Solutionnaire du chapitre 4

1.1 Au point (0,0), la fonction $z = 2x - 5y + 2$ vaut

$$\begin{aligned} z &= 2\cdot 0 - 5\cdot 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Au point (2.3), la fonction vaut

$$\begin{aligned} z &= 2\cdot 2 - 5\cdot 3 + 2 \\ &= -9 \end{aligned}$$

La variation de la valeur de la fonction est

$$\Delta z = -9 - 2 = -11$$

La distance entre les points est

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

Le taux de variation moyen est

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{-11}{\sqrt{13}} = -3,0509$$

1.2 Au point (-1,1), la fonction $z = 5x^2y^2 + 2xy + 5$ vaut

$$\begin{aligned} z &= 5(-1)^2(1)^2 + 2\cdot(-1)\cdot(1) + 5 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Au point (1.-1), la fonction vaut

$$\begin{aligned} z &= 5(1)^2(-1)^2 + 2\cdot(1)\cdot(-1) + 5 \\ &= 8 \end{aligned}$$

La variation de la valeur de la fonction est

$$\Delta z = 8 - 8 = 0$$

Peu importe la distance entre les points, le taux de variation moyen est

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{0}{\Delta s} = 0$$

1.3 Au point (0,0), la fonction $z = x^2 + y^2$ vaut

$$\begin{aligned} z &= 0^2 + 0^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Au point (-1,-1), la fonction vaut

$$\begin{aligned} z &= (-1)^2 + (-1)^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

La variation de la valeur de la fonction est

$$\Delta z = 2 - 0 = 2$$

La distance entre les points est

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Le taux de variation moyen est

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,4142$$

2.1

$$\begin{aligned} \Delta_x f &= \left(6(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)\,y + y^2\right) - \left(6x^2 + 3xy + y^2\right) \\ &= \left(6x^2 + 12x\Delta x + 6(\Delta x)^2 + 3xy + 3y\Delta x + y^2\right) - \left(6x^2 + 3xy + y^2\right) \\ &= 12x\Delta x + 6(\Delta x)^2 + 3y\Delta x \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \frac{12x\Delta x + 6(\Delta x)^2 + 3y\Delta x}{\Delta x}$$
$$= 12x + 6\Delta x + 3y$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = 12x + 3y$$

$$\begin{aligned}\Delta_y f &= \left(6x^2 + 3x(y+\Delta y) + (y+\Delta y)^2\right) - \left(6x^2 + 3xy + y^2\right)\\ &= \left(6x^2 + 3xy + 3x\Delta y + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2\right) - \left(6x^2 + 3xy + y^2\right)\\ &= 3x\Delta y + 2y\Delta y + (\Delta y)^2\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \frac{3x\Delta y + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y}$$
$$= 3x + 2y + \Delta y$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = 3x + 2y$$

2.2

$$\begin{aligned}\Delta_x f &= \left((x+\Delta x)^3 y^2\right) - \left(x^3 y^2\right)\\ &= \left(\left(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right) y^2\right) - \left(x^3 y^2\right)\\ &= \left(x^3 y^2 + 3x^2 y^2 \Delta x + 3xy^2 (\Delta x)^2 + y^2 (\Delta x)^3\right) - \left(x^3 y^2\right)\\ &= 3x^2 y^2 \Delta x + 3xy^2 (\Delta x)^2 + y^2 (\Delta x)^3\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \frac{3x^2 y^2 \Delta x + 3xy^2 (\Delta x)^2 + y^2 (\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$= 3x^2 y^2 + 3xy^2 \Delta x + y^2 (\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = 3x^2 y^2$$

$$\begin{aligned}\Delta_y f &= \left(x^3\left(y+\Delta y\right)^2\right)-\left(x^3y^2\right)\\&=\left(x^3\left(y^2+2y\Delta y+\left(\Delta y\right)^2\right)\right)-\left(x^3y^2\right)\\&=\left(x^3y^2+2x^3y\Delta y+x^3\left(\Delta y\right)^2\right)-\left(x^3y^2\right)\\&=2x^3y\Delta y+x^3\left(\Delta y\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}&=\frac{2x^3y\Delta y+x^3\left(\Delta y\right)^2}{\Delta y}\\&=2x^3y+x^3\Delta y\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=2x^3y$$

2.3

$$\begin{aligned}\Delta_x f&=\left(\sin\left(x+\Delta x+y\right)\right)-\left(\sin\left(x+y\right)\right)\\&=\left(\sin\left(x+y\right)\cos\Delta x+\cos\left(x+y\right)\sin\Delta x\right)-\left(\sin\left(x+y\right)\right)\\&=\sin\left(x+y\right)\left(\cos\Delta x-1\right)+\cos\left(x+y\right)\sin\Delta x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}&=\frac{=\sin\left(x+y\right)\left(\cos\Delta x-1\right)+\cos\left(x+y\right)\sin\Delta x}{\Delta x}\\&=\sin\left(x+y\right)\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\cos\left(x+y\right)\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=\sin\left(x+y\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\cos\left(x+y\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$$

Avec la règle de l'Hospital pour les deux limites, on a

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}&=\sin\left(x+y\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin\Delta x}{1}+\cos\left(x+y\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x}{1}\\&=\sin\left(x+y\right)\cdot 0+\cos\left(x+y\right)\cdot 1\\&=\cos\left(x+y\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_y f &= \left(\sin\left(x+\Delta y+y\right)\right)-\left(\sin\left(x+y\right)\right)\\ &=\left(\sin\left(x+y\right)\cos\Delta y+\cos\left(x+y\right)\sin\Delta y\right)-\left(\sin\left(x+y\right)\right)\\ &=\sin\left(x+y\right)\left(\cos\Delta y-1\right)+\cos\left(x+y\right)\sin\Delta y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_y f}{\Delta y} &= \frac{=\sin\left(x+y\right)\left(\cos\Delta y-1\right)+\cos\left(x+y\right)\sin\Delta y}{\Delta y}\\ &=\sin\left(x+y\right)\frac{\cos\Delta y-1}{\Delta y}+\cos\left(x+y\right)\frac{\sin\Delta y}{\Delta y}\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=\sin\left(x+y\right)\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\cos\Delta y-1}{\Delta y}+\cos\left(x+y\right)\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sin\Delta y}{\Delta y}$$

Avec la règle de l'Hospital pour les deux limites, on a

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y} &=\sin\left(x+y\right)\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\sin\Delta y}{1}+\cos\left(x+y\right)\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\cos\Delta y}{1}\\ &=\sin\left(x+y\right)\cdot 0+\cos\left(x+y\right)\cdot 1\\ &=\cos\left(x+y\right)\end{aligned}$$

