x^4 + xy + K_1$$

$$f = \int N dy = \int (x)\, dy = xy + K_2$$

On a donc

$$f = \frac{1}{4}x^4 + xy$$

La solution est donc

$$\frac{1}{4}x^4 + xy = C$$

Si on isole y, on a

$$xy = C - \frac{1}{4}x^4$$
$$y = \frac{C}{x} - \frac{1}{4}x^3$$

En passant, l'équation est aussi linéaire puisqu'on peut écrire cette équation sous la forme

$$xdy + \left(x^3 + y\right) dx = 0$$
$$x\frac{dy}{dx} + \left(x^3 + y\right) = 0$$
$$x\frac{dy}{dx} + y = -x^3$$
$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = -x^2$$

On aurait pu la résoudre de cette façon. Le facteur intégrant serait alors

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

On a alors

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} + y &= -x^3 \\ xdy + ydx &= -x^3dx \\ d(xy) &= -x^3dx \\ xy &= -\frac{1}{4}x^4 + C \\ y &= \frac{C}{x} - \frac{1}{4}x^3 \end{aligned}$$

8.2 L'équation est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{5xy}$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ? L'équation est

$$\left(x^2 - y^2\right)dx - 5xydy = 0$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -5y$$

L'équation n'est donc pas exacte.

3) L'équation est-elle linéaire ? L'équation est

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{5x}y = \frac{x}{5y}$$

Elle n'est pas linéaire.

4) L'équation est-elle une équation de Bernoulli ? L'équation est

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{5x}y=\frac{x}{5}y^{-1}$$

Cette équation est une équation de Bernoulli avec $n = -1$. On va donc diviser par y^{-1} pour obtenir

$$y\frac{dy}{dx}+\frac{1}{5x}y^{2}=\frac{x}{5}$$

et ensuite poser que $z=y^{2}$. On a alors $dz=2ydy$. Cela nous amène à

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}+\frac{1}{5x}z=\frac{x}{5}$$
$$\frac{dz}{dx}+\frac{2}{5x}z=\frac{2x}{5}$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x) = 2/5x$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{2}{5x}dx}=e^{\frac{2}{5}\ln x}=e^{\ln x^{2/5}}=x^{2/5}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$x^{2/5}\frac{dz}{dx}+\frac{2}{5x}x^{-3/5}z=\frac{2}{5}x^{7/5}$$
$$x^{2/5}dz+\frac{2}{5x}x^{-3/5}zdx=\frac{2}{5}x^{7/5}dx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(x^{2/5}z\right)=\frac{2}{5}x^{7/5}dx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(x^{2/5}z\right)=\int\frac{2}{5}x^{7/5}dx$$
$$x^{2/5}z=\frac{1}{6}x^{12/5}+C$$

Notre solution est donc

$$z=\frac{1}{6}x^2+Cx^{-2/5}$$
$$y^2=\frac{1}{6}x^2+Cx^{-2/5}$$

Notez que l'équation est aussi une équation homogène. On pose alors $y = ux$ et $dy=udx+xdu$.

L'équation devient alors

$$\frac{udx+xdu}{dx}=\frac{x^2-u^2x^2}{5xux}$$
$$\frac{udx+xdu}{dx}=\frac{1-u^2}{5u}$$
$$udx+xdu=\frac{1-u^2}{5u}dx$$
$$xdu=\frac{1-u^2}{5u}dx-udx$$
$$xdu=\left(\frac{1-u^2}{5u}-u\right)dx$$
$$xdu=\left(\frac{1-u^2}{5u}-\frac{5u^2}{u^2}\right)dx$$
$$xdu=\left(\frac{1-6u^2}{5u}\right)dx$$
$$\frac{5u}{1-5u^2}du=\frac{1}{x}dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int\frac{5u}{1-6u^2}du=\int\frac{1}{x}dx$$
$$\frac{-5}{12}\ln\left|1-6u^2\right|=\ln|x|+\ln C$$
$$\ln\left|1-6u^2\right|^{-5/12}=\ln Cx$$
$$\left|1-6u^2\right|^{-5/12}=Cx$$
$$1-6u^2=Cx^{-12/5}$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$
\begin{aligned}
&1-6\frac{y^2}{x^2}=Cx^{-12/5}\\
&x^2-6y^2=Cx^{-2/5}\\
&6y^2=x^2+Cx^{-2/5}\\
&y^2=\frac{1}{6}x^2+Cx^{-2/5}
\end{aligned}
$$

Notez qu'on a redéfini la constante quelques fois.

8.3 L'équation est

$$\cos x dy=\left(y\sin x+e^x\right)dx$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ? L'équation est

$$\left(y\sin x+e^x\right)dx-\cos x dy=0$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\sin x \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\sin x$$

L'équation est donc exacte. On a alors

$$f=\int M dx=\int\left(y\sin x+e^x\right)dx=-y\cos x+e^x+K_1$$

$$f=\int N dy=\int\left(-\cos x\right)dy=-y\cos x+K_2$$

On a donc

$$f=-y\cos x+e^x$$

La solution est donc

$$-y\cos x+e^{x}=C$$

Si on isole *y*, on a

$$-y\cos x=C-e^{x}$$
$$y=\frac{e^{x}+C}{\cos x}$$

En passant, l'équation est aussi linéaire puisqu'on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{dy}{dx}-(\tan x)\,y=\frac{e^{x}}{\cos x}$$

On aurait pu la résoudre de cette façon. Le facteur intégrant serait alors

$$e^{\int P(x)dx}=e^{-\int \tan x dx}=e^{\ln\cos x}=\cos x$$

On a alors

$$\cos x\frac{dy}{dx}-(\sin x)\,y=e^{x}$$
$$\cos x dy-(\sin x)\,y dx=e^{x}dx$$
$$d\left(y\cos x\right)=e^{x}dx$$
$$y\cos x=e^{x}+C$$
$$y=\frac{e^{x}+C}{\cos x}$$

8.4 L'équation est

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{y}$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ? L'équation est

$$\left(y^{2}+x\right)dx-xydy=0$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=1$$

L'équation n'est donc pas exacte.

3) L'équation est-elle linéaire ? L'équation est

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=\frac{1}{y}$$

Elle n'est pas linéaire.

4) L'équation est-elle une équation de Bernoulli ? L'équation est

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=\frac{1}{y}$$

Cette équation est une équation de Bernoulli avec n = -1. On va donc diviser par y^{-1} pour obtenir

$$y\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^2=1$$

et ensuite poser que $z=y^2$. On a alors $dz=2ydy$. Cela nous amène à

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=1$$
$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=2$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x) = -2/x$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}}=x^{-2}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$x^{-2}\frac{dz}{dx}-2x^{-3}z=2x^{-2}$$
$$x^{-2}dz-2x^{-3}zdx=2x^{-2}dx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(x^{-2}z\right) = 2x^{-2}dx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(x^{-2}z\right) = \int 2x^{-2}dx$$
$$x^{-2}z = -2x^{-1} + C$$

Notre solution est donc

$$z = -2x + Cx^2$$
$$y^2 = Cx^2 - 2x$$

8.5 L'équation est

$$x\left(\tan y\right)\frac{dy}{dx} = -1$$

1) L'équation est à variable séparable

$$x\left(\tan y\right)dy = -dx$$
$$\left(\tan y\right)dy = -\frac{1}{x}dx$$
$$\int\left(\tan y\right)dy = -\int\frac{1}{x}dx$$
$$-\ln\left|\cos y\right| = -\ln\left|x\right| - \ln\left|C\right|$$
$$\ln\left|\cos y\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|$$
$$\ln\left|\cos y\right| = \ln Cx$$
$$\cos y = Cx$$
$$y = \arccos Cx$$

8.6 L'équation est

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x} = 0$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ? L'équation est

$$\left(2y-y^2\right)dx+xdy=0$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2-2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=1$$

L'équation n'est donc pas exacte.

3) L'équation est-elle linéaire ? L'équation est

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{y^2}{x}$$

Elle n'est pas linéaire.

4) L'équation est-elle une équation de Bernoulli ? L'équation est

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{y^2}{x}$$

Cette équation est une équation de Bernoulli avec n = 2. On va donc diviser par y^2 pour obtenir

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y^{-1}=\frac{1}{x}$$

et ensuite poser que $z=y^{-1}$. On a alors $dz=-y^{-2}dy$. Cela nous amène à

$$-\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x}$$
$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=-\frac{1}{x}$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x) = -2/x$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$x^{-2}\frac{dz}{dx} - 2x^{-3}z = -x^{-3}$$
$$x^{-2}dz - 2x^{-3}zdx = -x^{-3}dx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(x^{-2}z\right) = -x^{-3}dx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(x^{-2}z\right) = \int -x^{-3}dx$$
$$x^{-2}z = \frac{1}{2}x^{-2} + C$$

Notre solution est donc

$$z = \frac{1}{2} + Cx^2$$
$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} + Cx^2$$
$$y = \frac{2}{1+Cx^2}$$

Notez qu'on a redéfini la constante à la dernière ligne.

8.7 L'équation est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3-2y}{2x+y+1}$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ? L'équation est

$$\left(2y-3\right)dx + \left(2x+y+1\right)dy = 0$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2$$

L'équation est donc exacte. On a alors

$$f=\int M dx=\int(2y-3)\,dx=2xy-3x+K_1$$

$$f=\int N dy=\int(2x+y+1)\,dy=2xy+\frac{1}{2}y^2+y+K_2$$

On a donc

$$f=2xy-3x+\frac{1}{2}y^2+y$$

La solution est donc

$$2xy-3x+\frac{1}{2}y^2+y=C$$

8.8 L'équation est

$$\frac{y'-1}{x^2}=1$$

1) L'équation est à variable séparable

$$\frac{dy}{dx}-1=x^2$$
$$\frac{dy}{dx}=x^2+1$$
$$dy=\left(x^2+1\right)dx$$
$$y=\frac{1}{3}x^3+x+C$$

8.9 L'équation est

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ? L'équation est

$$\left(x^2 \sin x + y\right)dx - xdy = 0$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

L'équation n'est donc pas exacte.

3) L'équation est-elle linéaire ? L'équation est

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x$$
$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x \sin x$$

Elle est linéaire. Puisque $P(x) = 1/x$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{-1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$x^{-1}\frac{dy}{dx} - x^{-2}y = \sin x$$
$$x^{-1}dy - x^{-2}ydx = \sin xdx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$\left(x^{-1}y\right) = \sin xdx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int \left(x^{-1}y\right) = \int \sin x dx$$
$$x^{-1}y = -\cos x + C$$

Notre solution est donc

$$y = Cx - x\cos x$$

8.10 L'équation est

$$x\frac{dy}{dx} - 2y + y^3x^4 = 0$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ? L'équation est

$$\left(2y + y^3x^4\right)dx - xdy = 0$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 + 3y^2x^4 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

L'équation n'est donc pas exacte.

3) L'équation est-elle linéaire ? L'équation est

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -y^3x^3$$

Elle n'est pas linéaire.

4) L'équation est-elle une équation de Bernoulli ? L'équation est

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -y^3x^3$$

Cette équation est une équation de Bernoulli avec n = 3. On va donc diviser par y^3 pour obtenir

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y^{-2}=-x^3$$

et ensuite poser que $z=y^{-2}$. On a alors $dz=-2y^{-3}dy$. Cela nous amène à

$$\begin{gathered}\frac{-1}{2}\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=-x^3\\ \frac{dz}{dx}+\frac{4}{x}z=2x^3\end{gathered}$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x) = -2/x$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{4}{x}dx}=e^{4\ln x}=e^{\ln x^4}=x^4$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$\begin{gathered}x^4\frac{dz}{dx}+4x^3z=2x^7\\ x^4dz+4x^3zdx=2x^7dx\end{gathered}$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(x^4z\right)=2x^7dx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\begin{gathered}\int d\left(x^4z\right)=\int 2x^7dx\\ x^4z=\frac{1}{4}x^8+C\end{gathered}$$

Notre solution est donc

$$z = \frac{1}{4}x^4 + Cx^{-4}$$

$$y^{-2} = \frac{1}{4}x^4 + Cx^{-4}$$

$$y^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}x^4 + Cx^{-4}}$$

$$y^2 = \frac{4x^4}{x^8 + C}$$

8.11 L'équation est

$$\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-3t}$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ? L'équation est

$$\left(e^{-3t} - 3y\right)dt - dy = 0$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3 \qquad \frac{\partial N}{\partial t} = 0$$

L'équation n'est donc pas exacte.

3) L'équation est-elle linéaire ? L'équation est

$$\frac{dy}{dt} + 3y = e^{-3t}$$

Elle est linéaire. Puisque $P(x) = 3$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(t)dt} = e^{\int 3dt} = e^{3t}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$e^{3t}\frac{dy}{dt}+3e^{3t}y=1$$
$$e^{3t}dy+3e^{3t}ydt=dt$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(e^{3t}y\right)=dt$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(e^{3t}y\right)=\int dt$$
$$e^{3t}y=t+C$$

Notre solution est donc

$$y=e^{-3t}\left(t+C\right)$$

8.11 L'équation est

$$\left(2t+2y-2\right)\frac{dy}{dt}+\left(t+y+1\right)=0$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ? L'équation est

$$\left(t+y+1\right)dt+\left(2t+2y-2\right)dy=0$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial N}{\partial t}=2$$

L'équation n'est donc pas exacte.

3) L'équation est-elle linéaire ? L'équation est

$$\left(2t+2y-2\right)\frac{dy}{dt}+\left(t+y+1\right)=0$$

Elle n’est pas linéaire.

4) L’équation est-elle une équation de Bernoulli ? L’équation est

$$(2t+2y-2)\frac{dy}{dt}+(t+y+1)=0$$

Ce n’est pas une équation de Bernoulli.

5) Essayez finalement des changements de variables pour arriver à une des formes précédentes.

On remarque qu’il y a toujours la combinaison $t + y$ dans l’équation

$$(2t+2y-2)\frac{dy}{dt}+(t+y+1)=0$$

On va donc poser

$$\begin{aligned} u &= t+y \\ du &= dt+dy \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} (2u-2)\frac{du-dt}{dt}+(u+1)&=0 \\ (2u-2)\left(\frac{du}{dt}-1\right)+(u+1)&=0 \\ \frac{du}{dt}-1&=-\frac{u+1}{2u-2} \\ \frac{du}{dt}&=-\frac{u+1}{2u-2}+1 \\ \frac{du}{dt}&=-\frac{u+1}{2u-2}+\frac{2u-2}{2u-2} \\ \frac{du}{dt}&=\frac{u-3}{2u-2} \end{aligned}$$

On a alors une équation à variables séparables

$$\frac{2u-2}{u-3}du = dt$$
$$\left(\frac{2u-6}{u-3} - \frac{4}{u-3}\right)du = dt$$
$$\left(2 - \frac{4}{u-3}\right)du = dt$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int\left(2 - \frac{4}{u-3}\right)du = \int dt$$
$$2u - 4\ln|u-3| = t + C$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$2t + 2y - 4\ln|t + y - 3| = t + C$$
$$t + 2y - 4\ln|t + y - 3| = C$$

8.12 L'équation est

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x}$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ? L'équation est

$$\left(y + xe^{y/x}\right)dx - xdy = 0$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + e^{y/x} \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

L'équation n'est donc pas exacte.

3) L'équation est-elle linéaire ? L'équation est

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=e^{y/x}$$

Elle n'est pas linéaire.

4) L'équation est-elle une équation de Bernoulli ? L'équation est

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=e^{y/x}$$

Ce n'est pas une équation de Bernoulli.

5) Essayez finalement des changements de variables pour arriver à une des formes précédentes.

Cette équation est homogène

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+e^{y/x}$$

On va donc poser

$$y=ux$$
$$dy=udx+xdu$$

On a alors

$$\frac{udx+xdu}{dx}=\frac{ux}{x}+e^{ux/x}$$
$$u+x\frac{du}{dx}=u+e^{u}$$
$$x\frac{du}{dx}=e^{u}$$

On a alors une équation à variables séparables

$$e^{-u}du=\frac{1}{x}dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int e^{-u} du = \int \frac{1}{x} dx$$
$$-e^{-u} = \ln|x| + \ln C$$
$$-e^{-u} = \ln Cx$$

Si on défait le changement de variable, on arrive à

$$-e^{-y/x} = \ln Cx$$

On va finalement isoler *y*.

$$e^{-y/x} = -\ln Cx$$
$$e^{-y/x} = \ln \frac{1}{Cx}$$
$$-\frac{y}{x} = \ln\left(\ln \frac{1}{Cx}\right)$$
$$y = -x\ln\left(\ln \frac{1}{Cx}\right)$$
$$y = -x\ln\left(\ln \frac{C}{x}\right)$$

(On a redéfini la constante à la dernière ligne.)

8.14 L'équation est

$$\frac{dx}{dy} = -x\left(\frac{2x^2y + \cos y}{3x^2y^2 + \sin y}\right)$$

1) L'équation n'est clairement pas à variable séparable.

2) L'équation est-elle exacte ? L'équation est

$$\left(3x^2y^2 + \sin y\right)dx + \left(2x^3y + x\cos y\right)dy = 0$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2y + \cos y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y + \cos y$$

L'équation est donc exacte. On a alors

$$f = \int M dx = \int \left(3x^2 y^2 + \sin y\right) dx = x^3 y^2 + x \sin y + K_1$$

$$f = \int N dy = \int \left(2x^3 y + x \cos y\right) dy = x^3 y^2 + x \sin y + K_2$$

On a donc

$$f = x^3 y^2 + x \sin y$$

La solution est donc

$$x^3 y^2 + x \sin y = C$$

8.15 L'équation est

$$\left(1+2p\right) dq + \left(2-q\right) dp = 0$$

1) L'équation est à variable séparable

$$\begin{aligned}
\left(1+2p\right) dq &= \left(q-2\right) dp \\
\frac{1}{q-2} dq &= \frac{1}{1+2p} dp \\
\int \frac{1}{q-2} dq &= \int \frac{1}{1+2p} dp \\
\ln\left|q-2\right| &= \frac{1}{2} \ln\left|1+2p\right| + \ln C \\
\ln\left|q-2\right| &= \ln\sqrt{\left|1+2p\right|} + \ln C \\
\ln\left|q-2\right| &= \ln C\sqrt{\left|1+2p\right|} \\
q-2 &= C\sqrt{\left|1+2p\right|} \\
q &= C\sqrt{\left|1+2p\right|} + 2
\end{aligned}$$

8.16 L'équation est

$$\frac{du}{dv} = e^{2u+3v}$$

1) L'équation est à variable séparable

$$\frac{du}{dv} = e^{2u}e^{3v}$$
$$du = e^{2u}e^{3v}dv$$
$$e^{-2u}du = e^{3v}dv$$
$$\frac{-1}{2}e^{-2u} = \frac{1}{3}e^{3v} + C$$
$$e^{-2u} = -\frac{2}{3}e^{3v} - 2C$$
$$-2u = \ln\left(-\frac{2}{3}e^{3v} - 2C\right)$$
$$u = \frac{-1}{2}\ln\left(-\frac{2}{3}e^{3v} - 2C\right)$$
$$u = \frac{-1}{2}\ln\left(C - \frac{2}{3}e^{3v}\right)$$

(On a redéfini la constante à la dernière ligne.)

9.1 On a

$$v = \frac{x}{2s}$$

Comme la vitesse est

$$v = \frac{dx}{dt}$$

On a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2s}$$

On a alors une équation à variable séparable

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2s}dt$$
$$\ln|x| = \frac{1}{2s}t + C$$

Comme on sait que l'objet est à x = 100 m à t = 0, on a

$$\ln(100m) = 0 + C$$

La solution est donc

$$\begin{aligned} \ln x &= \frac{1}{2s}t + \ln(100m) \\ \ln x - \ln(100m) &= \frac{1}{2s}t \\ \ln\frac{x}{100m} &= \frac{1}{2s}t \\ \frac{x}{100m} &= e^{t/2s} \\ x &= 100m \cdot e^{t/2s} \end{aligned}$$

La position à t = 5 s est donc

$$\begin{aligned} x &= 100m \cdot e^{5/2} \\ &= 1218,25m \end{aligned}$$

La vitesse est donc

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{2s} \\ &= \frac{1218,35m}{2s} \\ &= 609,12\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

9.2 La somme des forces sur le bateau nous donne

$$\begin{aligned} F &= ma \\ 200N - 10\tfrac{Ns}{m} \cdot v &= 500kga \end{aligned}$$

Comme l'accélération est

$$a = \frac{dv}{dt}$$

On obtient

$$200N - 10\tfrac{Ns}{m}\cdot v = 500kg\frac{dv}{dt}$$
$$20\tfrac{m}{s} - \cdot v = 50s\frac{dv}{dt}$$

C'est une équation à variables séparables. La solution est

$$20\tfrac{m}{s} - v = 50s\frac{dv}{dt}$$
$$dt = 50s\frac{dv}{20\tfrac{m}{s} - v}$$
$$t + C = -50s\ln\left|20\tfrac{m}{s} - v\right|$$

Sachant que la vitesse est nulle à $t = 0$, on a

$$0 + C = -50s\ln\left|20\tfrac{m}{s}\right|$$

On obtient donc

$$t - 50s\ln\left|20\tfrac{m}{s}\right| = -50s\ln\left|20\tfrac{m}{s} - v\right|$$
$$t = -50s\ln\left|20\tfrac{m}{s} - v\right| + 50s\ln\left|20\tfrac{m}{s}\right|$$
$$t = 50s\ln\left|\frac{20\tfrac{m}{s}}{20\tfrac{m}{s} - v}\right|$$

On peut alors isoler v dans cette formule

$$\frac{t}{50s} = \ln\left|\frac{20\tfrac{m}{s}}{20\tfrac{m}{s} - v}\right|$$
$$e^{t/50s} = \frac{20\tfrac{m}{s}}{20\tfrac{m}{s} - v}$$
$$e^{t/50s}\left(20\tfrac{m}{s} - v\right) = 20\tfrac{m}{s}$$
$$20\tfrac{m}{s}e^{t/50s} - ve^{t/50s} = 20\tfrac{m}{s}$$
$$-ve^{t/50s} = 20\tfrac{m}{s} - 20\tfrac{m}{s}e^{t/50s}$$
$$-v = 20\tfrac{m}{s}e^{-t/50s} - 20\tfrac{m}{s}$$
$$v = 20\tfrac{m}{s}\left(1 - e^{-t/50s}\right)$$

La vitesse du bateau au bout de 50 s est donc

$$\begin{aligned} v &= 20\tfrac{m}{s}\left(1-e^{-50s/50s}\right) \\ &= 20\tfrac{m}{s}\left(1-e^{-1}\right) \\ &= 12,64\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

9.3 Le refroidissement du corps suit la loi du refroidissement de Newton

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_0\right)$$

Il s'agit simplement d'une équation à variable séparable. La solution est donc

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -k\left(T - 21°C\right) \\ \frac{dT}{\left(T-21°C\right)} &= -kdt \\ \int \frac{dT}{\left(T-21°C\right)} &= -\int kdt \\ \ln\left(T-21°C\right) &= -kt + C \end{aligned}$$

Trouvons maintenant la constante d'intégration. On sait que la température de l'objet à $t = 0$ est de 37 °C. On a donc

$$\begin{aligned} \ln\left(37°C - 21°C\right) &= -k \cdot 0 + C \\ C &= \ln\left(16°C\right) \end{aligned}$$

L'équation est donc

$$\begin{aligned} \ln\left(T-21°C\right) &= -kt + \ln\left(16°C\right) \\ \ln\left(\frac{T-21°C}{16°C}\right) &= -kt \end{aligned}$$

On a alors 2 informations. À un certain temps (qu'on va appeler A), la température du corps est de 31 °C. On a donc

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{31°C-21°C}{16°C}\right) &= -kA \\ \ln\left(\frac{5}{8}\right) &= -kA \end{aligned}$$

On sait aussi qu'à un certain temps A+1h, la température est de 29 °C. On a alors

$$\ln\left(\frac{29°C-21°C}{16°C}\right)=-k\left(A+1h\right)$$
$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-kA-k\cdot 1h$$

Si on soustrait ces deux équations, on a

$$\ln\left(\frac{5}{8}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-kA+kA+k\cdot 1h$$
$$\frac{1}{1h}\ln\left(\frac{5}{4}\right)=k$$

On va alors utiliser cette valeur dans la première équation

$$\ln\left(\frac{5}{8}\right)=-\frac{1}{1h}\ln\left(\frac{5}{4}\right)A$$

La valeur de *A* est donc

$$\begin{aligned}A&=-1h\cdot\frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}\\&=2{,}106h\end{aligned}$$

À 18 h, ça fait donc 2,106 h que le Docteur Black est mort. Il est donc mort à

$$\begin{aligned}18h-2{,}106h&=15{,}8937h\\&=15\text{ h }54\text{ min}\end{aligned}$$

9.4 On nous dit clairement que

$$\frac{dN}{dt}=k\left(M-N\right)$$
$$\frac{dN}{dt}=k\left(40-N\right)$$

Il s'agit simplement d'une équation à variable séparable. La solution est donc

$$\frac{dN}{dt} = k(40 - N)$$

$$\frac{dN}{(40 - N)} = kdt$$

$$\int \frac{dN}{(40 - N)} = \int kdt$$

$$-\ln(40 - N) = kt + C$$

Trouvons maintenant la constante d'intégration. On sait qu'au départ (t), l'employé fabrique 10 articles. On a donc

$$-\ln(40 - 10) = k \cdot 0 + C$$

$$C = -\ln(30)$$

L'équation est donc

$$-\ln(40 - N) = kt - \ln(30)$$

$$\ln\left(\frac{30}{40 - N}\right) = kt$$

On sait ensuite que l'employé fabrique 15 articles au bout de 10 jours. On a donc

$$\ln\left(\frac{30}{40 - 15}\right) = k \cdot 10j$$

$$\ln\left(\frac{30}{25}\right) = k \cdot 10j$$

$$k = \frac{1}{10j}\ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

L'équation est devient donc

$$\ln\left(\frac{30}{40 - N}\right) = \frac{1}{10j}\ln\left(\frac{6}{5}\right)t$$

Trouvons finalement t si $N = 35$

$$\ln\left(\frac{30}{40-35}\right)=\frac{1}{10j}\ln\left(\frac{6}{5}\right)t$$
$$\ln\left(\frac{30}{5}\right)=\frac{1}{10j}\ln\left(\frac{6}{5}\right)t$$
$$\ln(6)=\frac{1}{10j}\ln\left(\frac{6}{5}\right)t$$
$$t=\frac{10j\ln(6)}{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}$$
$$t=98\,jours$$

9.5 On va noter les masses des produits ainsi

m_A pour la quantité d'hydrogène présente
m_B pour la quantité d'azote présente
m_C pour la quantité d'ammoniac présente

On nous dit alors que

$$\frac{dm_C}{dt}=km_A m_B$$

Dans cette situation, il y a trop de variables dans notre équation. On doit donc trouver le lien entre ces masses. Trouvons donc les masses d'hydrogène et d'azote qu'il reste s'il y a m_C d'ammoniac.

Si on a formé m_C d'ammoniac, on a utilisé $\frac{6}{34}m_C$ d'hydrogène (puisqu'il faut 6 g d'hydrogène pour faire 34 g d'ammoniac). La quantité d'hydrogène restante est donc

$$m_A=120g-\tfrac{6}{34}m_C$$

Si on a formé m_C d'ammoniac, on a utilisé $\frac{28}{34}m_C$ d'azote (puisqu'il faut 28 g d'hydrogène pour faire 34 g d'ammoniac). La quantité d'hydrogène restante est donc

$$m_B=700g-\tfrac{28}{34}m_C$$

L'équation devient donc

$$\frac{dm_C}{dt}=k\left(120g-\tfrac{6}{34}m_C\right)\left(700g-\tfrac{28}{34}m_C\right)$$

On a alors une équation à variables séparables.

$$\frac{dm_C}{\left(120g - \frac{6}{34}m_C\right)\left(700g - \frac{28}{34}m_C\right)} = kdt$$

$$\frac{34dm_C}{\left(4080g - 6m_C\right)\left(23800g - 28m_C\right)} = kdt$$

Si on intègre, on a

$$\int \frac{34dm_C}{\left(4080g - 6m_C\right)\left(23800g - 28m_C\right)} = \int kdt$$

$$\frac{1}{840}\left(\ln\left(m_C - 850g\right) - \ln\left(m_C - 680g\right)\right) = kt + C$$

$$\frac{1}{840}\ln\left(\frac{850g - m_C}{680g - m_C}\right) = kt + C$$

On sait qu'au départ, il n'y a pas d'ammoniac. On a donc

$$\frac{1}{840}\ln\left(\frac{850g - 0}{680g - 0}\right) = k \cdot 0 + C$$

$$C = \frac{1}{840}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

On a donc

$$\frac{1}{840}\ln\left(\frac{850g - m_C}{680g - m_C}\right) = kt + \frac{1}{840}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\ln\left(\frac{850g - m_C}{680g - m_C}\right) - \ln\left(\frac{5}{4}\right) = 840kt$$

$$\ln\left(\frac{850g - m_C}{680g - m_C} \cdot \frac{4}{5}\right) = 840kt$$

$$\ln\left(\frac{3400g - 4m_C}{3400g - 5m_C}\right) = 840kt$$

Au bout de 5 minutes, il y a 200 g d'ammoniac. On a donc

$$\ln\left(\frac{3400g - 4\cdot 200g}{3400g - 5\cdot 200g}\right) = 840k \cdot 5\min$$
$$\ln\left(\frac{13}{12}\right) = 840k \cdot 5\min$$
$$k = \frac{1}{4200\min}\ln\left(\frac{13}{12}\right)$$

La formule devient donc

$$\ln\left(\frac{3400g - 4m_C}{3400g - 5m_C}\right) = 840 \cdot \frac{1}{4200\min}\ln\left(\frac{13}{12}\right)\cdot t$$
$$\ln\left(\frac{3400g - 4m_C}{3400g - 5m_C}\right) = \frac{1}{5\min}\ln\left(\frac{13}{12}\right)\cdot t$$

On peut maintenant trouver la quantité d'ammoniac au bout de 20 minutes.

$$\ln\left(\frac{3400g - 4m_C}{3400g - 5m_C}\right) = \frac{1}{5\min}\ln\left(\frac{13}{12}\right)\cdot 20\min$$
$$\ln\left(\frac{3400g - 4m_C}{3400g - 5m_C}\right) = 4\ln\left(\frac{13}{12}\right)$$
$$\ln\left(\frac{3400g - 4m_C}{3400g - 5m_C}\right) = \ln\left(\frac{13}{12}\right)^4$$
$$\frac{3400g - 4m_C}{3400g - 5m_C} = \left(\frac{13}{12}\right)^4$$
$$12^4\left(3400g - 4m_C\right) = 13^4\left(3400g - 5m_C\right)$$
$$12^4 \cdot 3400g - 12^4 \cdot 4m_C = 13^4 \cdot 3400g - 13^4 \cdot 5m_C$$
$$13^4 \cdot 5m_C - 12^4 \cdot 4m_C = 13^4 \cdot 3400g - 12^4 \cdot 3400g$$
$$\left(13^4 \cdot 5 - 12^4 \cdot 4\right)m_C = \left(13^4 - 12^4\right)\cdot 3400g$$
$$m_C = \frac{13^4 - 12^4}{13^4 \cdot 5 - 12^4 \cdot 4}3400g$$
$$m_C = 444,4g$$

9.6 On va commencer par se faire une formule qui donne l'épaisseur de neige en fonction du temps. On va mettre notre $t = 0$ au moment où la souffleuse commence son travail.

À ce moment, il y a déjà de la neige et l'épaisseur continue de monter à un rythme constant de *k*. La hauteur de neige est donc

$$h = h_0 + kt$$

Quand on connaitra l'épaisseur de neige et le rythme à laquelle elle tombe, on pourra savoir depuis combien de temps il neige en calculant combien il a fallu de temps pour avoir la hauteur initiale. Ce temps est

$$T = \frac{h_0}{k}$$

(En fait, il n'est peut-être pas nécessaire de connaitre les valeurs de *h* et *k*. L'important c'est de connaitre le résultat de cette division.)

Le volume de neige ramassé est constant. Cela signifie que

$$\frac{dV}{dt} = R$$

Le volume est égale à

$$\begin{aligned} dV &= (\text{Largeur de la souffleuse}) \cdot h \cdot dx \\ &= L \cdot h \cdot dx \end{aligned}$$

Où dx est la distance parcourue par la souffleuse durant le temps dt. On a alors

$$\frac{Lhdx}{dt} = R$$

$$Lh\frac{dx}{dt} = R$$

Avec la formule de la hauteur de la neige, on arrive à

$$L\frac{dx}{dt}(h_0 + kt) = R$$

On a alors une équation différentielle à variable séparable qui nous permet de trouver la distance parcourue par la souffleuse (x) en fonction du temps.

$$\frac{L}{R}dx = \frac{dt}{(h_0 + kt)}$$

Si on intègre, on a

$$\int \frac{L}{R} dx = \int \frac{dt}{(h_0 + kt)}$$
$$\frac{L}{R} x + C = \frac{1}{k} \ln(h_0 + kt)$$

On sait qu'à t = 0, la distance parcourue est nulle. On a donc

$$0 + C = \frac{1}{k} \ln(h_0 + 0)$$
$$C = \frac{1}{k} \ln(h_0)$$

La solution est donc

$$\frac{L}{R} x + \frac{1}{k} \ln(h_0) = \frac{1}{k} \ln(h_0 + kt)$$
$$\frac{L}{R} x = \frac{1}{k} \ln(h_0 + kt) - \frac{1}{k} \ln(h_0)$$
$$\frac{L}{R} x = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{h_0 + kt}{h_0}\right)$$
$$x = \frac{R}{Lk} \ln\left(\frac{h_0 + kt}{h_0}\right)$$

Utilisons maintenant les 2 autres informations. On sait qu'au bout d'une heure, la distance parcourue est de 2 km et qu'au bout de 2 h elle a parcouru 3 km. On a donc

$$2km = \frac{R}{Lk} \ln\left(\frac{h_0 + k}{h_0}\right)$$
$$3km = \frac{R}{Lk} \ln\left(\frac{h_0 + 2k}{h_0}\right)$$

Si on divise ces équations, on obtient

$$\frac{3}{2}=\frac{\ln\left(\frac{h_0+2k}{h_0}\right)}{\ln\left(\frac{h_0+k}{h_0}\right)}$$

$$\frac{3}{2}=\frac{\ln\left(1+2\frac{k}{h_0}\right)}{\ln\left(1+\frac{k}{h_0}\right)}$$

$$3\ln\left(1+\frac{k}{h_0}\right)=2\ln\left(1+2\frac{k}{h_0}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{k}{h_0}\right)^3=\ln\left(1+2\frac{k}{h_0}\right)^2$$

$$\left(1+\frac{k}{h_0}\right)^3=\left(1+2\frac{k}{h_0}\right)^2$$

Pour alléger, posons $A=\frac{k}{h_0}$

$$(1+A)^3=(1+2A)^2$$

$$1+3A+3A^2+A^3=1+4A+4A^2$$

$$3A+3A^2+A^3=4A+4A^2$$

$$3+3A+A^2=4+4A$$

$$A^2-A-1=0$$

Ce qui nous donne

$$A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ (L'autre solution est négative, ce qui n'a pas de sens ici.)