3.1

$$\frac{\partial\left(2x^4y^3-xy^2+3y+7\right)}{\partial x}=8x^3y^3-y^2$$

$$\frac{\partial\left(2x^4y^3-xy^2+3y+7\right)}{\partial y}=6x^4y^2-2xy+3$$

3.2

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\left(x^2+y^2\right)^4\right)}{\partial x} &=4\left(x^2+y^2\right)^3 2x\\ &=8x\left(x^2+y^2\right)^3\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\left(\left(x^2+y^2\right)^4\right)}{\partial y}=4\left(x^2+y^2\right)^3 2y$$
$$=8y\left(x^2+y^2\right)^3$$

3.3

$$\frac{\partial\left(x\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)}{\partial x}=\sin\left(\frac{x}{y}\right)+x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}$$
$$=\sin\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial\left(x\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)}{\partial y}=x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{-x}{y^2}$$
$$=\frac{-x^2}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

3.4

$$\frac{\partial\left(\sqrt{4-xy}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\sqrt{4-xy}\right)}{\partial x}\sin\left(\frac{x}{y}\right)+\sqrt{4-xy}\frac{\partial\left(\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)}{\partial x}$$
$$=\frac{1}{2}(4-xy)^{-1/2}(-y)\sin\left(\frac{x}{y}\right)+\sqrt{4-xy}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$=\frac{-y}{2\sqrt{4-xy}}\sin\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{4-xy}}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial\left(\sqrt{4-xy}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\sqrt{4-xy}\right)}{\partial y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)+\sqrt{4-xy}\frac{\partial\left(\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)}{\partial y}$$
$$=\frac{1}{2}(4-xy)^{-1/2}(-x)\sin\left(\frac{x}{y}\right)+\sqrt{4-xy}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{-x}{y^2}\right)$$
$$=\frac{-x}{2\sqrt{4-xy}}\sin\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x\sqrt{4-xy}}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

3.5

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\arcsin(uv)+\arccos\left(u^2v^2\right)\right)}{\partial u} &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2v^2}}v-\frac{1}{\sqrt{1-u^4v^4}}2uv^2 \\ &= \frac{v}{\sqrt{1-u^2v^2}}-\frac{2uv^2}{\sqrt{1-u^4v^4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\arcsin(uv)+\arccos\left(u^2v^2\right)\right)}{\partial v} &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2v^2}}u-\frac{1}{\sqrt{1-u^4v^4}}2u^2v \\ &= \frac{u}{\sqrt{1-u^2v^2}}-\frac{2u^2v}{\sqrt{1-u^4v^4}}\end{aligned}$$

3.6

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\cosh^2\left(\frac{r}{s}\right)\right)}{\partial r} &= 2\cosh\left(\frac{r}{s}\right)\sinh\left(\frac{r}{s}\right)\cdot\frac{1}{s} \\ &= \frac{2}{s}\cosh\left(\frac{r}{s}\right)\sinh\left(\frac{r}{s}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\cosh^2\left(\frac{r}{s}\right)\right)}{\partial s} &= 2\cosh\left(\frac{r}{s}\right)\sinh\left(\frac{r}{s}\right)\cdot\frac{-r}{s^2} \\ &= \frac{-2r}{s^2}\cosh\left(\frac{r}{s}\right)\sinh\left(\frac{r}{s}\right)\end{aligned}$$

3.7

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(e^{xy}\ln(xy)\right)}{\partial x} &= \frac{\partial\left(e^{xy}\right)}{\partial x}\ln(xy)+e^{xy}\frac{\partial\left(\ln(xy)\right)}{\partial x} \\ &= e^{xy}\cdot y\ln(xy)+e^{xy}\frac{y}{xy} \\ &= ye^{xy}\ln(xy)+\frac{1}{x}e^{xy}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(e^{xy}\ln\left(xy\right)\right)}{\partial y} &= \frac{\partial\left(e^{xy}\right)}{\partial y}\ln\left(xy\right)+e^{xy}\,\frac{\partial\left(\ln\left(xy\right)\right)}{\partial y}\\ &= e^{xy}\cdot x\ln\left(xy\right)+e^{xy}\,\frac{x}{xy}\\ &= xe^{xy}\ln\left(xy\right)+\frac{1}{y}e^{xy}\end{aligned}$$

3.8

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\sqrt{9-x^2-y^2}\right)}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left(9-x^2-y^2\right)^{-1/2}\left(-2x\right)\\ &= \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\sqrt{9-x^2-y^2}\right)}{\partial y} &= \frac{1}{2}\left(9-x^2-y^2\right)^{-1/2}\left(-2y\right)\\ &= \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\end{aligned}$$

3.9

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\ln\left(rst\right)\right)}{\partial r} &= \frac{st}{rst}\\ &= \frac{1}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\ln\left(rst\right)\right)}{\partial s} &= \frac{rt}{rst}\\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\ln\left(rst\right)\right)}{\partial t} &= \frac{rs}{rst}\\ &= \frac{1}{t}\end{aligned}$$

3.10

$$\frac{\partial\left(\operatorname{artanh}\left(3u+2v\right)\right)}{\partial u}=\frac{1}{1-\left(3u+2v\right)^2}\left(3\right)$$
$$=\frac{3}{1-\left(3u+2v\right)^2}$$

$$\frac{\partial\left(\operatorname{artanh}\left(3u+2v\right)\right)}{\partial v}=\frac{1}{1-\left(3u+2v\right)^2}\left(2\right)$$
$$=\frac{2}{1-\left(3u+2v\right)^2}$$

3.11 On a

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\left(\cos x\cosh y+\sin x\sinh y\right)}{\partial x}=-\sin x\cosh y+\cos x\sinh y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial\left(\cos x\cosh y-\sin x\sinh y\right)}{\partial y}=\cos x\sinh y-\sin x\cosh y$$

On voit donc que

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

3.12 a)

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial\left(T_0+Ae^{-\lambda x}\sin\left(\frac{2\pi}{24h}t-\lambda x+\pi\right)\right)}{\partial t}$$
$$=Ae^{-\lambda x}\,\frac{\partial\left(\sin\left(\frac{2\pi}{24h}t-\lambda x+\pi\right)\right)}{\partial t}$$
$$=Ae^{-\lambda x}\cos\left(\frac{2\pi}{24h}t-\lambda x+\pi\right)\cdot\frac{2\pi}{24h}$$

À 9 h le matin à une profondeur de 2 m, la valeur de cette dérivée est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= Ae^{-\lambda x}\cos\left(\tfrac{2\pi}{24h}t-\lambda x+\pi\right)\cdot\tfrac{2\pi}{24h} \\
&= 10°C\cdot e^{-0,4m^{-1}\cdot 2m}\cos\left(\tfrac{2\pi}{24h}\cdot 9h-0,4m^{-1}\cdot 2m+\pi\right)\cdot\tfrac{2\pi}{24h} \\
&= 10°C\cdot e^{-0,8}\cdot\tfrac{2\pi}{24h}\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}-0,8+\pi\right) \\
&= 1,1763\cdot -0,0146 \\
&= -0,01718\tfrac{°C}{h}
\end{aligned}$$

Cela signifie qu'à une profondeur de 2 m et à 9 h de matin, le sol à cette position se refroidit au rythme de 0,01718 °C/h.