On a donc

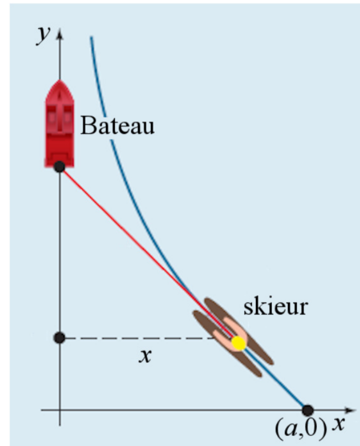
$$\frac{k}{h_0}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Comme la neige tombait depuis le temps h_0/k, on a

$$\begin{aligned}T&=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\\&=0,6180h\\&=37,08\,\text{min}\end{aligned}$$

Il neigeait donc depuis 37 minutes à midi. La neige a donc commencé à tomber à 11 h 23.

9.7 On va faire une formule qui donne la pente de la courbe. La pente de la courbe est la même que celle de la droite rouge. On trouve la pente avec deux points de cette droite : le bateau et le skieur.



On va dire que le bateau avance à la vitesse v. Sa position sur l'axe des y est donc $y = vt$.

Le bateau est donc au point $(0, vt)$ et le skieur est au point (x, y). La pente est donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{vt - y}{0 - x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - vt}{x}$$

On sait ensuite que la corde reliant le skieur au bateau a toujours la même longueur a. Cette longueur étant égale à l'hypoténuse du triangle, on a

$$a = \sqrt{x^2 + (vt - y)^2}$$

On peut isoler vt dans cette équation

$$y + \sqrt{a^2 - x^2} = vt$$

et remplacer dans l'équation de la pente pour obtenir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - y - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

On a alors une équation à variables séparables

$$dy = \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int dy = \int \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx$$

$$y + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left(\frac{2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$$

Pour trouver la constante, on sait qu'à que $x = a$ quand $y = 0$.

$$C = -\sqrt{a^2 - a^2} + a \ln\left(\frac{2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - a^2}}{a}\right)$$

$$C = 0 + a \ln\left(\frac{2a^2 + 0}{a}\right)$$

$$C = 0 + a \ln(2a)$$

On a donc

$$y + a\ln(2a) = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left(\frac{2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left(\frac{2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - a\ln(2a)$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left(\frac{2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - x^2}}{2ax}\right)$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$$

9.8 a) On dit que le taux de changement de masse de l'atome radioactif est proportionnel au nombre d'atomes restant, donc à la masse de radon restante. On a donc

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

(Il y a un signe négatif, car la masse diminue.)

C'est une équation à variables séparables.

$$\frac{dm}{m} = -kdt$$
$$\int \frac{dm}{m} = -\int kdt$$
$$\ln m = -kt + C$$

Comme on a 10 g au départ, on a

$$\ln m = -kt + C$$
$$\ln 10g = 0 + C$$

On a donc

$$\ln m = -kt + \ln(10g)$$
$$\ln m - \ln(10g) = -kt$$
$$\ln\left(\frac{m}{10g}\right) = -kt$$

Comme il reste 5 g au bout de 3,8 jours, on a

$$\ln m = -kt + \ln(10g)$$
$$\ln m - \ln(10g) = -kt$$
$$\ln\left(\frac{5g}{10g}\right) = -k \cdot 3,8j$$
$$k = -\frac{1}{3,8j}\ln\frac{1}{2}$$
$$k = \frac{1}{3,8j}\ln 2$$

On a ainsi

$$\ln m = -kt + \ln(10g)$$
$$\ln m - \ln(10g) = -kt$$
$$\ln\left(\frac{m}{10g}\right) = -\frac{\ln 2}{3,8j}t$$

Au bout de 10 jours, on a donc

$$\ln\left(\frac{m}{10g}\right)=-\frac{\ln 2}{3,8j}10j$$
$$m=10g\cdot e^{-\frac{\ln 2}{3,8}10}$$
$$m=1,6137g$$

b) Si on ajoute du radon à un rythme constant, on a alors

$$\frac{dm}{dt}=-km+1\tfrac{g}{j}$$

Avec la valeur de k trouvée précédemment, on a

$$\frac{dm}{dt}=-\frac{\ln 2}{3,8j}m+1\tfrac{g}{j}$$

C'est encore une équation à variables séparables.

$$\frac{dm}{-\frac{\ln 2}{3,8j}m+1\frac{g}{j}}=dt$$
$$\int\frac{dm}{-\frac{\ln 2}{3,8j}m+1\frac{g}{j}}=\int dt$$
$$-\frac{3,8j}{\ln 2}\ln\left(-\tfrac{\ln 2}{3,8j}m+1\tfrac{g}{j}\right)=t+C$$

Comme on a 0 g au départ, on a

$$-\frac{3,8j}{\ln 2}\ln\left(1\tfrac{g}{j}-0\right)=0+C$$
$$-\frac{3,8j}{\ln 2}\ln\left(1\tfrac{g}{j}\right)=C$$

On a donc

$$-\frac{3,8j}{\ln 2}\ln\left(-\tfrac{\ln 2}{3,8j}m+1\tfrac{g}{j}\right)=t-\frac{3,8j}{\ln 2}\ln\left(1\tfrac{g}{j}\right)$$
$$-\frac{3,8j}{\ln 2}\ln\left(-\tfrac{\ln 2}{3,8j}m+1\tfrac{g}{j}\right)+\frac{3,8j}{\ln 2}\ln\left(1\tfrac{g}{j}\right)=t$$
$$-\frac{3,8j}{\ln 2}\ln\left(\frac{-\tfrac{\ln 2}{3,8j}m+1\tfrac{g}{j}}{1\tfrac{g}{j}}\right)=t$$
$$-\frac{3,8j}{\ln 2}\ln\left(-\tfrac{\ln 2}{3,8g}m+1\right)=t$$

Au bout de 10 jours, on a donc

$$-\frac{3,8j}{\ln 2}\ln\left(-\tfrac{\ln 2}{3,8g}m+1\right)=10j$$
$$\ln\left(-\tfrac{\ln 2}{3,8g}m+1\right)=-\frac{\ln 2}{3,8}10$$
$$-\tfrac{\ln 2}{3,8g}m+1=e^{-\frac{\ln 2}{3,8}10}$$
$$\tfrac{\ln 2}{3,8g}m=1-e^{-\frac{\ln 2}{3,8}10}$$
$$m=\frac{3,8g}{\ln 2}\left(1-e^{-\frac{\ln 2}{3,8}10}\right)$$
$$m=4,598g$$

c) Si on ajoute du radon au rythme indiqué, on a alors

$$\frac{dm}{dt}=-km+5\tfrac{g}{jour}e^{-\frac{t}{5j}}$$

Avec la valeur de *k* trouvée précédemment, on a

$$\frac{dm}{dt}=-\frac{\ln 2}{3,8j}m+5\tfrac{g}{jour}e^{-\frac{t}{5j}}$$
$$\frac{dm}{dt}+\frac{\ln 2}{3,8j}m=5\tfrac{g}{jour}e^{-\frac{t}{5j}}$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x)$ = ln 2 / 3,8 j. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(t)dt} = e^{\int \frac{\ln 2}{3,8j}dt} = e^{\frac{\ln 2}{3,8j}t}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$e^{\frac{\ln 2}{3,8j}t}\frac{dm}{dt} + e^{\frac{\ln 2}{3,8j}t}\frac{\ln 2}{3,8j}m = 5\tfrac{g}{jour}e^{-\frac{t}{5j}}e^{\frac{\ln 2}{3,8j}t}$$

$$e^{\frac{\ln 2}{3,8j}}dm + e^{\frac{\ln 2}{3,8j}}\frac{\ln 2}{3,8j}mdt = 5\tfrac{g}{jour}e^{\left(-\frac{1}{5j}+\frac{\ln 2}{3,8j}\right)t}dt$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(e^{\frac{\ln 2}{3,8j}t}m\right) = 5\tfrac{g}{jour}e^{-\frac{t}{5j}}e^{\frac{\ln 2}{3,8j}t}dt$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(e^{\frac{\ln 2}{3,8j}t}m\right) = \int 5\tfrac{g}{jour}e^{\left(-\frac{1}{5j}+\frac{\ln 2}{3,8j}\right)t}dt$$

$$e^{\frac{\ln 2}{3,8j}t}m = \frac{5\frac{g}{jour}}{-\frac{1}{5j}+\frac{\ln 2}{3,8j}}e^{\left(-\frac{1}{5j}+\frac{\ln 2}{3,8j}\right)t} + C$$

$$e^{\frac{\ln 2}{3,8j}t}m = \frac{5\frac{g}{jour}}{-\frac{1}{5j}+\frac{\ln 2}{3,8j}}e^{-\frac{t}{5j}}e^{\frac{\ln 2}{3,8j}t} + C$$

Notre solution est donc

$$m = \frac{5\frac{g}{jour}}{-\frac{1}{5j}+\frac{\ln 2}{3,8j}}e^{-\frac{t}{5j}} + Ce^{-\frac{\ln 2}{3,8j}t}$$

$$m = \frac{5g}{-\frac{1}{5}+\frac{\ln 2}{3,8}}e^{-\frac{t}{5j}} + Ce^{-\frac{\ln 2}{3,8j}t}$$

$$m = \frac{95g}{5\ln 2 - 3,8}e^{-\frac{t}{5j}} + Ce^{-\frac{\ln 2}{3,8j}t}$$

Comme on a 0 g au départ, on a

$$0=\frac{95g}{5\ln 2-3{,}8}e^{-0}+Ce^{-0}$$
$$0=\frac{95g}{5\ln 2-3{,}8}+C$$
$$-\frac{95g}{5\ln 2-3{,}8}=C$$
$$-\frac{3{,}8j}{\ln 2}\ln\left(1\tfrac{g}{j}-0\right)=0+C$$
$$-\frac{3{,}8j}{\ln 2}\ln\left(1\tfrac{g}{j}\right)=C$$

On a donc

$$m=\frac{95g}{5\ln 2-3{,}8}e^{-\frac{t}{5j}}-\frac{95g}{5\ln 2-3{,}8}e^{-\frac{\ln 2}{3{,}8j}t}$$
$$m=\frac{95g}{5\ln 2-3{,}8}\left(e^{-\frac{t}{5j}}-e^{-\frac{\ln 2}{3{,}8j}t}\right)$$

Au bout de 10 jours, on a donc

$$m=\frac{95g}{5\ln 2-3{,}8}\left(e^{-\frac{10j}{5j}}-e^{-\frac{\ln 2}{3{,}8j}10j}\right)$$
$$=\frac{95g}{5\ln 2-3{,}8}\left(-0{,}02603\right)$$
$$=7{,}398g$$

9.9 On dit que le taux de changement de la population est proportionnel à la population N et à $L-N$, où L est la population limite. On a donc

$$\frac{dN}{dt}=kN\left(L-N\right)$$

C'est une équation à variables séparables.

$$\frac{dN}{N\left(L-N\right)}=kdt$$

$$\int\frac{dN}{N\left(L-N\right)}=\int kdt$$

$$\frac{1}{L}\left(\ln N-\ln\left(L-N\right)\right)=kt+C$$

$$\frac{1}{L}\ln\frac{N}{L-N}=kt+C$$

Comme la population est de 1 au départ (on va travailler en centaines milliers de personnes pour alléger), on a

$$\frac{1}{L}\ln\frac{1}{L-1}=k\cdot 0+C$$

$$\frac{1}{L}\ln\frac{1}{L-1}=C$$

On a donc

$$\frac{1}{L}\ln\frac{N}{L-N}=kt+\frac{1}{L}\ln\frac{1}{L-1}$$

$$\frac{1}{L}\left(\ln\frac{N}{L-N}-\ln\frac{1}{L-1}\right)=kt$$

$$\frac{1}{L}\ln\frac{N\left(L-1\right)}{\left(L-N\right)}=kt$$

On a alors deux informations. La population est de 2 à t = 25 et de 3 à t = 50. On obtient alors ces deux équations

$$\frac{1}{L}\ln\frac{2\left(L-1\right)}{\left(L-2\right)}=k\cdot 25$$

$$\frac{1}{L}\ln\frac{3\left(L-1\right)}{\left(L-3\right)}=k\cdot 50$$

Si on multiplie la première équation par 2, on a

$$\frac{2}{L}\ln\frac{2(L-1)}{(L-2)} = k\cdot 50$$
$$\frac{1}{L}\ln\frac{3(L-1)}{(L-3)} = k\cdot 50$$

Les deux côtés gauches des équations doivent donc être identiques. On a donc

$$\frac{2}{L}\ln\frac{2(L-1)}{(L-2)} = \frac{1}{L}\ln\frac{3(L-1)}{(L-3)}$$
$$\ln\left(\frac{2(L-1)}{(L-2)}\right)^2 = \ln\frac{3(L-1)}{(L-3)}$$
$$\left(\frac{2(L-1)}{(L-2)}\right)^2 = \frac{3(L-1)}{(L-3)}$$
$$\frac{4(L-1)}{(L-2)^2} = \frac{3}{(L-3)}$$
$$4(L-1)(L-3) = 3(L-2)^2$$
$$4\left(L^2-4L+3\right) = 3\left(L^2-4L+4\right)$$
$$4L^2-16L+12 = 3L^2-12L+12$$
$$4L^2-16L = 3L^2-12L$$
$$4L-16 = 3L-12$$
$$L = 4$$

La population maximale est donc de 400 000 personnes.

Trouvons maintenant la valeur de *k*. On a donc

$$\frac{1}{4}\ln\frac{N(4-1)}{(4-N)} = kt$$
$$\frac{1}{4}\ln\frac{3N}{(4-N)} = kt$$

Puisqu'on sait que la population est 2 à $t = 25$, on a

$$\frac{1}{4}\ln\frac{3\cdot 2}{(4-2)} = k\cdot 25$$
$$\frac{1}{100}\ln\frac{6}{2} = k$$
$$\frac{1}{100}\ln 3 = k$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{4}\ln\frac{3N}{(4-N)} = \frac{1}{100}\ln 3\cdot t$$
$$\ln\frac{3N}{(4-N)} = \frac{1}{25}\ln 3\cdot t$$

Il ne reste qu'à trouver la population à t = 100.

$$\ln\frac{3N}{(4-N)} = \frac{1}{25}\ln 3\cdot 100$$
$$\ln\frac{3N}{(4-N)} = 4\ln 3$$
$$\ln\frac{3N}{(4-N)} = \ln 3^4$$
$$\frac{3N}{(4-N)} = 81$$
$$3N = 324 - 81N$$
$$84N = 324$$
$$N = 3{,}85714$$

La population est donc de 385 714.

9.10 On dit que le taux de changement de masse est proportionnel à la différence entre le nombre de calories requis et le nombre consommé. On a donc

$$\frac{dm}{dt} = k\left(C_{consommé} - C_{requis}\right)$$

Comme la quantité requise est $50\frac{cal}{j\cdot kg}m$, on a

$$\frac{dm}{dt}=k\left(C_{consommé}-50\tfrac{cal}{j\cdot kg}m\right)$$

Avec la valeur de *k* donnée, on a

$$\frac{dm}{dt}=0,00013\tfrac{kg}{cal}\left(C_{consommé}-50\tfrac{cal}{j\cdot kg}m\right)$$

a) Si Huguette consomme 5000 calories par jours, on a alors l'équation suivante.