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial\left(T_0+Ae^{-\lambda x}\sin\left(\tfrac{2\pi}{24h}t-\lambda x+\pi\right)\right)}{\partial x} \\
&= A\frac{\partial e^{-\lambda x}}{\partial x}\sin\left(\tfrac{2\pi}{24h}t-\lambda x+\pi\right)+Ae^{-\lambda x}\frac{\partial\left(\sin\left(\tfrac{2\pi}{24h}t-\lambda x+\pi\right)\right)}{\partial x} \\
&= Ae^{-\lambda x}\cdot(-\lambda)\cdot\sin\left(\tfrac{2\pi}{24h}t-\lambda x+\pi\right)+Ae^{-\lambda x}\cos\left(\tfrac{2\pi}{24h}t-\lambda x+\pi\right)\cdot(-\lambda)
\end{aligned}$$

À 9 h le matin à une profondeur de 2 m, la valeur de cette dérivée est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= 10°C\cdot e^{-0,4m^{-1}\cdot 2m}\cdot\left(-0,4m^{-1}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{2\pi}{24h}\cdot 9h-0,4m^{-1}\cdot 2m+\pi\right) \\
&\qquad +10°C\cdot e^{-0,4m^{-1}\cdot 2m}\cos\left(\tfrac{2\pi}{24h}\cdot 9h-0,4m^{-1}\cdot 2m+\pi\right)\cdot\left(-0,4m^{-1}\right) \\
&= -4\tfrac{°C}{m}e^{-0,8}\cdot\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}-0,8+\pi\right)-4\tfrac{°C}{m}\cdot e^{-0,8}\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}-0,8+\pi\right) \\
&= -4\tfrac{°C}{m}e^{-0,8}\cdot\left(\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}-0,8+\pi\right)+\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}-0,8+\pi\right)\right) \\
&= -4\tfrac{°C}{m}e^{-0,8}\cdot(-1,0145) \\
&= 1,8233\tfrac{°C}{m}
\end{aligned}$$

Cela signifie qu'à une profondeur de 2 m et à 9 h de matin, la température augmente au rythme de 1,8233 °C/m quand on s'enfonce dans le sol.

4.1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial\left(xy^4-x^2y^2+3y^2+7\right)}{\partial x} \\
&= y^4-2xy^2
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\left(xy^4 - x^2y^2 + 3y^2 + 7\right)}{\partial x}$$
$$= 4xy^3 - 2x^2y + 6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(y^4 - 2xy^2\right)}{\partial x}$$
$$= -2y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(4xy^3 - 2x^2y + 6y\right)}{\partial x}$$
$$= 12xy^2 - 2x^2 + 6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(y^4 - 2xy^2\right)}{\partial y}$$
$$= 4y^3 - 4xy$$

4.2

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{x^2}{x+y}\right)}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial x^2}{\partial x}\left(x+y\right)^{-1} + x^2\frac{\partial\left(x+y\right)^{-1}}{\partial x}$$
$$= \frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{\left(x+y\right)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{x^2}{x+y}\right)}{\partial y}$$
$$= x^2 \frac{\partial (x+y)^{-1}}{\partial y}$$
$$= -x^2 (x+y)^{-2}$$
$$= \frac{-x^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{(x+y)^2}\right)}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial (2x)}{\partial x}(x+y)^{-1} + 2x\frac{\partial (x+y)^{-1}}{\partial x} - \frac{\partial (x^2)}{\partial x}(x+y)^{-2} - x^2 \frac{\partial (x+y)^{-2}}{\partial x}$$
$$= 2(x+y)^{-1} - 2x(x+y)^{-2} - 2x(x+y)^{-2} + 2x^2 (x+y)^{-3}$$
$$= \frac{2}{x+y} - \frac{4x}{(x+y)^2} + \frac{2x^2}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{-x^2}{(x+y)^2}\right)}{\partial y}$$
$$= -x^2 \frac{\partial (x+y)^{-2}}{\partial y}$$
$$= 2x^2 (x+y)^{-3}$$
$$= \frac{2x^2}{(x+y)^3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial\left(\frac{2x}{x+y}-\frac{x^2}{(x+y)^2}\right)}{\partial y} \\
&= 2x\frac{\partial(x+y)^{-1}}{\partial y}-x^2\frac{\partial(x+y)^{-2}}{\partial y} \\
&= -2x(x+y)^{-2}+2x^2(x+y)^{-3} \\
&= -\frac{2x}{(x+y)^2}+\frac{2x^2}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

4.3

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial\left(\frac{\cos x}{y^2}\right)}{\partial x} \\
&= \frac{1}{y^2}\frac{\partial \cos x}{\partial x} \\
&= \frac{-\sin x}{y^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial\left(\frac{\cos x}{y^2}\right)}{\partial y} \\
&= \cos x\frac{\partial y^{-2}}{\partial y} \\
&= -2\cos x\cdot y^{-3} \\
&= \frac{-2\cos x}{y^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial\left(\frac{-\sin x}{y^2}\right)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{y^2}\frac{\partial(-\sin x)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{y^2}\cdot -\cos x \\ &= \frac{-\cos x}{y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial\left(\frac{-2\cos x}{y^3}\right)}{\partial y} \\ &= -2\cos x\frac{\partial y^{-3}}{\partial y} \\ &= 6\cos x \cdot y^{-4} \\ &= \frac{6\cos x}{y^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial\left(\frac{-\sin x}{y^2}\right)}{\partial y} \\ &= -\sin x\frac{\partial y^{-2}}{\partial y} \\ &= 2\sin x \cdot y^{-3} \\ &= \frac{2\sin x}{y^3}\end{aligned}$$

4.4

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial\left(x\sinh\left(xy\right)\right)}{\partial x}\\ &= \frac{\partial x}{\partial x}\sinh\left(xy\right) + x\frac{\partial \sinh\left(xy\right)}{\partial x}\\ &= \sinh\left(xy\right) + x\cosh\left(xy\right)\cdot y\\ &= \sinh\left(xy\right) + xy\cosh\left(xy\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial\left(x\sinh\left(xy\right)\right)}{\partial x}\\ &= x\frac{\partial \sinh\left(xy\right)}{\partial y}\\ &= x\cdot\cosh\left(xy\right)\cdot x\\ &= x^2\cdot\cosh\left(xy\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial\left(\sinh\left(xy\right) + xy\cosh\left(xy\right)\right)}{\partial x}\\ &= \frac{\partial\left(\sinh\left(xy\right)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(xy\right)}{\partial x}\cosh\left(xy\right) + xy\frac{\partial\left(\cosh\left(xy\right)\right)}{\partial x}\\ &= \cosh\left(xy\right)\cdot y + y\cosh\left(xy\right) + xy\sinh\left(xy\right)\cdot y\\ &= 2y\cosh\left(xy\right) + xy^2\sinh\left(xy\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial\left(x^2\cdot\cosh\left(xy\right)\right)}{\partial y}\\ &= x^2\frac{\partial \cosh\left(xy\right)}{\partial y}\\ &= x^2\sinh\left(xy\right)\cdot x\\ &= x^3\sinh\left(xy\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial\left(x^2 \cdot \cosh(xy)\right)}{\partial x}\\ &= \frac{\partial x^2}{\partial x}\cosh(xy) + x^2\frac{\partial \cosh(xy)}{\partial x}\\ &= 2x\cosh(xy) + x^2\sinh(xy)\cdot y\\ &= 2x\cosh(xy) + x^2 y\sinh(xy)\end{aligned}$$

4.5

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial\left(xy + e^{xy} + \ln xy\right)}{\partial x}\\ &= y + e^{xy}\cdot y + \frac{y}{xy}\\ &= y + ye^{xy} + \frac{1}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial\left(y + ye^{xy} + \frac{1}{x}\right)}{\partial y}\\ &= 1 + e^{xy} + ye^{xy}\cdot x\\ &= 1 + e^{xy} + xye^{xy}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} &= \frac{\partial\left(1 + e^{xy} + xye^{xy}\right)}{\partial x}\\ &= 0 + e^{xy}\cdot y + ye^{xy} + xye^{xy}\cdot y\\ &= 2ye^{xy} + xy^2e^{xy}\\ &= ye^{xy}(2 + xy)\end{aligned}$$

4.6

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial\left(2A\sin(kx)\cos(\omega t)\right)}{\partial x}\\ &= 2Ak\cos(kx)\cos(\omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial\left(2Ak\cos\left(kx\right)\cos\left(\omega t\right)\right)}{\partial x}\\ &= -2Ak^2\sin\left(kx\right)\cos\left(\omega t\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial\left(2A\sin\left(kx\right)\cos\left(\omega t\right)\right)}{\partial t}\\ &= -2A\omega\sin\left(kx\right)\sin\left(\omega t\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial\left(-2A\omega\sin\left(kx\right)\sin\left(\omega t\right)\right)}{\partial t}\\ &= -2A\omega^2\sin\left(kx\right)\cos\left(\omega t\right)\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\left(\frac{k}{\omega}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{k^2}{\omega^2}\left(-2A\omega^2\sin\left(kx\right)\cos\left(\omega t\right)\right)\\ &= -2Ak^2\sin\left(kx\right)\cos\left(\omega t\right)\\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\end{aligned}$$

4.7

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial\left(\left(\sin ax\right)\left(\cos by\right)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\right)}{\partial x}\\ &= a\left(\cos ax\right)\left(\cos by\right)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial\left(a\left(\cos ax\right)\left(\cos by\right)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\right)}{\partial x}\\ &= -a^2\left(\sin ax\right)\left(\cos by\right)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial\left((\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\right)}{\partial y}\\ &= -b(\sin ax)(\sin by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial\left(-b(\sin ax)(\sin by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\right)}{\partial y}\\ &= -b^2(\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial\left((\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\right)}{\partial z}\\ &= -\sqrt{a^2+b^2}(\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \frac{\partial\left(-\sqrt{a^2+b^2}(\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\right)}{\partial z}\\ &= \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2(\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\\ &= \left(a^2+b^2\right)(\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\end{aligned}$$

Si on additionne les 3 dérivées d’ordre 2, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= -a^2(\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\\ &\quad -b^2(\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}+\left(a^2+b^2\right)(\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\\ &= \left(-a^2-b^2+a^2+b^2\right)(\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}\\ &= 0\end{aligned}$$

5.1

$$
\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\
&= \frac{\partial\left(8x^2y^3 - 4xy^3 + 3xy^2 + 10\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(8x^2y^3 - 4xy^3 + 3xy^2 + 10\right)}{\partial y}dy \\
&= \left(16xy^3 - 4y^3 + 3y^2\right)dx + \left(24x^2y^2 - 12xy^2 + 6xy\right)dy
\end{aligned}
$$

5.2

$$
\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\
&= \frac{\partial\left(\dfrac{x}{x+y}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(\dfrac{x}{x+y}\right)}{\partial y}dy \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial x}(x+y)^{-1} + x\frac{\partial (x+y)^{-1}}{\partial x}\right)dx + x\frac{\partial (x+y)^{-1}}{\partial y}dy \\
&= \left((x+y)^{-1} - x(x+y)^{-2}\right)dx - x(x+y)^{-2}\,dy \\
&= \left(\frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2}\right)dx - \frac{x}{(x+y)^2}dy \\
&= \left(\frac{x+y}{(x+y)^2} - \frac{x}{(x+y)^2}\right)dx - \frac{x}{(x+y)^2}dy \\
&= \frac{x+y-x}{(x+y)^2}dx - \frac{x}{(x+y)^2}dy \\
&= \frac{y}{(x+y)^2}dx - \frac{x}{(x+y)^2}dy
\end{aligned}
$$

5.3

$$\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\
&= \frac{\partial\left(\frac{\cos xy}{xy^2}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(\frac{\cos xy}{xy^2}\right)}{\partial y}dy \\
&= \left(\frac{\partial \cos xy}{\partial x}x^{-1}y^{-2} + \cos xy\frac{\partial x^{-1}y^{-2}}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial \cos xy}{\partial y}x^{-1}y^{-2} + \cos xy\frac{\partial x^{-1}y^{-2}}{\partial y}\right)dy \\
&= \left(-\sin(xy)\cdot y\cdot x^{-1}y^{-2} - \cos(xy)\cdot x^{-2}y^{-2}\right)dx + \left(-\sin(xy)\cdot x\cdot x^{-1}y^{-2} + \cos(xy)\cdot x^{-1}(-2)y^{-3}\right)dy \\
&= \left(-\frac{\sin(xy)}{xy} - \frac{\cos(xy)}{x^2y^2}\right)dx + \left(-\frac{\sin(xy)}{y^2} - \frac{2\cos(xy)}{xy^3}\right)dy
\end{aligned}$$