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt}&=0,00013\tfrac{kg}{cal}\left(5000\tfrac{cal}{j}-50\tfrac{cal}{j\cdot kg}m\right)\\ \frac{dm}{dt}&=0,65\tfrac{kg}{j}-0,0065\tfrac{1}{j}m\\ \frac{dm}{dt}+0,0065\tfrac{1}{j}m&=0,65\tfrac{kg}{j}\end{aligned}$$

C'est une équation linéaire avec $P(t)=0,0065\ j^{-1}$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(t)dt}=e^{\int 0,0065\frac{1}{j}dt}=e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$\begin{aligned}e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}\frac{dm}{dt}+0,0065\tfrac{1}{j}e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}m&=0,65\tfrac{kg}{j}e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}\\ e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}dm+0,0065\tfrac{1}{j}e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}mdt&=0,65\tfrac{kg}{j}e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}dt\end{aligned}$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}m\right)=0,65\tfrac{kg}{j}e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}dt$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\begin{aligned}\int d\left(e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}m\right)&=\int 0,65\tfrac{kg}{j}e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}dt\\ e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}m&=\frac{0,65\frac{kg}{j}}{0,0065\frac{1}{j}}e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}+C\\ e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}m&=100kg\,e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}+C\end{aligned}$$

Notre solution est donc

$$m = 100kg + Ce^{-0,0065\, j^{-1}\cdot t}$$

Comme la masse initiale d'Huguette est de 70 kg, on a

$$\begin{aligned} 70kg &= 100kg + Ce^{-0,0065\, j^{-1}\cdot 0} \\ 70kg &= 100kg + C \\ C &= -30kg \end{aligned}$$

La solution est donc

$$m = 100kg - 30kge^{-0,0065\, j^{-1}\cdot t}$$

Au bout de 30 jours, sa masse est

$$\begin{aligned} m &= 100kg - 30kge^{-0,0065\, j^{-1}\cdot 30\, j} \\ &= 75,3kg \end{aligned}$$

b) Si Huguette consomme 2000 calories par jours, on a alors l'équation suivante.

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= 0,00013\tfrac{kg}{cal}\left(2000\tfrac{cal}{j} - 50\tfrac{cal}{j\cdot kg}m\right) \\ \frac{dm}{dt} &= 0,26\tfrac{kg}{j} - 0,0065\tfrac{1}{j}m \\ \frac{dm}{dt} + 0,0065\tfrac{1}{j}m &= 0,26\tfrac{kg}{j} \end{aligned}$$

C'est une équation linéaire avec $P(t) = 0,0065\, j^{-1}$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(t)dt} = e^{\int 0,0065\frac{1}{j}dt} = e^{0,0065\, j^{-1}\cdot t}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$\begin{aligned} e^{0,0065\, j^{-1}\cdot t}\frac{dm}{dt} + 0,0065\tfrac{1}{j}e^{0,0065\, j^{-1}\cdot t}m &= 0,26\tfrac{kg}{j}e^{0,0065\, j^{-1}\cdot t} \\ e^{0,0065\, j^{-1}\cdot t}dm + 0,0065\tfrac{1}{j}e^{0,0065\, j^{-1}\cdot t}mdt &= 0,26\tfrac{kg}{j}e^{0,0065\, j^{-1}\cdot t}dt \end{aligned}$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}m\right)=0,26\tfrac{kg}{j}e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}dt$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}m\right)=\int 0,26\tfrac{kg}{j}e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}dt$$

$$e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}m=\frac{0,26\frac{kg}{j}}{0,0065\frac{1}{j}}e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}+C$$

$$e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}m=40kg\,e^{0,0065\,j^{-1}\cdot t}+C$$

Notre solution est donc

$$m=40kg+Ce^{-0,0065\,j^{-1}\cdot t}$$

Comme la masse initiale d'Huguette est de 70 kg, on a

$$70kg=40kg+Ce^{-0,0065\,j^{-1}\cdot 0}$$
$$70kg=40kg+C$$
$$C=30kg$$

La solution est donc

$$m=40kg+30kg\,e^{-0,0065\,j^{-1}\cdot t}$$

Au bout de 45 jours, sa masse est

$$\begin{aligned}m&=40kg+30kg\,e^{-0,0065\,j^{-1}\cdot 45\,j}\\&=62,4kg\end{aligned}$$

9.11 L'énergie mécanique est

$$E_{mec}=E_k+U_g$$
$$E_{mec}=E_k-\frac{GM_Tm}{r}$$

où M_T est la masse de la Terre. Au départ, l'énergie cinétique est nulle et Richard est à 400 000 km du centre de la Terre (donc à r_0 = 400 000 km du centre de la Terre). L'énergie initiale est donc

$$E_{mec} = 0 - \frac{GM_T m}{r_0}$$

Quand Richard se déplace vers la Terre (il est à une distance r du centre de la Terre), l'énergie est

$$E'_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r}$$

La conservation de l'énergie nous permet de trouver la vitesse à la distance x.

$$E_{mec} = E'_{mec}$$

$$-\frac{GM_T m}{r_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r}$$

$$-\frac{GM_T}{r_0} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_T}{r}$$

$$v^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$v = \pm\sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)}$$

Comme la vitesse est $v = dx/dr$, on a

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)}$$

(On garde la racine négative puisque r diminue quand Richard se déplace vers la Terre.)

On a alors une équation à variables séparables

$$-\frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}}dt$$

Si on intègre, on a

$$\sqrt{r_0 r - r^2} + \frac{r_0}{2}\arctan\left(\frac{r_0 - 2r}{2\sqrt{rr_0 - r^2}}\right) = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}}t + C$$

On sait qu'à $t = 0$, $r = r_0$. On a donc

$$\sqrt{r_0 r_0 - r_0^2} + \frac{r_0}{2}\arctan\left(\frac{r_0 - 2r_0}{2\sqrt{r_0 r_0 - r_0^2}}\right) = 0 + C$$

$$0 + \frac{r_0}{2}\arctan\left(-\infty\right) = 0 + C$$

$$\frac{r_0}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + C$$

$$C = -\frac{\pi r_0}{4}$$

On a donc

$$\sqrt{r_0 r - r^2} + \frac{r_0}{2}\arctan\left(\frac{r_0 - 2r}{2\sqrt{rr_0 - r^2}}\right) = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}}t - \frac{\pi r_0}{4}$$

On peut maintenant calculer le temps qu'il faudra pour arriver à la surface de la Terre, donc à $r = 6380$ km.

Calculons premièrement

$$\begin{aligned}\sqrt{r_0 r - r^2} &= \sqrt{4\times10^8 m \cdot 6,38\times10^6 m \cdot -\left(6,38\times10^6 m\right)^2}\\ &= 5,01128\times10^6 m\end{aligned}$$

On a alors

$$5,01128\times10^6 m+\frac{4\times10^8 m}{2}\cdot\arctan\left(\frac{4\times10^8 m-2\cdot 6,38\times10^6 m}{2\cdot 5,01128\times10^6 m}\right)$$
$$=\sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}}t-\frac{\pi\cdot 4\times10^8 m}{4}$$

$$5,05173\times10^7 m+2\times10^8 m\cdot\arctan\left(3,86368\right)=\sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}}t-3,141593\times10^8 m$$

$$3,136195\times10^8 m=\sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}}t-3,141593\times10^8 m$$

$$6,277788\times10^8 m=\sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}}t$$

En utilisant la valeur de la masse de la Terre, on a

$$6,277788\times10^8 m=\sqrt{\frac{2\cdot 6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 6\times10^{24}kg}{4\times10^8 m}}t$$
$$6,37805\times10^8 m=1414,99\tfrac{m}{s}\cdot t$$
$$t=443\,663s$$
$$t=123,24h$$

10.1 On ne connait pas l'équation différentielle associée à cette famille de courbe. On va donc isoler C dans cette équation.

$$y=-\frac{1}{2}x^2+C$$
$$C=y+\frac{1}{2}x^2$$

En faisant la différentielle de chaque côté de cette équation, on a

$$dC=\frac{\partial\left(y+\frac{1}{2}x^2\right)}{\partial x}dx+\frac{\partial\left(y+\frac{1}{2}x^2\right)}{\partial y}dy$$
$$0=xdx+dy$$
$$\frac{dy}{dx}=-x$$

Cela signifie que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

Il ne reste qu'à résoudre cette équation qui est une équation à variables séparables.

$$dy=\frac{1}{x}dx$$
$$\int dy=\int\frac{1}{x}dx$$
$$y=\ln|x|+c$$

10.2 On ne connait pas l'équation différentielle associée à cette famille de courbe.

$$x^2+2y^2=C$$

En faisant la différentielle de chaque côté de cette équation, on a

$$dC=\frac{\partial\left(x^2+2y^2\right)}{\partial x}dx+\frac{\partial\left(x^2+2y^2\right)}{\partial y}dy$$
$$0=2xdx+4ydy$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}$$

Cela signifie que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$$

Il ne reste qu'à résoudre cette équation qui est une équation à variables séparables.

$$\frac{1}{y}dy=\frac{1}{x}dx$$
$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{2}{x}dx$$
$$\ln|y|=2\ln|x|+\ln c$$
$$\ln|y|=\ln cx^2$$
$$y=cx^2$$

10.3 On ne connait pas l'équation différentielle associée à cette famille de courbe. On va donc isoler C dans cette équation.

$$y = Ce^{x}$$
$$C = ye^{-x}$$

En faisant la différentielle de chaque côté de cette équation, on a

$$dC = \frac{\partial\left(ye^{-x}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(ye^{-x}\right)}{\partial y}dy$$
$$0 = -ye^{-x}dx + e^{-x}dy$$
$$\frac{dy}{dx} = y$$

Cela signifie que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{y}$$

Il ne reste qu'à résoudre cette équation qui est une équation à variables séparables.

$$ydy = -dx$$
$$\int ydy = -\int dx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = -x + c$$
$$y^2 = c - 2x$$

(On a redéfini la constante à la dernière ligne.)

10.4 On ne connait pas l'équation différentielle associée à cette famille de courbe.

$$y^2 - x^2 = C$$

En faisant la différentielle de chaque côté de cette équation, on a

$$dC = \frac{\partial\left(y^2 - x^2\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(y^2 - x^2\right)}{\partial y}dy$$
$$0 = -2xdx + 2ydy$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Cela signifie que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

Il ne reste qu'à résoudre cette équation qui est une équation à variables séparables.

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$$
$$\int\frac{1}{y}dy = -\int\frac{1}{x}dx$$
$$\ln\left|y\right| = -\ln\left|x\right| + \ln c$$
$$y = \frac{c}{x}$$

10.5 On ne connait pas l'équation différentielle associée à cette famille de courbe.

$$C = x^2 + y^2$$

En faisant la différentielle de chaque côté de cette équation, on a

$$dC = \frac{\partial\left(x^2 + y^2\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(x^2 + y^2\right)}{\partial y}dy$$
$$0 = 2xdx + 2ydy$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Cela signifie que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Il ne reste qu'à résoudre cette équation qui est une équation à variables séparables.

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$$
$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$
$$\ln|y| = \ln|x| + \ln c$$
$$y = cx$$

10.6 On ne connait pas l'équation différentielle associée à cette famille de courbe. On va donc isoler *C* dans cette équation.

$$y = C\sqrt{x}$$
$$C = \frac{y}{\sqrt{x}}$$
$$C = yx^{-1/2}$$

En faisant la différentielle de chaque côté de cette équation, on a

$$dC = \frac{\partial\left(yx^{-1/2}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(yx^{-1/2}\right)}{\partial y}dy$$
$$0 = -\tfrac{1}{2}yx^{-3/2}dx + x^{-1/2}dy$$
$$0 = -\tfrac{1}{2}ydx + xdy$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Cela signifie que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{y}$$

Il ne reste qu'à résoudre cette équation qui est une équation à variables séparables.

$$ydy = -2xdx$$
$$\int ydy = -\int 2xdx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = -x^2 + c$$
$$2x^2 + y^2 = c$$

(On a redéfini la constante à la dernière ligne.)

10.7 On ne connait pas l'équation différentielle associée à cette famille de courbe. On va donc isoler C dans cette équation.

$$\begin{gathered}
\left(x+C\right)^2+y^2=C^2-1 \\
x^2+2xC+C^2+y^2=C^2-1 \\
x^2+2xC+y^2=-1 \\
C=\frac{-x^2-y^2-1}{2x}
\end{gathered}$$

En faisant la différentielle de chaque côté de cette équation, on a

$$\begin{gathered}
dC=\frac{\partial\left(\frac{-x^2-y^2-1}{2x}\right)}{\partial x}dx+\frac{\partial\left(\frac{-x^2-y^2-1}{2x}\right)}{\partial y}dy \\
0=\left(\frac{-2x\cdot 2x+2\left(x^2+y^2+1\right)}{4x^2}\right)dx+\frac{-2y}{2x}dy \\
0=\frac{-x^2+y^2+1}{2x^2}dx-\frac{y}{x}dy \\
ydy=\frac{-x^2+y^2+1}{2x}dx \\
\frac{dy}{dx}=\frac{-x^2+y^2+1}{2xy}
\end{gathered}$$

Cela signifie que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2-1}$$

L'équation n'est malheureusement pas d'une forme qu'on peut résoudre. Toutefois, on peut montrer que la famille orthogonale donnée donne bel et bien cette équation différentielle. L'équation de la famille orthogonale est

$$x^2+\left(y-c\right)^2=1+c^2$$

On va isoler c dans cette équation.

$$x^2 + y^2 - 2yc + c^2 = 1 + c^2$$
$$x^2 + y^2 - 2yc = 1$$
$$c = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2y}$$

En faisant la différentielle de chaque côté de cette équation, on a

$$dc = \frac{\partial\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{2y}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{2y}\right)}{\partial y}dy$$
$$0 = \left(\frac{2x}{2y}\right)dx + \left(\frac{2y \cdot 2y - 2\left(x^2 + y^2 - 1\right)}{4y^2}\right)dy$$
$$0 = \frac{x}{y}dx + \frac{-x^2 + y^2 + 1}{2y^2}dy$$
$$xdx = \frac{x^2 - y^2 - 1}{2y}dy$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1}$$

C'est la même équation que celle obtenue pour les trajectoires orthogonales. Cela prouve que les deux familles sont orthogonales.

11.1 Notre équation est

$$(y')^2 - xy' - 2yy' + 2xy = 0$$

On peut résoudre cette équation en y'.

$$(y')^2 - (x + 2y)\,y' + 2xy = 0$$

Le terme du milieu laisse penser que les deux racines de l'équation sont x et $2y$. Comme le troisième terme est la multiplication de ces deux valeurs, ce sont bel et bien nos deux racines. L'équation est donc

$$(y' - x)(y' - 2y) = 0$$

On a alors cette première équation

$$\begin{aligned}
y' - x &= 0 \\
\frac{dy}{dx} - x &= 0 \\
dy &= xdx \\
y &= \tfrac{1}{2}x^2 + C
\end{aligned}$$

On a ensuite cette deuxième équation

$$\begin{aligned}
y' - 2y &= 0 \\
\frac{dy}{dx} - 2y &= 0 \\
\frac{1}{y}dy &= 2dx \\
\ln|y| &= 2x + C \\
y &= Ce^{2x}
\end{aligned}$$

On a redéfini la constante à la dernière ligne.

Les solutions sont donc

$$\begin{aligned}
y &= \tfrac{1}{2}x^2 + C \\
y &= Ce^{2x}
\end{aligned}$$

Notez que l'équation est aussi résoluble en x et en y, mais les équations à résoudre sont loin d'être simples.

11.2 Notre équation est

$$x(y')^2 + y'(-xe^x + x + y) - xe^x - ye^x = 0$$

On peut résoudre cette équation en y'.

$$(y')^2 + y'\left(-e^x + 1 + \frac{y}{x}\right) + \left(-e^x - \frac{y}{x}e^x\right) = 0$$

Le terme du milieu laisse penser que les deux racines de l'équation sont e^x et $-1 - \frac{y}{x}$. Comme le troisième terme est la multiplication de ces deux valeurs, ce sont bel et bien nos deux racines. L'équation est donc

$$\left(y'-e^x\right)\left(y'+1+\frac{y}{x}\right)=0$$

On a alors cette première équation

$$\begin{aligned}
y'-e^x&=0\\
\frac{dy}{dx}-e^x&=0\\
dy&=e^x dx\\
y&=e^x+C
\end{aligned}$$

On a ensuite cette deuxième équation

$$\begin{aligned}
y'+1+\frac{y}{x}&=0\\
\frac{dy}{dx}+1+\frac{y}{x}&=0\\
\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y&=-1
\end{aligned}$$

C'est une équation linéaire. Le facteur intégrant est

$$e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

On a donc

$$\begin{aligned}
x\frac{dy}{dx}+y&=-x\\
xdy+ydx&=-xdx\\
d\left(xy\right)&=-xdx\\
xy&=-\tfrac{1}{2}x^2+C\\
y&=-\frac{1}{2}x+\frac{C}{x}
\end{aligned}$$

Les deux solutions sont donc

$$\begin{aligned}
y&=e^x+C\\
y&=-\frac{1}{2}x+\frac{C}{x}
\end{aligned}$$

Notez que l'équation est aussi résoluble en y, mais les équations à résoudre sont loin d'être simples.

11.3 Notre équation est

$$y(y')^2 + y'(x - xy) - x^2 = 0$$

On peut résoudre cette équation en y'.

$$(y')^2 + y'\left(\frac{x}{y} - x\right) - \frac{x^2}{y} = 0$$

Le terme du milieu laisse penser que les deux racines de l'équation sont x et $-\frac{x}{y}$. Comme le troisième terme est la multiplication de ces deux valeurs, ce sont bel et bien nos deux racines. L'équation est donc

$$(y' - x)\left(y' + \frac{x}{y}\right) = 0$$

On a alors cette première équation

$$\begin{gathered} y' - x = 0 \\ \frac{dy}{dx} - x = 0 \\ dy = xdx \\ y = \tfrac{1}{2}x^2 + C \end{gathered}$$

On a ensuite cette deuxième équation

$$\begin{gathered} y' + \frac{x}{y} = 0 \\ \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \\ ydy = -xdx \\ \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + C \\ x^2 + y^2 = C \end{gathered}$$

On a redéfini la constante à la dernière ligne.