5.4

$$\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\
&= \frac{\partial\left(\sqrt{\tanh(x^2y^2)}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(\sqrt{\tanh(x^2y^2)}\right)}{\partial y}dy \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\tanh(x^2y^2)\right)^{-1/2}\cdot \operatorname{sech}^2(x^2y^2)2xy^2\right)dx + \left(\frac{1}{2}\left(\tanh(x^2y^2)\right)^{-1/2}\cdot \operatorname{sech}^2(x^2y^2)2x^2y\right)dy \\
&= \left(\frac{\operatorname{sech}^2(x^2y^2)}{\sqrt{\tanh(x^2y^2)}}xy^2\right)dx + \left(\frac{\operatorname{sech}^2(x^2y^2)}{\sqrt{\tanh(x^2y^2)}}x^2y\right)dy \\
&= \frac{xy\operatorname{sech}^2(x^2y^2)}{\sqrt{\tanh(x^2y^2)}}(ydx + xdy)
\end{aligned}$$

6.1 L’approximation est

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \\
&= \frac{\partial\left(x^2y^3 - 4x^2y^2 + 3xy + 7x\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\left(x^2y^3 - 4x^2y^2 + 3xy + 7x\right)}{\partial y}\Delta y \\
&= \left(2xy^3 - 8xy^2 + 3y + 7\right)\Delta x + \left(3x^2y^2 - 8x^2y + 3x\right)\Delta y
\end{aligned}$$

Avec les valeurs des points, on a

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left(2\cdot 2\cdot (3)^3 - 8\cdot 2\cdot (3)^2 + 3\cdot 3 + 7\right)0,002 + \left(3\cdot (2)^2\cdot (3)^2 - 8\cdot (2)^2\cdot 3 + 3\cdot 2\right)(-0,003)\\ &= (108-144+9+7)0,002 + (108-96+6)(-0,003)\\ &= (-20)0,002 + (18)(-0,003)\\ &= -0,094\end{aligned}$$

6.2 L'approximation est

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\\ &= \frac{\partial\left(\sinh\sqrt{2x+3y}\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\left(\sinh\sqrt{2x+3y}\right)}{\partial y}\Delta y\\ &= \left(\cosh\sqrt{2x+3y}\cdot\frac{1}{2}(2x+3y)^{-1/2}(2)\right)\Delta x + \left(\cosh\sqrt{2x+3y}\cdot\frac{1}{2}(2x+3y)^{-1/2}(3)\right)\Delta y\\ &= \frac{\cosh\sqrt{2x+3y}}{2\sqrt{2x+3y}}(2\Delta x + 3\Delta y)\end{aligned}$$

Avec les valeurs des points, on a

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\cosh\sqrt{2\cdot 3+3\cdot 1}}{2\sqrt{2\cdot 3+3\cdot 1}}(2\cdot 0,01 + 3\cdot 0,02)\\ &= \frac{\cosh\sqrt{9}}{2\sqrt{9}}(0,02+0,06)\\ &= \frac{\cosh 3}{6}(0,08)\\ &= 0,1342\end{aligned}$$

6.3 L'approximation est

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\\ &= \frac{\partial(xy+xz+yz)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial(xy+xz+yz)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial(xy+xz+yz)}{\partial z}\Delta z\\ &= (y+z)\Delta x + (x+z)\Delta y + (x+y)\Delta z\end{aligned}$$

Avec les valeurs des points, on a

$$\begin{aligned}\Delta f &= (1+1)\cdot(-0,01)+(1+1)\cdot 0,03+(1+1)\cdot(-0,03)\\ &= -0.02+0,06-0,06\\ &= -0,02\end{aligned}$$

6.4 La vitesse de l'onde dans la première corde est

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}\\ &= \sqrt{\frac{500N}{0,04\frac{kg}{m}}}\\ &= 111,80\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

La différence de vitesse peut être approximée avec

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{\partial v}{\partial F_T}\Delta F_T + \frac{\partial v}{\partial \mu}\Delta\mu\\ &= \frac{\partial\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}}{\partial F_T}\Delta F_T + \frac{\partial\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}}{\partial \mu}\Delta\mu\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{F_T}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\mu}\Delta F_T + \frac{1}{2}\left(\frac{F_T}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{-F_T}{\mu^2}\right)\Delta\mu\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{F_T}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\mu}\Delta F_T + \left(\frac{-F_T}{\mu^2}\right)\Delta\mu\right)\end{aligned}$$

Avec les valeurs, on a

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{1}{2}\left(\frac{500N}{0,04\frac{kg}{m}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{0,04\frac{kg}{m}}(-2N) + \left(\frac{-500N}{\left(0,04\frac{kg}{m}\right)^2}\right)\left(0,001\tfrac{kg}{m}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(12500\tfrac{m^2}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-50\tfrac{m^2}{s^2}-312,5\tfrac{m^2}{s^2}\right)\\ &= -1,62\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

La vitesse de l'onde dans la deuxième corde est donc

$$\begin{aligned} v &= 111{,}80\tfrac{m}{s} - 1{,}62\tfrac{m}{s} \\ &= 110{,}18\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

(La vraie vitesse est 110,21 m/s).

6.5 La variation de pression peut être approximée avec

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{\partial P}{\partial n}\Delta n + \frac{\partial P}{\partial T}\Delta T + \frac{\partial P}{\partial V}\Delta V \\ &= \frac{RT}{V}\Delta n + \frac{nT}{V}\Delta T - \frac{nRT}{V^2}\Delta V \end{aligned}$$

Avec les valeurs, on a

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{8{,}31\frac{J}{mol\cdot K}\cdot 300K}{2{,}5m^3}\left(0{,}01mol\right) + \frac{5mol\cdot 8{,}31\frac{J}{mol\cdot K}}{2{,}5m^3}\left(-1°C\right) - \frac{5mol\cdot 8{,}31\frac{J}{mol\cdot K}\cdot 300K}{\left(2{,}5m^3\right)^2}0{,}03m^3 \\ &= 9{,}972Pa - 16{,}620Pa - 59{,}832Pa \\ &= -66{,}480Pa \end{aligned}$$

7.1 a) La grandeur de l'hypoténuse est

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{\left(6{,}78cm\right)^2 + \left(11{,}96cm\right)^2} \\ &= 13{,}7481cm \end{aligned}$$

L'incertitude sur l'hypoténuse est

$$\begin{aligned} \Delta L &= \left|\frac{\partial L}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial L}{\partial y}\right|\Delta y \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2} 2x\Delta x + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2} 2y\Delta y \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\Delta x + y\Delta y\right) \end{aligned}$$

Avec les valeurs, on a

$$\Delta L = \frac{1}{\sqrt{(6,78cm)^2 + (11,96cm)^2}}(6,78cm \cdot 0,05cm + 11,96cm \cdot 0,10cm)$$
$$= 0,112cm$$

La longueur de l'hypoténuse est donc

$$L = (13,75 \pm 0,11) \text{ cm}$$

b) L'angle est

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$
$$= \arctan\frac{11,96cm}{6,78cm}$$
$$= 60,4515°$$

L'incertitude sur l'angle est

$$\Delta\theta = \left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|\Delta y$$
$$= \left|\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{-y}{x^2}\right|\Delta x + \left|\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}\right|\Delta y$$
$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x^2}\Delta x + \frac{1}{x}\Delta y\right)$$

Avec les valeurs, on a

$$\Delta\theta = \frac{1}{1+\left(\frac{11,96}{6,78}\right)^2}\left(\frac{11,96cm}{(6,78cm)^2}\cdot 0,05cm + \frac{1}{6,78cm}\cdot 0,1cm\right)$$
$$= 0,006751 rad$$
$$= 0,3868°$$

L'angle est donc

$$\theta = (60,45 \pm 0,39)°$$

b) L'aire est

$$\begin{aligned} A &= \frac{xy}{2} \\ &= \frac{6,78cm \cdot 11,96cm}{2} \\ &= 40,5444cm^2 \end{aligned}$$

L'incertitude sur l'angle est

$$\begin{aligned} \Delta A &= \left|\frac{\partial A}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial A}{\partial y}\right| \Delta y \\ &= \left|\frac{y}{2}\right| \Delta x + \left|\frac{x}{2}\right| \Delta y \end{aligned}$$

Avec les valeurs, on a

$$\begin{aligned} \Delta A &= \left|\frac{11,96cm}{2}\right| \cdot 0,05cm + \left|\frac{6,78cm}{2}\right| \cdot 0,1cm \\ &= 0,638cm^2 \end{aligned}$$

L'aire est donc

$$A = (40,54 \pm 0,64) \text{ cm}^2$$

7.2 La résistance est

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{1}{100\Omega} + \frac{1}{200\Omega} + \frac{1}{300\Omega} \\ \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{11}{600\Omega} \\ R_{eq} &= \frac{600\Omega}{11} \\ R_{eq} &= 54,54546\Omega \end{aligned}$$

Pour trouver l'incertitude, il nous faut l'équation de R_{eq}.

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$
$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{R_2R_3}{R_1R_2R_3}+\frac{R_1R_3}{R_1R_2R_3}+\frac{R_1R_2}{R_1R_2R_3}$$
$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}{R_1R_2R_3}$$
$$R_{eq}=\frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}$$

L'incertitude sur la résistance est donc

$$\begin{aligned}
\Delta R_{eq} &= \left|\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_1}\right|\Delta R_1+\left|\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_2}\right|\Delta R_2+\left|\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_3}\right|\Delta R_3\\
&= \left|\frac{\partial R_1R_2R_3}{\partial R_1}\cdot\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-1}+R_1R_2R_3\cdot\frac{\partial\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-1}}{\partial R_1}\right|\Delta R_1\\
&\quad+\left|\frac{\partial R_1R_2R_3}{\partial R_2}\cdot\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-1}-R_1R_2R_3\cdot\frac{\partial\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-1}}{\partial R_2}\right|\Delta R_2\\
&\quad+\left|\frac{\partial R_1R_2R_3}{\partial R_3}\cdot\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-1}-R_1R_2R_3\cdot\frac{\partial\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-1}}{\partial R_3}\right|\Delta R_3\\
&= \left|R_2R_3\cdot\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-1}-R_1R_2R_3\cdot\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-2}\left(R_3+R_2\right)\right|\Delta R_1\\
&\quad+\left|R_1R_3\cdot\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-1}-R_1R_2R_3\cdot\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-2}\left(R_3+R_1\right)\right|\Delta R_2\\
&\quad+\left|R_1R_2\cdot\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-1}-R_1R_2R_3\cdot\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^{-2}\left(R_2+R_1\right)\right|\Delta R_3\\
&= \left|\frac{R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}-\frac{R_1R_2R_3\cdot\left(R_3+R_2\right)}{\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^2}\right|\Delta R_1\\
&\quad+\left|\frac{R_1R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}-\frac{R_1R_2R_3\cdot\left(R_3+R_1\right)}{\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^2}\right|\Delta R_2\\
&\quad+\left|\frac{R_1R_2}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}-\frac{R_1R_2R_3\cdot\left(R_2+R_1\right)}{\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2\right)^2}\right|\Delta R_3
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la valeur. On va commencer par calculer

$$\begin{aligned}
R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2 &= 200\Omega\cdot300\Omega+100\Omega\cdot300\Omega+100\Omega\cdot200\Omega\\
&=110000\Omega^2
\end{aligned}$$

Ainsi, l'incertitude est

$$\begin{aligned}\Delta R_{eq} &= \left|\frac{200\Omega\cdot 300\Omega}{110000\Omega^2}-\frac{100\Omega\cdot 200\Omega\cdot 300\Omega\cdot(200\Omega+300\Omega)}{(110000\Omega^2)^2}\right|\cdot 1\Omega \\ &\quad +\left|\frac{100\Omega\cdot 300\Omega}{110000\Omega^2}-\frac{100\Omega\cdot 200\Omega\cdot 300\Omega\cdot(300\Omega+100\Omega)}{(110000\Omega^2)^2}\right|\cdot 2\Omega \\ &\quad +\left|\frac{100\Omega\cdot 200\Omega}{110000\Omega^2}-\frac{100\Omega\cdot 200\Omega\cdot 300\Omega\cdot(200\Omega+100\Omega)}{(110000\Omega^2)^2}\right|\cdot 3\Omega \\ &= \left|\frac{6}{11}-\frac{30}{121}\right|\cdot 1\Omega+\left|\frac{3}{11}-\frac{24}{121}\right|\cdot 2\Omega+\left|\frac{2}{11}-\frac{18}{121}\right|\cdot 3\Omega \\ &= \frac{36}{121}\Omega+\frac{18}{121}\Omega+\frac{12}{121}\Omega \\ &= \frac{6}{11}\Omega \\ &= 0,54545\Omega\end{aligned}$$

La valeur de la résistance est donc

$$R = (54,55 \pm 0,55)\ \Omega$$

8.1

$$\begin{aligned}\frac{dz}{ds} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta \\ &= \frac{\partial(5x\sinh y)}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial(5x\sinh y)}{\partial y}\sin\theta \\ &= (5\sinh y)\cos\theta+(5x\cosh y)\sin\theta\end{aligned}$$

Au point (1,1) dans la direction $\theta = 45°$, on a

$$\begin{aligned}\frac{dz}{ds} &= (5\sinh 1)\cos 45°+(5\cdot 1\cosh 1)\sin 45° \\ &= 9,611\end{aligned}$$

8.2

$$\begin{aligned}
\frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\
&= \frac{\partial\sqrt{9-x^2-y^2}}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\sqrt{9-x^2-y^2}}{\partial y}\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(9-x^2-y^2\right)^{-1/2}(-2x)\cos\theta + \frac{1}{2}\left(9-x^2-y^2\right)^{-1/2}(-2y)\sin\theta \\
&= \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\cos\theta + \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\sin\theta
\end{aligned}$$