Les deux solutions sont donc

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$x^2 + y^2 = C$$

Notez que l'équation est aussi résoluble en y, mais les équations à résoudre sont loin d'être simples.

11.4 Notre équation est

$$x^2 (y')^2 - y'(y + x^3) + xy = 0$$

On peut résoudre cette équation en y'.

$$(y')^2 - y'\left(\frac{y}{x^2} + x\right) + \frac{y}{x} = 0$$

Le terme du milieu laisse penser que les deux racines de l'équation sont x et $\frac{y}{x^2}$. Comme le troisième terme est la multiplication de ces deux valeurs, ce sont bel et bien nos deux racines. L'équation est donc

$$(y' - x)\left(y' - \frac{y}{x^2}\right) = 0$$

On a alors cette première équation

$$y' - x = 0$$
$$\frac{dy}{dx} - x = 0$$
$$dy = xdx$$
$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + C$$

On a ensuite cette deuxième équation

$$y' - \frac{y}{x^2} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$
$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x^2}dx$$
$$\ln|y| = -\frac{1}{x} + C$$
$$y = Ce^{-\frac{1}{x}}$$

On a redéfini la constante à la dernière ligne.

Les deux solutions sont donc

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$y = Ce^{-\frac{1}{x}}$$

Notez que l'équation est aussi résoluble en y, mais les équations à résoudre sont loin d'être simples.

11.5 Notre équation est

$$y = x(y') + (y')^3 + 1$$

Version 1

On peut résoudre cette équation en y (c'est déjà fait…). On a alors

$$y = xp + p^3 + 1$$

Si on fait la différentielle, on a

$$dy = \frac{\partial\left(xp + p^3 + 1\right)}{\partial x} dx + \frac{\partial\left(xp + p^3 + 1\right)}{\partial p} dp$$

$$dy = (p)\,dx + \left(x + 3p^2\right) dp$$

$$\frac{dy}{dx} = p + \left(x + 3p^2\right)\frac{dp}{dx}$$

$$p = p + \left(x + 3p^2\right)\frac{dp}{dx}$$

$$0 = \left(x + 3p^2\right)\frac{dp}{dx}$$

$$0 = \frac{dp}{dx}$$

$$C = p$$

La solution est donc

$$y = xC + C^3 + 1$$

Version 2

On peut résoudre cette équation en *x*. On a alors

$$x = \frac{y - p^3 - 1}{p}$$

Si on fait la différentielle, on a

$$dx = \frac{\partial\left(\frac{y-p^3-1}{p}\right)}{\partial y}dy + \frac{\partial\left(\frac{y-p^3-1}{p}\right)}{\partial p}dp$$

$$dx = \frac{1}{p}dy + \left(\frac{-y}{p^2} - 2p + \frac{1}{p^2}\right)dp$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} + \left(\frac{-y}{p^2} - 2p + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \left(\frac{-y}{p^2} - 2p + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}$$

$$0 = \left(\frac{-y}{p^2} - 2p + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}$$

$$0 = \frac{dp}{dy}$$

$$C = p$$

La solution est donc

$$x = \frac{y-p^3-1}{p}$$

$$x = \frac{y-C^3-1}{C}$$

$$y = Cx + C^3 + 1$$

C’est la même solution qu’à la version 1.

11.6 Notre équation est

$$y = x\left(y'\right)^3 + 1$$

Version 1

On peut résoudre cette équation en y (c’est déjà fait…). On a alors

$$y = xp^3 + 1$$

Si on fait la différentielle, on a

$$dy = \frac{\partial\left(xp^3+1\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(xp^3+1\right)}{\partial p}dp$$

$$dy = p^3 dx + 3xp^2 dp$$

$$\frac{dy}{dx} = p^3 + 3xp^2\frac{dp}{dx}$$

$$p = p^3 + 3xp^2\frac{dp}{dx}$$

$$1 = p^2 + 3xp\frac{dp}{dx}$$

Cette équation est une équation à variables séparables.

$$\frac{1-p^2}{p} = 3x\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{3p}{p^2-1}dp = -\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{3}{2}\ln\left(p^2-1\right) = -\ln|x| + \ln C$$

$$\ln\left(p^2-1\right)^{3/2} = \ln\frac{C}{x}$$

$$\left(p^2-1\right)^{3/2} = \frac{C}{x}$$

$$p^2 - 1 = \frac{C}{x^{2/3}}$$

$$p^2 = \frac{C}{x^{2/3}} + 1$$

$$p = \sqrt{\frac{C}{x^{2/3}} + 1}$$

La solution est donc

$$y = xp^3 + 1$$

$$y = x\sqrt{\frac{C}{x^{2/3}} + 1}^{\,3} + 1$$

$$y = x\left(\frac{C}{x^{2/3}} + 1\right)^{3/2} + 1$$

On peut réécrire cette solution sous la forme suivante.

$$y=\left(x^{2/3}\left(\frac{C}{x^{2/3}}+1\right)\right)^{3/2}+1$$
$$y=\left(C+x^{2/3}\right)^{3/2}+1$$

Version 2

On peut résoudre cette équation en x. On a alors

$$x=\frac{y-1}{p^3}$$

Si on fait la différentielle, on a

$$dx=\frac{\partial\left(\frac{y-1}{p^3}\right)}{\partial y}dy+\frac{\partial\left(\frac{y-1}{p^3}\right)}{\partial p}dp$$
$$dx=\frac{1}{p^3}dy-3\frac{y-1}{p^4}dp$$
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p^3}-3\frac{y-1}{p^4}\frac{dp}{dy}$$
$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p^3}-3\frac{y-1}{p^4}\frac{dp}{dy}$$
$$1=\frac{1}{p^2}-3\frac{y-1}{p^3}\frac{dp}{dy}$$

C'est une équation à variable séparable

$$\frac{1}{p^2}-1=3\frac{y-1}{p^3}\frac{dp}{dy}$$
$$p-p^3=3(y-1)\frac{dp}{dy}$$
$$\frac{1}{y-1}dy=3\frac{1}{p-p^3}dp$$
$$\ln|y-1|=3\ln|p|-\frac{3}{2}\ln\left|1-p^2\right|+\ln C$$
$$\ln|y-1|=\ln Cp^3\left(1-p^2\right)^{-3/2}$$
$$y-1=Cp^3\left(1-p^2\right)^{-3/2}$$

Or, comme

$$x = \frac{y-1}{p^3}$$

on a

$$p^3 = \frac{y-1}{x}$$

Cela nous amène à

$$\begin{gathered}
y-1 = Cp^3\left(1-p^2\right)^{-3/2} \\
y-1 = C\frac{y-1}{x}\left(1-p^2\right)^{-3/2} \\
x = C\left(1-p^2\right)^{-3/2} \\
Cx = \left(1-p^2\right)^{-3/2} \\
Cx^{-2/3} = 1-p^2 \\
p^2 = 1+Cx^{-2/3}
\end{gathered}$$

La solution est donc

$$\begin{gathered}
y = xp^3+1 \\
y = x\left(1+Cx^{-2/3}\right)^{3/2}+1 \\
y = \left(x^{2/3}+C\right)^{3/2}+1
\end{gathered}$$

C'est la même solution qu'à la version 1.

<u>Version 3</u>

On peut résoudre cette équation en y'. On a alors

$$p = \sqrt[3]{\frac{y-1}{x}}$$

On a alors

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{y-1}{x}}$$
$$(y-1)^{-1/3}\,dy = x^{-1/3}dx$$
$$\frac{3}{2}(y-1)^{2/3} = \frac{3}{2}x^{2/3} + C$$
$$(y-1)^{2/3} = x^{2/3} + C$$
$$y-1 = \left(x^{2/3} + C\right)^{3/2}$$
$$y = \left(x^{2/3} + C\right)^{3/2} + 1$$

C’est la même solution qu’aux versions 1 et 2.

11.7 Notre équation est

$$(y')^2 + 1 = y^2$$

Version 1

On peut résoudre cette équation en *y*. On a alors

$$y = \sqrt{p^2+1}$$

Si on fait la différentielle, on a

$$dy = \frac{\partial\sqrt{p^2+1}}{\partial x}dx + \frac{\partial\sqrt{p^2+1}}{\partial p}dp$$
$$dy = 0dx + \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}dp$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\frac{dp}{dx}$$
$$p = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\frac{dp}{dx}$$
$$1 = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\frac{dp}{dx}$$

Cette équation est une équation à variables séparables.

$$dx = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}dp$$
$$x + C = \text{arsinh } p$$
$$p = \sinh(x+C)$$

La solution est donc

$$y = \sqrt{p^2+1}$$
$$y = \sqrt{\sinh^2(x+C)+1}$$
$$y = \cosh(x+C)$$

Version 2

On peut résoudre cette équation en y'. On a alors

$$(y')^2 = y^2 - 1$$
$$y' = \pm\sqrt{y^2-1}$$

La première équation donne

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2-1}$$
$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = dx$$
$$\text{arcosh } y = x + C$$
$$y = \cosh(x+C)$$

La deuxième équation donne.

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y^2-1}$$
$$\frac{-dy}{\sqrt{y^2-1}} = dx$$
$$\text{arcosh } y = x + C$$
$$y = \cosh(x+C)$$

La solution est donc

$$y = \cosh\left(x + C\right)$$

11.8 Notre équation est

$$y = x\left(y'\right) + \frac{1}{\left(y'\right)^2}$$

Version 1

On peut résoudre cette équation en *y* (c'est déjà fait…). On a alors

$$y = xp + \frac{1}{p^2}$$

Si on fait la différentielle, on a

$$\begin{aligned}
dy &= \frac{\partial\left(xp + \frac{1}{p^2}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(xp + \frac{1}{p^2}\right)}{\partial p}dp \\
dy &= pdx + \left(x - \frac{2}{p^3}\right)dp \\
\frac{dy}{dx} &= p + \left(x - \frac{2}{p^3}\right)\frac{dp}{dx} \\
p &= p + \left(x - \frac{2}{p^3}\right)\frac{dp}{dx} \\
0 &= \left(x - \frac{2}{p^3}\right)\frac{dp}{dx} \\
0 &= \frac{dp}{dx} \\
C &= p
\end{aligned}$$

La solution est donc

$$\begin{aligned}
y &= xp + \frac{1}{p^2} \\
y &= xC + \frac{1}{C^2}
\end{aligned}$$

Version 2

On peut résoudre cette équation en *x*. On a alors

$$x=\frac{y}{p}-\frac{1}{p^3}$$

Si on fait la différentielle, on a

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial\left(\frac{y}{p}-\frac{1}{p^3}\right)}{\partial y}dy+\frac{\partial\left(\frac{y}{p}-\frac{1}{p^3}\right)}{\partial p}dp \\
dx &= \frac{1}{p}dy+\left(\frac{-y}{p^2}+\frac{3}{p^4}\right)dp \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{1}{p}+\left(\frac{-y}{p^2}+\frac{3}{p^4}\right)\frac{dp}{dy} \\
\frac{1}{p} &= \frac{1}{p}+\left(\frac{-y}{p^2}+\frac{3}{p^4}\right)\frac{dp}{dy} \\
0 &= \left(\frac{-y}{p^2}+\frac{3}{p^4}\right)\frac{dp}{dy} \\
0 &= \frac{dp}{dy} \\
C &= p
\end{aligned}$$

La solution est donc

$$\begin{aligned}
x &= \frac{y}{p}-\frac{1}{p^3} \\
x &= \frac{y}{C}-\frac{1}{C^3} \\
y &= C\left(x+\frac{1}{C^2}\right) \\
y &= Cx+\frac{1}{C^2}
\end{aligned}$$

11.9 Notre équation est

$$x = \frac{y}{y'} + y'$$

Version 1

On peut résoudre cette équation en *x* (c'est déjà fait…). On a alors

$$x = \frac{y}{p} + p$$

Si on fait la différentielle, on a

$$dx = \frac{\partial\left(\frac{y}{p} + p\right)}{\partial y} dy + \frac{\partial\left(\frac{y}{p} + p\right)}{\partial p} dp$$
$$dx = \frac{1}{p} dy + \left(\frac{-y}{p^2} - 1\right) dp$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} + \left(\frac{-y}{p^2} - 1\right) \frac{dp}{dy}$$
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \left(\frac{-y}{p^2} - 1\right) \frac{dp}{dy}$$
$$0 = \left(\frac{-y}{p^2} - 1\right) \frac{dp}{dy}$$
$$0 = \frac{dp}{dy}$$
$$C = p$$

La solution est donc

$$x = \frac{y}{p} + p$$
$$x = \frac{y}{C} + C$$
$$y = C\left(x - C\right)$$
$$y = Cx - C^2$$

Version 2

On peut résoudre cette équation en *y*. On a alors

$$y = p(x-p)$$
$$y = px - p^2$$

Si on fait la différentielle, on a

$$dy = \frac{\partial(px-p^2)}{\partial x}dx + \frac{\partial(px-p^2)}{\partial p}dp$$
$$dy = pdx + (x-2p)dp$$
$$\frac{dy}{dx} = p + (x-2p)\frac{dp}{dx}$$
$$p = p + (x-2p)\frac{dp}{dx}$$
$$0 = (x-2p)\frac{dp}{dx}$$
$$0 = \frac{dp}{dx}$$
$$C = p$$

La solution est donc

$$y = px - p^2$$
$$y = Cx - C^2$$

12.1 Notre équation est

$$y'' = 12$$

C'est un cas où y et y' sont absents. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$p' = 12$$
$$\frac{dp}{dx} = 12$$
$$p = 12x + C_1$$

On a ensuite

$$p = 12x + C_1$$
$$\frac{dy}{dx} = 12x + C_1$$
$$y = 6x^2 + C_1 x + C_2$$

12.2 Notre équation est

$$y'' = 24x^2 + 12x + 6$$

C'est un cas où y et y' sont absents. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$p' = 24x^2 + 12x + 6$$
$$\frac{dp}{dx} = 24x^2 + 12x + 6$$
$$p = 8x^3 + 6x^2 + 6x + C_1$$

On a ensuite

$$p = 8x^3 + 6x^2 + 6x + C_1$$
$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 + 6x^2 + 6x + C_1$$
$$y = 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + C_1 x + C_2$$

12.3 Notre équation est

$$y'' = \sinh x$$

C'est un cas où y et y' sont absents. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$p' = \sinh x$$
$$\frac{dp}{dx} = \sinh x$$
$$p = \cosh x + C_1$$

On a ensuite

$$p = \cosh x + C_1$$
$$\frac{dy}{dx} = \cosh x + C_1$$
$$y = \sinh x + C_1 x + C_2$$

12.4 Notre équation est

$$y'' + 9y = 0$$

C'est un cas où x et y' sont absents. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$p' = -9y$$
$$\frac{dp}{dx} = -9y$$
$$\frac{dy}{dx}dp = -9ydy$$
$$pdp = -9ydy$$
$$\tfrac{1}{2}p^2 = \tfrac{-9}{2}y^2 + C_1$$
$$p^2 = -9y^2 + C_1$$

(On a redéfini la constante à la dernière ligne.) On a ensuite

$$(y')^2 = -9y^2 + C_1$$
$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 - 9y^2}$$
$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 - 9y^2}} = \pm dx$$
$$\frac{1}{3}\arcsin\frac{3y}{\sqrt{C_1}} = \pm x + C_2$$
$$y = \frac{\sqrt{C_1}}{3}\sin(\pm 3x + 3C_2)$$
$$y = C_1 \sin(3x + C_2)$$

(On a redéfini les constantes à la dernière ligne.)

12.5 Notre équation est

$$y'' - 9y = 0$$

C'est un cas où x et y' sont absents. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$\begin{aligned}
p' &= 9y \\
\frac{dp}{dx} &= 9y \\
\frac{dy}{dx}dp &= 9ydy \\
pdp &= 9ydy \\
\tfrac{1}{2}p^2 &= \tfrac{9}{2}y^2 + C_1 \\
p^2 &= 9y^2 + C_1
\end{aligned}$$

(On a redéfini la constante à la dernière ligne.) On a ensuite

$$\begin{aligned}
(y')^2 &= 9y^2 + C_1 \\
\frac{dy}{dx} &= \pm\sqrt{C_1 + 9y^2} \\
\frac{dy}{\sqrt{C_1 + 9y^2}} &= \pm dx \\
\frac{1}{3}\operatorname{arcsinh}\frac{3y}{\sqrt{C_1}} &= \pm x + C_2 \\
y &= \frac{\sqrt{C_1}}{3}\sinh(\pm 3x + 3C_2) \\
y &= C_1 \sinh(3x + C_2)
\end{aligned}$$

(On a redéfini les constantes à la dernière ligne.)

12.6 Notre équation est

$$y'' = \frac{1}{y^3}$$

C'est un cas où x et y' sont absents. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$p' = \frac{1}{y^3}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{y^3}$$

$$\frac{dy}{dx}dp = \frac{1}{y^3}dy$$

$$pdp = \frac{1}{y^3}dy$$

$$\tfrac{1}{2}p^2 = \frac{-1}{2y^2} + C_1$$

$$p^2 = \frac{-1}{y^2} + C_1$$

(On a redéfini la constante à la dernière ligne.) On a ensuite

$$(y')^2 = \frac{-1}{y^2} + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{-1}{y^2} + C_1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 - \frac{1}{y^2}}} = \pm dx$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{C_1y^2 - 1}} = \pm dx$$

$$\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2 - 1} = \pm x + C_2$$

$$C_1y^2 - 1 = \left(\pm C_1x + C_1C_2\right)^2$$

$$C_1y^2 = \left(C_1x + C_2\right)^2 + 1$$

(On a redéfini les constantes à la dernière ligne.)

12.7 Notre équation est

$$y'' = \sec^2 y \tan y$$

C'est un cas où x et y' sont absents. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$
\begin{aligned}
p' &= \sec^2 y \tan y \\
\frac{dp}{dx} &= \sec^2 y \tan y \\
\frac{dy}{dx} dp &= \sec^2 y \tan y dy \\
p dp &= \sec^2 y \tan y dy \\
\tfrac{1}{2} p^2 &= \tfrac{1}{2} \sec^2 y + C_1 \\
p^2 &= \sec^2 y + C_1
\end{aligned}
$$

(On a redéfini la constante à la dernière ligne.)

On sait ensuite que p= 1 quand y = π/4, On a donc

$$
\begin{aligned}
p^2 &= \sec^2 y + C_1 \\
1 &= \sec^2 \tfrac{\pi}{4} + C_1 \\
1 &= 2 + C_1 \\
C_1 &= -1
\end{aligned}
$$

On a ensuite

$$
\begin{aligned}
(y')^2 &= \sec^2 y - 1 \\
(y')^2 &= \tan^2 y \\
\frac{dy}{dx} &= \tan y \\
\frac{\cos y dy}{\sin y} &= dx \\
\ln|\sin x| &= x + C_2
\end{aligned}
$$

On sait ensuite que y = π/4 quand x = 3, On a donc

$$
\begin{aligned}
\ln|\sin x| &= x + C_2 \\
\ln\left|\sin \tfrac{\pi}{4}\right| &= 3 + C_2 \\
C_2 &= \ln \tfrac{\sqrt{2}}{2} - 3
\end{aligned}
$$

On a donc

$$\ln|\sin y| = x + \ln\tfrac{\sqrt{2}}{2} - 3$$
$$\ln|\sin y| - \ln\tfrac{\sqrt{2}}{2} = x - 3$$
$$\ln\sqrt{2}|\sin y| = x - 3$$
$$\sqrt{2}|\sin y| = e^{x-3}$$
$$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{x-3}$$
$$y = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{x-3}\right)$$

12.8 Notre équation est

$$xy'' - 2y' = x^3 \sin x$$

C'est un cas où y est absent. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$xp' - 2p = x^3 \sin x$$
$$p' - \frac{2}{x}p = x^2 \sin x$$
$$\frac{dp}{dx} - \frac{2}{x}p = x^2 \sin x$$

C'est une équation linéaire. Le facteur intégrant est

$$e^{\int \frac{-2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

On a donc

$$x^{-2}\frac{dp}{dx} - 2x^{-3}p = \sin x$$
$$x^{-2}dp - 2x^{-3}pdx = \sin x dx$$
$$d\left(x^{-2}p\right) = \sin x dx$$
$$x^{-2}p = -\cos x + C_1$$
$$p = -x^2\cos x + C_1x^2$$

On a ensuite

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 \cos x + C_1 x^2$$
$$dy = \left(-x^2 \cos x + C_1 x^2\right) dx$$
$$y = -x^2 \sin x + 2\sin x - 2x\cos x + \tfrac{1}{3} C_1 x^3 + C_2$$
$$y = -x^2 \sin x + 2\sin x - 2x\cos x + C_1 x^3 + C_2$$

(On a redéfini les constantes à la dernière ligne.)

12.9 Notre équation est

$$xy'' - y' = 1$$

C'est un cas où y est absent. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$xp' - p = 1$$
$$p' - \frac{1}{x} p = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = \frac{1}{x}$$

C'est une équation linéaire. Le facteur intégrant est

$$e^{\int \frac{-1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$$

On a donc

$$x^{-1} \frac{dp}{dx} - x^{-2} p = x^{-2}$$
$$x^{-1} dp - x^{-2} p dx = x^{-2} dx$$
$$d\left(x^{-1} p\right) = x^{-2} dx$$
$$x^{-1} p = -x^{-1} + C_1$$
$$p = -1 + C_1 x$$

On a ensuite

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x - 1$$
$$dy = (C_1 x - 1)\,dx$$
$$y = \tfrac{1}{2} C_1 x^2 - x + C_2$$
$$y = C_1 x^2 - x + C_2$$

(On a redéfini les constantes à la dernière ligne.)

12.10 Notre équation est

$$y'' - \left(1 + \frac{1}{x}\right) y' = x$$

C'est un cas où y est absent. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$p' - \left(1 + \frac{1}{x}\right) p = x$$
$$\frac{dp}{dx} - \left(1 + \frac{1}{x}\right) p = x$$

C'est une équation linéaire. Le facteur intégrant est

$$e^{\int\left(-1-\frac{1}{x}\right)dx} = e^{-x-\ln x} = e^{-x} e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} e^{-x}$$

On a donc

$$x^{-1}e^{-x}\frac{dp}{dx} - x^{-1}e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) p = x^{-1}e^{-x} x$$
$$x^{-1}e^{-x}\frac{dp}{dx} - \left(x^{-1}e^{-x} + x^{-2}e^{-x}\right) p = e^{-x}$$
$$x^{-1}e^{-x} dp - \left(x^{-1}e^{-x} + x^{-2}e^{-x}\right) p dx = e^{-x} dx$$
$$d\left(x^{-1}e^{-x} p\right) = e^{-x} dx$$
$$x^{-1}e^{-x} p = -e^{-x} + C_1$$
$$p = -x + C_1 x e^{x}$$

On a ensuite

$$\frac{dy}{dx} = -x + C_1 x e^x$$
$$dy = \left(-x + C_1 x e^x\right) dx$$
$$y = -\tfrac{1}{2} x^2 + C_1 \left(x - 1\right) e^x + C_2$$

12.11 Notre équation est

$$xy'' - y' = 8x^2$$

C'est un cas où y est absent. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$xp' - p = 8x^2$$
$$p' - \frac{1}{x} p = 8x$$
$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = 8x$$

C'est une équation linéaire. Le facteur intégrant est

$$e^{\int \frac{-1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$$

On a donc

$$x^{-1} \frac{dp}{dx} - x^{-2} p = 8$$
$$x^{-1} dp - x^{-2} p dx = 8dx$$
$$d\left(x^{-1} p\right) = 8dx$$
$$x^{-1} p = 8x + C_1$$
$$p = 8x^2 + C_1 x$$

On a ensuite

$$\frac{dy}{dx} = 8x^2 + C_1 x$$
$$dy = \left(8x^2 + C_1 x\right) dx$$
$$y = \tfrac{8}{3} x^3 + \tfrac{1}{2} C_1 x^2 + C_2$$
$$y = \tfrac{8}{3} x^3 + C_1 x^2 + C_2$$

(On a redéfini les constantes à la dernière ligne.)

12.12 Notre équation est

$$1+(y')^2+yy''=0$$

C'est un cas où x est absent. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$1+p^2+yp'=0$$
$$1+p^2+y\frac{dp}{dx}=0$$
$$1+p^2+y\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=0$$
$$1+p^2+y\frac{dp}{dy}p=0$$
$$y\frac{dp}{dy}=-\frac{1+p^2}{p}$$

C'est une équation à variables séparables. On a donc

$$\frac{p}{1+p^2}dp=-\frac{1}{y}dy$$
$$\tfrac{1}{2}\ln\left|1+p^2\right|=-\ln\left|y\right|+\ln C_1$$
$$\ln\sqrt{\left|1+p^2\right|}=\ln\frac{C_1}{y}$$
$$\sqrt{\left|1+p^2\right|}=\frac{C_1}{y}$$
$$1+p^2=\frac{C_1}{y^2}$$

(On a redéfini la constante à la dernière ligne.)

Si $y'=0$ et $y = 2$ quand $x = 2$, on a

$$1+p^2=\frac{C_1}{y^2}$$
$$1+0=\frac{C_1}{4}$$
$$C_1=4$$

On a ensuite

$$1+p^2=\frac{4}{y^2}$$
$$p^2=\frac{4}{y^2}-1$$
$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{4}{y^2}-1}$$
$$\frac{ydy}{\sqrt{4-y^2}}=dx$$
$$-\sqrt{4-y^2}=x+C_2$$

Si $y'=0$ et $y = 2$ quand $x = 2$, on a

$$-\sqrt{4-2^2}=2+C_2$$
$$C_2=-2$$

On a donc

$$-\sqrt{4-y^2}=x-2$$
$$4-y^2=(x-2)^2$$
$$y^2=4-(x-2)^2$$
$$y^2=4-x^2+4x-4$$
$$y^2=-x^2+4x$$

12.13 Notre équation est

$$y''+yy'=0$$

C'est un cas où x est absent. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$p' + yp = 0$$
$$\frac{dp}{dx} + yp = 0$$
$$\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} + yp = 0$$
$$\frac{dp}{dy} p + yp = 0$$
$$\frac{dp}{dy} + y = 0$$

C'est une équation à variables séparables. On a donc

$$\frac{dp}{dy} = -y$$
$$dp = -ydy$$
$$p = -\tfrac{1}{2} y^2 + C_1$$

Si $y' = -1$ et $y = 1$ quand $x = 1$

$$p = -\tfrac{1}{2} y^2 + C_1$$
$$-1 = -\tfrac{1}{2} + C_1$$
$$C_1 = -\tfrac{1}{2}$$

On a ensuite

$$p = -\tfrac{1}{2} y^2 - \tfrac{1}{2}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2} y^2 - \tfrac{1}{2}$$
$$\frac{dy}{y^2 + 1} = -\tfrac{1}{2} dx$$
$$\arctan y = -\tfrac{1}{2} x + C_2$$

Si $y' = -1$ et $y = 1$ quand $x = 1$

$$\arctan y = -\tfrac{1}{2} x + C_2$$
$$\arctan 1 = -\tfrac{1}{2} + C_2$$
$$\tfrac{\pi}{4} = -\tfrac{1}{2} + C_2$$
$$C_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\pi}{4}$$

On a donc

$$\arctan y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\pi}{4}$$
$$y = \tan\left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

12.14 Notre équation est

$$yy'' = 2(y')^2$$

C'est un cas où x est absent. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$yp' = 2p^2$$
$$y\frac{dp}{dx} = 2p^2$$
$$y\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = 2p^2$$
$$y\frac{dp}{dy}p = 2p^2$$
$$y\frac{dp}{dy} = 2p$$

C'est une équation à variables séparables. On a donc

$$y\frac{dp}{dy} = 2p$$
$$\frac{1}{p}dp = \frac{2}{y}dy$$
$$\ln|p| = 2\ln|y| + \ln C_1$$
$$\ln|p| = \ln C_1 y^2$$
$$p = C_1 y^2$$

Si $y' = 8$ et $y = 2$ quand $x = 1$, on a

$$p = C_1 y^2$$
$$8 = C_1 \cdot 2^2$$
$$C_1 = 2$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} p &= 2y^2 \\ \frac{dy}{dx} &= 2y^2 \\ \frac{dy}{y^2} &= 2dx \\ \frac{-1}{y} &= 2x + C_2 \end{aligned}$$

Si $y' = 8$ et $y = 2$ quand $x = 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{-1}{y} &= 2x + C_2 \\ \frac{-1}{2} &= 2 \cdot 1 + C_2 \\ C_2 &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{-1}{y} &= 2x - \frac{5}{2} \\ -y &= \frac{1}{2x - \frac{5}{2}} \\ -y &= \frac{2}{4x - 5} \\ y &= \frac{2}{5 - 4x} \end{aligned}$$

12.15 Notre équation est

$$2yy'' - (y')^2 = 4y^2$$

C'est un cas où x est absent. On pose alors $p = y'$. On a alors

$$2yp' - p^2 = 4y^2$$
$$2y\frac{dp}{dx} - p^2 = 4y^2$$
$$2y\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} - p^2 = 4y^2$$
$$2y\frac{dp}{dy}p - p^2 = 4y^2$$
$$\frac{dp}{dy} - \frac{1}{2y}p = \frac{2y}{p}$$

C’est une équation de Bernoulli. On multiplie par *p*

$$p\frac{dp}{dy} - \frac{1}{2y}p^2 = 2y$$

et on pose $u = p^2$ (ce qui implique que $du = 2pdp$. On a alors

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dy} - \frac{1}{2y}u = 2y$$
$$\frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = 4y$$

On a alors une équation linéaire. Le facteur intégrant est

$$e^{\int \frac{-1}{y}dy} = e^{-\ln y} = e^{\ln y^{-1}} = y^{-1}$$

On a alors

$$y^{-1}\frac{du}{dy} - y^{-2}u = 4$$
$$y^{-1}du - y^{-2}udy = 4dy$$
$$d\left(y^{-1}u\right) = 4dy$$
$$y^{-1}u = 4y + C_1$$
$$u = 4y^2 + C_1 y$$

Si on défait notre changement de variable, on a

$$p^2 = 4y^2 + C_1 y$$
$$p = \sqrt{4y^2 + C_1 y}$$
$$p = 2\sqrt{y^2 + C_1 y}$$

(On a redéfini la constante à la dernière ligne.)

On a ensuite

$$p = 2\sqrt{y^2 + C_1 y}$$
$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y^2 + C_1 y}$$
$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 + C_1 y}} = 2dx$$
$$\frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{y + C_1}} = 2dx$$

Si on pose $u = \sqrt{y}$ (ce qui implique que $y = u^2$ et que $dy = 2udu = 2\sqrt{y}du$), on a

$$\frac{2\sqrt{y}du}{\sqrt{y}\sqrt{u^2 + C_1}} = 2dx$$
$$\frac{2du}{\sqrt{u^2 + C_1}} = 2dx$$
$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + C_1}} = dx$$
$$\operatorname{arsinh}\frac{u}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$$

En défaisant notre changement de variable, on arrive à

$$\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$$
$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{C_1}} = \sinh\left(x + C_2\right)$$
$$y = C_1 \sinh^2\left(x + C_2\right)$$

13.1 Notre équation est

$$y'' - y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 - 1 = 0$$
$$\lambda = \pm 1$$

La solution est donc

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

13.2 Notre équation est

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

L'unique solution de cette équation est $\lambda = 3$. La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$$

13.3 Notre équation est

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = 1 + 2i$ et $\lambda = 1 - 2i$. La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

13.4 Notre équation est

$$y'' + 4y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = 2i$ et $\lambda = -2i$. La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

13.5 Notre équation est

$$8y'' + 2y' - y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$8\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = -1/2$ et $\lambda = 1/4$. La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{x/4}$$

13.6 Notre équation est

$$y'' + 6y' + 25y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = -3 + 4i$ et $\lambda = -3 - 4i$. La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$$

13.7 Notre équation est

$$y'' + 4y' + 5 = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = -2 + i$ et $\lambda = -2 - i$. La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Ensuite, on sait que $y = 1$ quand $x = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} 1 &= e^{-0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) \\ 1 &= e^{-0}(C_1 + 0) \\ C_1 &= 1 \end{aligned}$$

On a donc

$$y = e^{-2x}(\cos x + C_2 \sin x)$$

Pour trouver la valeur de l'autre constante, on doit faire la dérivée.

$$y' = -2e^{-2x}(\cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x}(-\sin x + C_2 \cos x)$$

Comme on sait que $y' = 2$ quand $x = 0$, on

$$\begin{aligned} 2 &= -2e^{0}(\cos 0 + C_2 \sin 0) + e^{0}(-\sin 0 + C_2 \cos 0) \\ 2 &= -2(1+0) + (0 + C_2) \\ C_2 &= 4 \end{aligned}$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = e^{-2x}(\cos x + 4\sin x)$$

13.8 Notre équation est

$$y'' - y' = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

Les solutions de cette équation sont λ = 0 et λ = 1. La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = C_1 + C_2 e^x$$

Ensuite, on sait que y = 1 quand x = 0. On a donc

$$1 = C_1 + C_2 e^0$$
$$1 = C_1 + C_2$$

Pour trouver l'autre équation qui permettra de trouver les constantes, on doit faire la dérivée.

$$y' = C_2 e^x$$

Comme on sait que $y' = -1$ quand x = 0, on

$$-1 = C_2 e^0$$
$$C_2 = -1$$

De là, on trouve que $C_2 = 2$. La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = 2 - e^x$$

14.1 Notre équation est

$$y'' + y = -x - x^2$$

Commençons par la partie homogène.

$$y'' + y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = i$ et $\lambda = -i$. La solution de la partie homogène est donc

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Pour la partie non homogène, on sait qu'elle est de la forme

$$y_{nh} = Ax^2 + Bx + C$$

On a alors

$$\begin{aligned} y'_{nh} &= 2Ax + B \\ y''_{nh} &= 2A \end{aligned}$$

Si on remplace dans l'équation, on a

$$\begin{aligned} y'' + y &= -x - x^2 \\ 2A + Ax^2 + Bx + C &= -x - x^2 \\ Ax^2 + Bx + (2A + C) &= -x - x^2 \end{aligned}$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= -1 \\ 2A + C &= 0 \end{aligned}$$

La dernière équation nous amène à $C = 2$. La partie non homogène de la solution est donc

$$y_{nh} = -x^2 - x + 2$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x^2 - x + 2$$

14.2 Notre équation est

$$y'' - y = e^x$$

Commençons par la partie homogène.

$$y'' - y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$. La solution de la partie homogène est donc

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Pour la partie non homogène, on sait qu'elle est de la forme (on applique la règle de multiplication)

$$y_{nh} = Axe^x$$

On a alors

$$\begin{aligned} y'_{nh} &= Ae^x + Axe^x \\ y''_{nh} &= 2Ae^x + Axe^x \end{aligned}$$

Si on remplace dans l'équation, on a

$$\begin{gathered} y'' - y = e^x \\ \left(2Ae^x + Axe^x\right) - Axe^x = e^x \\ 2Ae^x = e^x \\ A = \tfrac{1}{2} \end{gathered}$$

La partie non homogène de la solution est donc

$$y_{nh} = \frac{1}{2} xe^x$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} xe^x$$

14.3 Notre équation est

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$$

Commençons par la partie homogène.