Au point (2,1) dans la direction $\theta = 135°$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{df}{ds} &= \frac{-2}{\sqrt{9-2^2-1^2}}\cos 135° + \frac{-1}{\sqrt{9-2^2-1^2}}\sin 135° \\
&= -\frac{-2}{2}\cos 135° + \frac{-1}{2}\sin 135° \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,3536
\end{aligned}$$

8.3

$$\begin{aligned}
\frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\
&= \frac{\partial\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)}{\partial y}\sin\theta \\
&= \left(\frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial x}(x+y)^{-1} + \left(x^2+y^2\right)\frac{\partial(x+y)^{-1}}{\partial x}\right)\cos\theta \\
&\qquad + \left(\frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial y}(x+y)^{-1} + \left(x^2+y^2\right)\frac{\partial(x+y)^{-1}}{\partial y}\right)\sin\theta \\
&= \left(2x(x+y)^{-1} - \left(x^2+y^2\right)(x+y)^{-2}\right)\cos\theta + \left(2y(x+y)^{-1} - \left(x^2+y^2\right)(x+y)^{-1}\right)\sin\theta \\
&= \left(\frac{2x}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\right)\cos\theta + \left(\frac{2y}{x+y} - \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\right)\sin\theta
\end{aligned}$$

Au point (0,1) dans la direction $\theta = 180°$, on a

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= \left(\frac{0}{0+1} - \frac{0^2+1^2}{(0+1)^2}\right)\cos 180° + \left(\frac{2}{0+1} - \frac{0^2+1^2}{(0+1)^2}\right)\sin 180° \\ &= \left(\frac{0}{0+1} - \frac{0^2+1^2}{(0+1)^2}\right)(-1) + 0 \\ &= (-1)(-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

8.4

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{a_x}{a} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{a_y}{a} \\ &= \frac{\partial\left(x^4y+5xy^2+4x+5y+3\right)}{\partial x}\frac{a_x}{a} + \frac{\partial\left(x^4y+5xy^2+4x+5y+3\right)}{\partial y}\frac{a_y}{a} \\ &= \left(4x^3y+5y^2+4\right)\frac{a_x}{a} + \left(x^4+10xy+5\right)\frac{a_y}{a}\end{aligned}$$

Au point (0,0) dans la direction donnée par $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= \left(4\cdot 0^3\cdot 0+5\cdot 0^2+4\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(0^4+10\cdot 0\cdot 0+5\right)\frac{-1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{-5}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ &= -0,7071\end{aligned}$$

8.5

$$\begin{aligned}
\frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{a_x}{a} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{a_y}{a} \\
&= \frac{\partial\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right)}{\partial x}\frac{a_x}{a} + \frac{\partial\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right)}{\partial y}\frac{a_y}{a} \\
&= \left(\frac{\partial\left(x^2+xy+y^2\right)}{\partial x}(x+y)^{-1} + \left(x^2+xy+y^2\right)\frac{\partial (x+y)^{-1}}{\partial x}\right)\frac{a_x}{a} \\
&\qquad + \left(\frac{\partial\left(x^2+xy+y^2\right)}{\partial y}(x+y)^{-1} + \left(x^2+xy+y^2\right)\frac{\partial (x+y)^{-1}}{\partial y}\right)\frac{a_y}{a} \\
&= \left((2x+y)(x+y)^{-1} - \left(x^2+xy+y^2\right)(x+y)^{-2}\right)\frac{a_x}{a} \\
&\qquad + \left((x+2y)(x+y)^{-1} - \left(x^2+xy+y^2\right)(x+y)^{-2}\right)\frac{a_y}{a} \\
&= \left(\frac{2x+y}{x+y} - \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}\right)\frac{a_x}{a} + \left(\frac{x+2y}{x+y} - \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}\right)\frac{a_y}{a}
\end{aligned}$$

Au point (-1,-1) dans la direction donnée par $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{df}{ds} &= \left(\frac{2(-1)+(-1)}{(-1)+(-1)} - \frac{(-1)^2+(-1)(-1)+(-1)^2}{((-1)+(-1))^2}\right)\frac{2}{\sqrt{5}} \\
&\qquad + \left(\frac{(-1)+2(-1)}{(-1)+(-1)} - \frac{(-1)^2+(-1)(-1)+(-1)^2}{((-1)+(-1))^2}\right)\frac{1}{\sqrt{5}} \\
&= \left(\frac{-3}{-2} - \frac{3}{4}\right)\frac{2}{\sqrt{5}} + \left(\frac{-3}{-2} - \frac{3}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{9}{4\sqrt{5}} \\
&= 1{,}006
\end{aligned}$$

8.6

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{a_x}{a} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{a_y}{a} \\ &= \frac{\partial\left(\cosh\left(xy\right)\right)}{\partial x}\frac{a_x}{a} + \frac{\partial\left(\cosh\left(xy\right)\right)}{\partial y}\frac{a_y}{a} \\ &= y\sinh\left(xy\right)\frac{a_x}{a} + x\sinh\left(xy\right)\frac{a_y}{a}\end{aligned}$$

Au point (3,-1) dans la direction donnée par $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= -1\sinh\left(3\cdot -1\right)\frac{-1}{\sqrt{5}} + 3\sinh\left(3\cdot -1\right)\frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sinh\left(-3\right)}{\sqrt{5}}\left(1+6\right) \\ &= -31,36\end{aligned}$$

8.7 Le rythme à laquelle la profondeur change est

$$\begin{aligned}\frac{dP}{ds} &= \frac{\partial P}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial P}{\partial y}\sin\theta \\ &= \frac{\partial\left(100m - 0,01m^{-1}x^2 - 0,04m^{-1}y^2\right)}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\left(100m - 0,01m^{-1}x^2 - 0,04m^{-1}y^2\right)}{\partial y}\sin\theta \\ &= -0,02m^{-1}x\cos\theta + -0,08m^{-1}x\sin\theta\end{aligned}$$

a) Si on se déplace vers le nord (θ = 90°) à point (10 m, 10 m), le rythme est

$$\begin{aligned}\frac{dP}{ds} &= -0,02m^{-1}\cdot 10m\cdot\cos 90° + -0,08m^{-1}\cdot 10m\sin 90° \\ &= -0,8\end{aligned}$$

Cela signifie que la profondeur diminue de 0,8 m par mètre de déplacement à la surface du lac.

a) Si on se déplace vers le sud-est (θ = -45°) à point (-20 m, 10 m), le rythme est

$$\begin{aligned}\frac{dP}{ds} &= -0,02m^{-1}\cdot(-20m)\cdot\cos-45° - 0,08m^{-1}\cdot 10m\sin-45° \\ &= 0,4\cdot\cos 45° + 0,8\sin 45° \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{5} \\ &= 0,8485\end{aligned}$$

Cela signifie que la profondeur augmente de 0,8485 m par mètre de déplacement à la surface du lac.