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$. La solution de la partie homogène est donc

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

Pour la partie non homogène, on sait qu'elle est de la forme

$$y_{nh} = Ae^{2x}$$

On a alors

$$\begin{gathered} y'_{nh} = 2Ae^x \\ y''_{nh} = 4Ae^x \end{gathered}$$

Si on remplace dans l'équation, on a

$$\begin{gathered} y'' - 4y' + 3y = e^{2x} \\ 4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = e^{2x} \\ 4A - 8A + 3A = 1 \\ A = -1 \end{gathered}$$

La partie non homogène de la solution est donc

$$y_{nh} = -e^{2x}$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - e^{2x}$$

14.4 Notre équation est

$$y'' - y' - 2y = 10\cos 2x$$

Commençons par la partie homogène.

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Les solutions de cette équation sont λ = -1 et λ = 2. La solution de la partie homogène est donc

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

Pour la partie non homogène, on sait qu'elle est de la forme

$$y_{nh} = A\cos 2x + B\sin 2x$$

On a alors

$$\begin{aligned} y'_{nh} &= -2A\sin x + 2B\cos x \\ y''_{nh} &= -4A\cos x - 4B\sin x \end{aligned}$$

Si on remplace dans l'équation, on a

$$\begin{gathered} y'' - y' - 2y = 10\cos 2x \\ (-4A\cos x - 4B\sin x) - (-2A\sin x + 2B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x) = 10\cos 2x \\ (-4A - 2B - 2A)\cos x + (-4B + 2A - 2B)\sin x = 10\cos 2x \\ (-6A - 2B)\cos x + (-6B + 2A)\sin x = 10\cos 2x \end{gathered}$$

On a donc les deux équations suivantes

$$\begin{gathered} -6A - 2B = 10 \\ -6B + 2A = 0 \end{gathered}$$

La deuxième équation donne

$$A = 3B$$

En utilisant cette valeur dans la 1re équation, on a

$$\begin{aligned} -6\cdot 3B-2B&=10\\ -20B&=10\\ B&=-\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

De là on trouve que

$$\begin{aligned} A&=3\cdot -\tfrac{1}{2}\\ A&=\tfrac{-3}{2} \end{aligned}$$

La partie non homogène de la solution est donc

$$y_{nh}=-\tfrac{3}{2}\cos 2x-\tfrac{1}{2}\sin 2x$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-\tfrac{3}{2}\cos 2x-\tfrac{1}{2}\sin 2x$$

14.5 Notre équation est

$$y''-2y'+2y=3e^{x}\left(x+3\right)$$

Commençons par la partie homogène.

$$y''-2y'+2y=0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = 1 + i$ et $\lambda = 1 - i$. La solution de la partie homogène est donc

$$y_h=e^{x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$$

Pour la partie non homogène, on sait qu'elle est de la forme

$$y_{nh}=e^{x}\left(Ax+B\right)$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
y'_{nh} &= e^x\left(Ax+B\right)+e^xA = e^x\left(Ax+B+A\right)\\
y''_{nh} &= e^x\left(Ax+B+A\right)+e^xA = e^x\left(Ax+B+2A\right)
\end{aligned}
$$

Si on remplace dans l'équation, on a

$$
\begin{gathered}
y''-2y'+2y = 3e^x\left(x+3\right)\\
e^x\left(Ax+B+2A\right)-2e^x\left(Ax+B+A\right)+2e^x\left(Ax+B\right) = 3e^x\left(x+3\right)\\
e^x\left(\left(A-2A+2A\right)x+\left(B+2A-2B-2A+2B\right)\right) = e^x\left(3x+9\right)\\
e^x\left(Ax+B\right) = e^x\left(3x+9\right)
\end{gathered}
$$

On voit clairement que

$$
\begin{aligned}
A &= 3\\
B &= 9
\end{aligned}
$$

La partie non homogène de la solution est donc

$$y_{nh} = e^x\left(3x+9\right)$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)+e^x\left(3x+9\right)$$

14.6 Notre équation est

$$y''+2y'+5y = 16e^x+\sin 2x$$

Commençons par la partie homogène.

$$y''+2y'+5y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2+2\lambda+5 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = -1 + 2i$ et $\lambda = -1 - 2i$. La solution de la partie homogène est donc

$$y_h = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$$

Pour la partie non homogène, on sait qu'elle est de la forme

$$y_{nh} = Ae^x + B\sin 2x + C\cos 2x$$

On a alors

$$\begin{aligned} y'_{nh} &= Ae^x + 2B\cos 2x - 2C\sin 2x \\ y''_{nh} &= Ae^x - 4B\sin 2x - 4C\cos 2x \end{aligned}$$

Si on remplace dans l'équation, on a

$$\begin{gathered} y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x \\ \left(Ae^x - 4B\sin 2x - 4C\cos 2x\right) + 2\left(Ae^x + 2B\cos 2x - 2C\sin 2x\right) + 5\left(Ae^x + B\sin 2x + C\cos 2x\right) \\ = 16e^x + \sin 2x \\ \left(A + 2A + 5A\right)e^x + \left(-4C + 4B + 5C\right)\cos 2x + \left(-4B - 4C + 5B\right)\sin 2x = 16e^x + \sin 2x \\ 8Ae^x + \left(C + 4B\right)\cos 2x + \left(B - 4C\right)\sin 2x = 16e^x + \sin 2x \end{gathered}$$

On obtient alors

$$\begin{gathered} A = 2 \\ C + 4B = 0 \\ B - 4C = 1 \end{gathered}$$

La deuxième équation nous donne $C = -4B$. En utilisant cette valeur dans la 3e équation, on a

$$\begin{gathered} B - 4\left(-4B\right) = 1 \\ B + 16B = 1 \\ B = \tfrac{1}{17} \end{gathered}$$

De là, on a

$$C = -4B = \tfrac{-4}{17}$$

. La partie non homogène de la solution est donc

$$y_{nh} = 2e^x + \tfrac{1}{17}\sin 2x - \tfrac{4}{17}\cos 2x$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + 2e^x + \tfrac{1}{17}\sin 2x - \tfrac{4}{17}\cos 2x$$

14.7 Notre équation est

$$y'' + 25y = 20\sin 5x$$

Commençons par la partie homogène.

$$y'' + 25y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 + 25 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda = 5i$ et $\lambda = -5i$. La solution de la partie homogène est donc

$$y_h = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$$

Pour la partie non homogène, on sait qu'elle est de la forme (on applique la règle de multiplication.)

$$y_{nh} = x\left(A\sin 5x + B\cos 5x\right)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
y'_{nh} &= \left(A\sin 5x + B\cos 5x\right) + 5x\left(A\cos 5x - B\sin 5x\right)\\
y''_{nh} &= 5\left(A\cos 5x - B\sin 5x\right) + 5\left(A\cos 5x - B\sin 5x\right) + 25x\left(-A\sin 5x - B\cos 5x\right)\\
&= 10\left(A\cos 5x - B\sin 5x\right) - 25x\left(A\sin 5x + B\cos 5x\right)
\end{aligned}$$

Si on remplace dans l'équation, on a

$$\begin{gathered}
y'' + 25y = 20\sin 5x\\
10\left(A\cos 5x - B\sin 5x\right) - 25x\left(A\sin 5x + B\cos 5x\right) + 25x\left(A\sin 5x + B\cos 5x\right) = 20\sin 5x\\
\left(-25A + 25A\right)x\sin 5x + \left(-25B + 25B\right)x\cos 5x - 10B\sin 5x + 10A\cos 5x = 20\sin 5x\\
-10B\sin 5x + 10A\cos 5x = 20\sin 5x
\end{gathered}$$

On obtient alors

$$A = 0$$
$$B = -2$$

La partie non homogène de la solution est donc

$$y_{nh} = -2x\cos 5x$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x - 2x\cos 5x$$

Reste à trouver les valeurs des constantes. On sait que $y = 1$ quand $x = 0$. On a donc

$$1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - 0$$
$$1 = C_1$$

On a alors

$$y = \cos 5x + C_2 \sin 5x - 2x\cos 5x$$

On sait aussi que $y' = 3$ quand $x = 0$. La dérivée est

$$y' = -5\sin 5x + 5C_2 \cos 5x - 2\cos 5x + 10x\sin 5x$$

Avec les valeurs, on arrive à

$$3 = -\sin 0 + 5C_2 \cos 0 - 2\cos 0 + 0$$
$$3 = 5C_2 - 2$$
$$C_2 = 1$$

La solution est donc

$$y = \cos 5x + \sin 5x - 2x\cos 5x$$

14.8 Notre équation est

$$y'' - 2y' + y = 2x^2 - 8x + 4$$

Commençons par la partie homogène.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Cela nous donne l'équation suivante.

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

L'unique solution de cette équation est $\lambda = 1$. La solution de la partie homogène est donc

$$y_h = e^x \left(C_1 x + C_2 \right)$$

Pour la partie non homogène, on sait qu'elle est de la forme

$$y_{nh} = Ax^2 + Bx + C$$

On a alors

$$\begin{aligned} y'_{nh} &= 2Ax + B \\ y''_{nh} &= 2A \end{aligned}$$

Si on remplace dans l'équation, on a

$$\begin{gathered} y'' - 2y' + y = 2x^2 - 8x + 4 \\ 2A - 2\left(2Ax + B\right) + \left(Ax^2 + Bx + C\right) = 2x^2 - 8x + 4 \\ Ax^2 + \left(-4A + B\right)x + \left(2A - 2B + C\right) = 2x^2 - 8x + 4 \end{gathered}$$

On obtient alors

$$\begin{gathered} A = 2 \\ -4A + B = -8 \\ 2A - 2B + C = 4 \end{gathered}$$

De là, on trouve facilement que $A = 2$, $B = 0$ et $C = 0$. La partie non homogène de la solution est donc

$$y_{nh} = 2x^2$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$y = e^x \left(C_1 x + C_2 \right) + 2x^2$$

Reste à trouver les valeurs des constantes. On sait que $y = 2$ quand $x = 0$. On a donc

$$2 = e^0 \left(C_1 \cdot 0 + C_2 \right) + 0$$
$$C_2 = 2$$

On a alors

$$y = e^x \left(C_1 x + 2 \right) + 2x^2$$

On sait aussi que $y' = -1$ quand $x = 0$. La dérivée est

$$y' = e^x \left(C_1 x + 2 \right) + e^x \left(C_1 \right) + 4x$$

Avec les valeurs, on arrive à

$$-1 = e^0 \left(0 + 2 \right) + e^0 \left(C_1 \right) + 0$$
$$-1 = 2 + C_1$$
$$C_1 = -3$$

La solution est donc

$$y = e^x \left(-3x + 2 \right) + 2x^2$$

15.1 On a

$$a = -\frac{v}{20s}$$

Puisque

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad\qquad v = \frac{dx}{dt}$$

L'équation devient

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{20s} \frac{dx}{dt}$$

On doit donc résoudre cette équation. C'est une équation dans laquelle *t* est absent. On pose donc $v = dx/dt$. (On pourrait utiliser aussi *p,* mais puisqu'on a déjà un symbole pour *dx/dt* on peut l'utiliser.) On a alors

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{20s}v$$

On peut alors résoudre

$$\begin{gathered}
\frac{dv}{v} = -\frac{1}{20s}dt \\
\ln|v| = \frac{-t}{20s} + \ln C_1 \\
\ln|v| - \ln C_1 = \frac{-t}{20s} \\
\ln\frac{v}{C_1} = \frac{-t}{20s} \\
v = C_1 e^{-t/20s}
\end{gathered}$$

Comme la vitesse initiale est de 25 m/s. On a

$$\begin{gathered}
25\tfrac{m}{s} = C_1 e^{-0} \\
25\tfrac{m}{s} = C_1
\end{gathered}$$

On a donc

$$v = 25\tfrac{m}{s}e^{-t/20s}$$

Comme $v = dx/dt$, on a alors

$$\begin{gathered}
\frac{dx}{dt} = 25\tfrac{m}{s}e^{-t/20s} \\
dx = 25\tfrac{m}{s}e^{-t/20s}dt \\
x + C_2 = -500m \cdot e^{-t/20s}
\end{gathered}$$

Si on pose que la position initiale est 0, on arrive à

$$\begin{gathered}
0 + C_2 = -500m \cdot e^{0} \\
C_2 = -500m
\end{gathered}$$

La position en fonction du temps est donc

$$x - 500m = -500m \cdot e^{-t/20s}$$
$$x = 500m - 500m \cdot e^{-t/20s}$$
$$x = 500m\left(1 - e^{-t/20s}\right)$$

La position à t = 30 s est

$$x = 500m\left(1 - e^{-30s/20s}\right)$$
$$= 388,43m$$

15.2 La force sur l'objet est

$$F = 5N + 40\tfrac{N}{m}x - 10\tfrac{kg}{s}v$$

Comme $F = ma$, on peut trouver l'accélération

$$5kg \cdot a = 5N + 40\tfrac{N}{m}x - 10\tfrac{kg}{s}v$$
$$a = 1\tfrac{m}{s^2} + 8\tfrac{1}{s^2}x - 2\tfrac{1}{s}v$$

Puisque

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad\qquad v = \frac{dx}{dt}$$

L'équation devient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 1\tfrac{m}{s^2} + 8\tfrac{1}{s^2}x - 2\tfrac{1}{s}\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\tfrac{1}{s}\frac{dx}{dt} - 8\tfrac{1}{s^2}x = 1\tfrac{m}{s^2}$$

C'est une équation à coefficients constants. Commençons avec la partie homogène.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\tfrac{1}{s}\frac{dx}{dt} - 8\tfrac{1}{s^2}x = 0$$

L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 2\tfrac{1}{s}\lambda - 8\tfrac{1}{s^2} = 0$$

Les solutions de cette équation sont

$$\lambda = -4\tfrac{1}{s} \qquad \text{et} \qquad \lambda = 2\tfrac{1}{s}$$

La partie homogène de la solution est donc

$$x = C_1 e^{-4\frac{1}{s}t} + C_2 e^{2\frac{1}{s}t}$$

Pour la partie non homogène, on sait qu'elle est de la forme

$$x_{nh} = A$$

On a alors

$$\frac{dx_{nh}}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2x_{nh}}{dt^2} = 0$$

Si on remplace dans l'équation, on a

$$\frac{d^2x_{nh}}{dt^2} + 2\tfrac{1}{s}\frac{dx_{nh}}{dt} - 8\tfrac{1}{s^2}x = 1\tfrac{m}{s^2}$$
$$0 + 2\tfrac{1}{s}\cdot 0 - 8\tfrac{1}{s^2}A = 1\tfrac{m}{s^2}$$
$$A = -\tfrac{1}{8}m$$

La partie non homogène de la solution est donc

$$x_{nh} = -\tfrac{1}{8}m$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$x = C_1 e^{-4\frac{1}{s}t} + C_2 e^{2\frac{1}{s}t} - \tfrac{1}{8}m$$

Reste à trouver les valeurs des constantes. On sait que $x = 0$ quand $t = 0$. On a donc

$$0 = C_1 e^0 + C_2 e^0 - \tfrac{1}{8}m$$
$$0 = C_1 + C_2 - \tfrac{1}{8}m$$

On sait aussi que $dx/dt = 0$ quand $t = 0$. La dérivée est

$$\frac{dx}{dt} = -4\tfrac{1}{s}C_1 e^{-4\frac{1}{s}t} + 2\tfrac{1}{s}C_2 e^{2\frac{1}{s}t}$$

Avec les valeurs, on arrive à

$$\begin{aligned}
0 &= -4\tfrac{1}{s}C_1 e^0 + 2\tfrac{1}{s}C_2 e^0 \\
0 &= -4\tfrac{1}{s}C_1 + 2\tfrac{1}{s}C_2 \\
2C_1 &= C_2
\end{aligned}$$

En utilisant cette relation, on arrive à

$$\begin{aligned}
0 &= C_1 + C_2 - \tfrac{1}{8}m \\
0 &= C_1 + 2C_1 - \tfrac{1}{8}m \\
3C_1 &= \tfrac{1}{8}m \\
C_1 &= \tfrac{1}{24}m \\
C_2 &= \tfrac{1}{12}m
\end{aligned}$$

La solution est donc

$$\begin{aligned}
x &= C_1 e^{-4\frac{1}{s}t} + C_2 e^{2\frac{1}{s}t} - \tfrac{1}{8}m \\
&= \tfrac{1}{24}m \cdot e^{-4\frac{1}{s}t}\ \tfrac{1}{12}m \cdot e^{2\frac{1}{s}t} - \tfrac{1}{8}m \\
&= \tfrac{1}{24}m\left(e^{-4\frac{1}{s}t} + 2e^{2\frac{1}{s}t} - 3\right)
\end{aligned}$$

À $t = 2$ s, la position est

$$\begin{aligned}
x &= \tfrac{1}{24}m\left(e^{-8} + 2e^{4} - 3\right) \\
&= 4,4249m
\end{aligned}$$

15.3 La force sur l'objet est

$$\begin{aligned}
\sum F &= ma \\
-50\tfrac{N}{m}x - 25\tfrac{kg}{s}v &= 2kg \cdot a
\end{aligned}$$

Puisque

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad\qquad v = \frac{dx}{dt}$$

L'équation devient

$$\begin{aligned}
-50\tfrac{N}{m}x - 25\tfrac{kg}{s}\frac{dx}{dt} &= 2kg \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \\
2kg \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 25\tfrac{kg}{s}\frac{dx}{dt} + 50\tfrac{N}{m}x &= 0 \\
\frac{d^2x}{dt^2} + 12.5\tfrac{1}{s}\frac{dx}{dt} + 25\tfrac{1}{s^2}x &= 0
\end{aligned}$$

C'est une équation à coefficients constants. L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 12.5\tfrac{1}{s}\lambda + 25\tfrac{1}{s^2} = 0$$

Les solutions de cette équation sont

$$\lambda = -10\tfrac{1}{s} \qquad \text{et} \qquad \lambda = -\tfrac{5}{2}\tfrac{1}{s}$$

La solution est donc

$$x = C_1 e^{-10\frac{1}{s}t} + C_2 e^{-\frac{5}{2}\frac{1}{s}t}$$

Reste à trouver les valeurs des constantes. On sait que *x* = 10 cm quand *t* = 0. On a donc

$$\begin{aligned}
10cm &= C_1 e^0 + C_2 e^0 \\
10cm &= C_1 + C_2
\end{aligned}$$

On sait aussi que *dx/dt* = 0 quand *t* = 0. La dérivée est

$$\frac{dx}{dt} = -10\tfrac{1}{s}C_1 e^{-10\frac{1}{s}t} - \tfrac{5}{2}\tfrac{1}{s}C_2 e^{-\frac{5}{2}\frac{1}{s}t}$$

Avec les valeurs, on arrive à

$$\begin{aligned}
0 &= -10\tfrac{1}{s}C_1 e^0 - \tfrac{5}{2}\tfrac{1}{s}C_2 e^0 \\
0 &= -10\tfrac{1}{s}C_1 - \tfrac{5}{2}\tfrac{1}{s}C_2 \\
10C_1 &= -\tfrac{5}{2}C_2 \\
-4C_1 &= C_2
\end{aligned}$$

En utilisant cette relation, on arrive à

$$\begin{aligned} 10cm &= C_1 + C_2 \\ 10cm &= C_1 - 4C_1 \\ C_1 &= -\tfrac{10cm}{3} \\ C_2 &= \tfrac{40cm}{3} \end{aligned}$$

La solution est donc

$$x = -\tfrac{10cm}{3} e^{-10\frac{1}{s}t} + \tfrac{40cm}{3} e^{-\frac{5}{2}\frac{1}{s}t}$$

15.4 La force sur l'objet est

$$\begin{aligned} \sum F &= ma \\ -50\tfrac{N}{m}x - 20\tfrac{kg}{s}v &= 2kg \cdot a \end{aligned}$$

Puisque

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad\qquad v = \frac{dx}{dt}$$

L'équation devient

$$\begin{aligned} -50\tfrac{N}{m}x - 20\tfrac{kg}{s}\frac{dx}{dt} &= 2kg \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \\ 2kg \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 20\tfrac{kg}{s}\frac{dx}{dt} + 50\tfrac{N}{m}x &= 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 10\tfrac{1}{s}\frac{dx}{dt} + 25\tfrac{1}{s^2}x &= 0 \end{aligned}$$

C'est une équation à coefficients constants. L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 10\tfrac{1}{s}\lambda + 25\tfrac{1}{s^2} = 0$$

L'unique solution de cette équation est

$$\lambda = -5\tfrac{1}{s}$$

La solution est donc

$$x = \left(C_1 t + C_2\right) e^{-5\frac{1}{s}t}$$

Reste à trouver les valeurs des constantes. On sait que x = 10 cm quand t = 0. On a donc

$$10cm = \left(C_1 \cdot 0 + C_2\right) e^{-0}$$
$$10cm = C_2$$

On a maintenant

$$x = \left(C_1 t + 10cm\right) e^{-5\frac{1}{s}t}$$

On sait aussi que *dx/dt* = 0 quand t = 0. La dérivée est

$$\frac{dx}{dt} = C_1 e^{-5\frac{1}{s}t} - \left(C_1 t + 10cm\right) 5\tfrac{1}{s} e^{-5\frac{1}{s}t}$$

Avec les valeurs, on arrive à

$$0 = C_1 e^0 - \left(C_1 \cdot 10 + 10cm\right) 5\tfrac{1}{s} e^0$$
$$0 = C_1 - \left(10cm\right) 5\tfrac{1}{s}$$
$$C_1 = 50\tfrac{cm}{s}$$

La solution est donc

$$x = \left(50\tfrac{cm}{s} \cdot t + 10cm\right) e^{-5\frac{1}{s}t}$$

15.5 La force qui fait accélérer la corde est la force de gravitation qui agite sur toute la partie de la corde qui pend. Cette force est mg. La masse qui pend dépend de la longueur de la partie qui pend. Si la corde à une densité λ, alors la masse est λx où x est la longueur de la partie qui pend.

On a donc

$$F = \lambda x g$$

Cette force fait accélérer toute la corde. On a donc

$$\sum F = ma$$
$$\lambda xg = ma$$

Comme la masse de toute la corde est λL (où L est la longueur de la corde), on a

$$\lambda xg = ma$$
$$\lambda xg = \lambda La$$
$$xg = La$$

Puisque

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'équation devient

$$xg = L\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{L}x = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{9,8\frac{N}{kg}}{0,6m}x = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{49}{3}\frac{1}{s^2}x = 0$$

C'est une équation à coefficients constants. L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - \frac{49}{3}\frac{1}{s^2} = 0$$

Les solutions de cette équation sont

$$\lambda = \sqrt{\tfrac{49}{3}}\tfrac{1}{s} \qquad \text{et} \qquad \lambda = -\sqrt{\tfrac{49}{3}}\tfrac{1}{s}$$

La solution est donc

$$x = C_1 e^{\sqrt{\frac{49}{3}}\frac{1}{s}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{49}{3}}\frac{1}{s}t}$$

Reste à trouver les valeurs des constantes. On sait que x = 20 cm quand t = 0. On a donc

$$20cm = C_1 e^0 + C_2 e^0$$
$$20cm = C_1 + C_2$$

On sait aussi que $dx/dt = 0$ quand $t = 0$. La dérivée est

$$x = C_1 \sqrt{\tfrac{49}{3}} \tfrac{1}{s} e^{\sqrt{\frac{49}{3}}\frac{1}{s}t} - C_2 \sqrt{\tfrac{49}{3}} \tfrac{1}{s} e^{-\sqrt{\frac{49}{3}}\frac{1}{s}t}$$

Avec les valeurs, on arrive à

$$0 = C_1 \sqrt{\tfrac{49}{3}} \tfrac{1}{s} e^0 - C_2 \sqrt{\tfrac{49}{3}} \tfrac{1}{s} e^0$$
$$0 = C_1 \sqrt{\tfrac{49}{3}} \tfrac{1}{s} - C_2 \sqrt{\tfrac{49}{3}} \tfrac{1}{s}$$
$$0 = C_1 - C_2$$
$$C_1 = C_2$$

En utilisant cette relation, on arrive à

$$20cm = C_1 + C_2$$
$$20cm = C_1 + C_1$$
$$C_1 = 10cm$$

La solution est donc

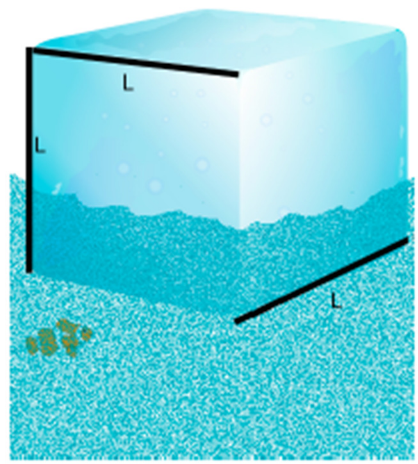
$$\begin{aligned} x &= 10cm \cdot e^{\sqrt{\frac{49}{3}}\frac{1}{s}t} + 10cm \cdot e^{-\sqrt{\frac{49}{3}}\frac{1}{s}t} \\ &= 20cm \cdot \frac{e^{\sqrt{\frac{49}{3}}\frac{1}{s}t} + e^{-\sqrt{\frac{49}{3}}\frac{1}{s}t}}{2} \\ &= 20cm \cdot \cosh\left(\sqrt{\tfrac{49}{3}} \tfrac{1}{s} t\right) \end{aligned}$$

Il n'y aura plus de corde sur la table quand x sera égal à 0,6 m. On a alors

$$60cm = 20cm \cdot \cosh\left(\sqrt{\tfrac{49}{3}} \tfrac{1}{s} t\right)$$
$$3 = \cosh\left(\sqrt{\tfrac{49}{3}} \tfrac{1}{s} t\right)$$
$$\sqrt{\tfrac{49}{3}} \tfrac{1}{s} t = \operatorname{arcosh} 3$$
$$t = \sqrt{\tfrac{3}{49}} s \cdot \operatorname{arcosh} 3$$
$$t = 0,43617 s$$

15.6 On va dire qu'à l'équilibre, l'iceberg est enfoncé d'une distance h dans l'eau. À ce moment, la poussée d'Archimède est égale au poids de l'iceberg. Cela signifie que

$$mg = \rho_{eau} g \left(\text{volume immergé}\right)$$
$$mg = \rho_{eau} g L^2 h$$



Si on déplace un peu l'iceberg vers le haut d'une distance x (en partant de l'équilibre), alors les forces sur l'iceberg sont

$$\sum F = ma$$
$$-mg + P_{archimède} = ma$$
$$-mg + \rho_{eau} g \left(\text{volume immergé}\right) = ma$$
$$-mg + \rho_{eau} g L^2 \left(h - x\right) = ma$$
$$-mg + \rho_{eau} g L^2 h - \rho_{eau} g L^2 x = ma$$

Mais comme on a trouvé précédemment que $mg = \rho_{eau} g L^2 h$, les deux premiers termes s'annulent et on a

$$-\rho_{eau} g L^2 x = ma$$

Comme la masse de l'iceberg est

$$m = \rho_{glace} L^3$$

L'équation devient

$$-\rho_{eau} g L^2 x = \rho_{glace} L^3 a$$
$$-\rho_{eau} g x = \rho_{glace} L a$$

Puisque

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

L'équation devient

$$-\rho_{eau} g x = \rho_{glace} L \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\rho_{eau} g}{\rho_{glace} L} x = 0$$

C'est une équation à coefficients constants. L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + \frac{\rho_{eau} g}{\rho_{glace} L} = 0$$

Les solutions de cette équation sont

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho_{eau} g}{\rho_{glace} L}} i \qquad \text{et} \qquad \lambda = -\sqrt{\frac{\rho_{eau} g}{\rho_{glace} L}} i$$

La solution est donc

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{\rho_{eau} g}{\rho_{glace} L}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{\rho_{eau} g}{\rho_{glace} L}} t$$

Selon l'indice, cela signifie que

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_{eau} g}{\rho_{glace} L}}$$

et que la période est

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\rho_{glace} L}{\rho_{eau} g}} \end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned}T &= 2\pi\sqrt{\frac{\rho_{glace}L}{\rho_{eau}g}}\\ &= 2\pi\sqrt{\frac{920\frac{kg}{m^3}\cdot 75m}{1000\frac{kg}{m^3}\cdot 9{,}8\frac{N}{kg}}}\\ &= 2\pi\sqrt{\frac{920\frac{kg}{m^3}\cdot 75m}{1000\frac{kg}{m^3}\cdot 9{,}8\frac{N}{kg}}}\\ &= 16{,}67s\end{aligned}$$

15.7 On doit résoudre

$$100\frac{d^2x}{dt^2}+0{,}0005x=0{,}4$$

C'est une équation à coefficients constants. Pour la partie homogène, l'équation caractéristique est

$$\begin{aligned}100\lambda^2+0{,}0005&=0\\ \lambda^2+0{,}000005&=0\end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont

$$\lambda=\sqrt{0{,}000005}i \qquad \text{et} \qquad \lambda=-\sqrt{0{,}000005}i$$

La solution est donc

$$x=C_1\cos\sqrt{0{,}000005}t+C_2\sin\sqrt{0{,}000005}t$$

Pour la partie homogène, elle a la forme

$$x_{nh}=A$$

Comme la deuxième dérivée de cette partie est nulle, on obtient (en remplaçant dans l'équation)

$$\begin{aligned}100\frac{d^2x}{dt^2}+0{,}0005x&=0{,}4\\ 0+0{,}0005\cdot A&=0{,}4\\ A&=800\end{aligned}$$

En additionnant les parties homogène et non homogène, on a

$$x = C_1 \cos \sqrt{0,000005}t + C_2 \sin \sqrt{0,000005}t + 800$$

On a notre équation pour le nombre de lapins. Il nous faut maintenant notre équation pour le nombre de renards. Comme on disait que

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - \beta y$$
$$\frac{dx}{dt} = 1 - 0,01 \cdot y$$

On obtient

$$\frac{d\left(C_1 \cos \sqrt{0,000005}t + C_2 \sin \sqrt{0,000005}t + 800\right)}{dt} = 1 - 0,01 \cdot y$$
$$-C_1\sqrt{0,000005} \sin \sqrt{0,000005}t + C_2\sqrt{0,000005} \cos \sqrt{0,000005}t = 1 - 0,01 \cdot y$$
$$0,01 \cdot y = 1 + C_1\sqrt{0,000005} \sin \sqrt{0,000005}t - C_2\sqrt{0,000005} \cos \sqrt{0,000005}t$$
$$y = 100 + C_1\sqrt{0,05} \sin \sqrt{0,000005}t - C_2\sqrt{0,05} \cos \sqrt{0,000005}t$$

Reste à trouver les valeurs des constantes. On sait qu'à $t = 0$, on a $x = 1000$ et $y = 50$. On a donc

$$x = C_1 \cos \sqrt{0,000005}t + C_2 \sin \sqrt{0,000005}t + 800$$
$$1000 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + 800$$
$$1000 = C_1 + 800$$
$$C_1 = 200$$

et

$$y = 100 + C_1\sqrt{0,05} \sin \sqrt{0,000005}t - C_2\sqrt{0,05} \cos \sqrt{0,000005}t$$
$$50 = 100 + C_1\sqrt{0,05} \sin 0 - C_2\sqrt{0,05} \cos 0$$
$$50 = 100 - C_2\sqrt{0,05}$$
$$-50 = -C_2\sqrt{0,05}$$
$$C_2 = \frac{50}{\sqrt{0,05}}$$

Nos équations sont donc

$$x = 200\cos\sqrt{0,000005}t + \tfrac{50}{\sqrt{0,05}}\sin\sqrt{0,000005}t + 800$$
$$y = 100 + 200\sqrt{0,05}\sin\sqrt{0,000005}t - 50\cos\sqrt{0,000005}t$$

À t = 1000 jours, on a

$$\begin{aligned} x &= 200\cos\sqrt{0,000005}\cdot 1000 + \tfrac{50}{\sqrt{0,05}}\sin\sqrt{0,000005}\cdot 1000 + 800 \\ &= 200\cos\sqrt{5} + \tfrac{50}{\sqrt{0,05}}\sin\sqrt{5} + 800 \\ &= 852,47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 100 + 200\sqrt{0,05}\sin\sqrt{0,000005}\cdot 1000 - 50\cos\sqrt{0,000005}\cdot 1000 \\ &= 100 + 200\sqrt{0,05}\sin\sqrt{5} - 50\cos\sqrt{5} \\ &= 166,05 \end{aligned}$$

Il y a donc 852 lapins et 166 renards.