8.8 a) L'altitude est

$$\begin{aligned}h &= 100m + 100m\cos\left(\frac{(200m)^2 + (400m)^2}{(500m)^2}\right) \\ &= 100m + 100m\cos\left(\frac{4}{5}\right) \\ &= 169,67m\end{aligned}$$

b) La dérivée directionnelle est

$$\begin{aligned}\frac{dh}{ds} &= \frac{\partial h}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial h}{\partial y}\sin\theta \\ &= \frac{\partial\left(100m + 100m\cos\left(\frac{x^2+y^2}{(500m)^2}\right)\right)}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\left(100m + 100m\cos\left(\frac{x^2+y^2}{(500m)^2}\right)\right)}{\partial y}\sin\theta \\ &= -100m\sin\left(\frac{x^2+y^2}{(500m)^2}\right)\cdot\frac{2x}{(500m)^2}\cos\theta - 100m\sin\left(\frac{x^2+y^2}{(500m)^2}\right)\cdot\frac{2y}{(500m)^2}\sin\theta\end{aligned}$$

Au point (200 m, 400 m), on a

$$\begin{aligned}\frac{dP}{ds} &= -100m\sin\left(\frac{(200m)^2+(400m)^2}{(500m)^2}\right)\cdot\frac{2\cdot 200m}{(500m)^2}\cos\theta \\ &\quad -100m\sin\left(\frac{(200m)^2+(400m)^2}{(500m)^2}\right)\cdot\frac{2\cdot 400m}{(500m)^2}\sin\theta \\ &= -100m\sin\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{625m}\cos\theta-100m\sin\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{625m}\sin\theta \\ &= -\frac{4}{25}\sin\left(\frac{4}{5}\right)\cos\theta-\frac{8}{25}\sin\left(\frac{4}{5}\right)\sin\theta\end{aligned}$$

Si on marche vers le sud (θ = -90°), on a

$$\begin{aligned}\frac{dP}{ds} &= -\frac{4}{25}\sin\left(\frac{4}{5}\right)\cos(-90°)-\frac{8}{25}\sin\left(\frac{4}{5}\right)\sin(-90°) \\ &= -\frac{4}{25}\sin\left(\frac{4}{5}\right)\cdot 0-\frac{8}{25}\sin\left(\frac{4}{5}\right)\cdot -1 \\ &= 0,2296\end{aligned}$$

c) Si l'altitude ne change pas, c'est que la dérivée directionnelle est nulle. On a donc

$$\begin{gathered}\frac{dP}{ds}=0 \\ -\frac{4}{25}\sin\left(\frac{4}{5}\right)\cos\theta-\frac{8}{25}\sin\left(\frac{4}{5}\right)\sin\theta=0 \\ -4\cos\theta-8\sin\theta=0 \\ -8\sin\theta=4\cos\theta \\ \tan\theta=\frac{-1}{2}\end{gathered}$$

Les deux réponses sont

-26,56° et 153,43°

Ce sont les angles avec l'axe des *x*, donc avec l'est. On demande toutefois les angles avec le nord.

Pour l'angle de -26,56°, l'angle avec le nord est de 116,56° (en tournant vers l'est).

Pour l'angle de 153,43°, l'angle est de 63,43° (en tournant vers l'ouest).

9.1

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} z &= \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\\ &= \frac{\partial\left(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right)}{\partial y}\vec{j}\\ &= \left(3x^2 - 6xy + 3y^2\right)\vec{i} + \left(-3x^2 + 6xy + 3y^2\right)\vec{j}\end{aligned}$$

Au point (1,1), on a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} z &= \left(3\cdot 1^2 - 6\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1^2\right)\vec{i} + \left(-3\cdot 1^2 + 6\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1^2\right)\vec{j}\\ &= 0\vec{i} + 6\vec{j}\end{aligned}$$

9.2

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\\ &= \frac{\partial\left(\frac{\cosh\left(x^2+y^2\right)}{\sinh\left(x+y\right)}\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(\frac{\cosh\left(x^2+y^2\right)}{\sinh\left(x+y\right)}\right)}{\partial y}\vec{j}\\ &= \left(\frac{\partial\left(\cosh\left(x^2+y^2\right)\right)}{\partial x}\left(\sinh\left(x+y\right)\right)^{-1} + \cosh\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial\left(\sinh\left(x+y\right)\right)^{-1}}{\partial x}\right)\vec{i}\\ &\qquad + \left(\frac{\partial\left(\cosh\left(x^2+y^2\right)\right)}{\partial y}\left(\sinh\left(x+y\right)\right)^{-1} + \cosh\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial\left(\sinh\left(x+y\right)\right)^{-1}}{\partial y}\right)\vec{j}\\ &= \left(\sinh\left(x^2+y^2\right)\cdot 2x\left(\sinh\left(x+y\right)\right)^{-1} - \cosh\left(x^2+y^2\right)\left(\sinh\left(x+y\right)\right)^{-2}\cosh\left(x+y\right)\right)\vec{i}\\ &\qquad + \left(\sinh\left(x^2+y^2\right)\cdot 2y\left(\sinh\left(x+y\right)\right)^{-1} - \cosh\left(x^2+y^2\right)\left(\sinh\left(x+y\right)\right)^{-2}\cosh\left(x+y\right)\right)\vec{j}\\ &= \left(\frac{2x\sinh\left(x^2+y^2\right)}{\sinh\left(x+y\right)} - \frac{\cosh\left(x^2+y^2\right)\cosh\left(x+y\right)}{\left(\sinh\left(x+y\right)\right)^2}\right)\vec{i}\\ &\qquad + \left(\frac{2y\sinh\left(x^2+y^2\right)}{\sinh\left(x+y\right)} - \frac{\cosh\left(x^2+y^2\right)\cosh\left(x+y\right)}{\left(\sinh\left(x+y\right)\right)^2}\right)\vec{j}\end{aligned}$$

Au point (1,0), on a

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}f &= \left(\frac{2\cdot 1\cdot \sinh(1+0)}{\sinh(1+0)} - \frac{\cosh(1+0)\cosh(1+0)}{\left(\sinh(1+0)\right)^2}\right)\vec{i} \\
&\quad + \left(\frac{2\cdot 0\cdot \sinh(1+0)}{\sinh(1+0)} - \frac{\cosh(1+0)\cosh(1+0)}{\left(\sinh(1+0)\right)^2}\right)\vec{j} \\
&= \left(\frac{2\cdot \sinh(1)}{\sinh(1)} - \frac{\cosh(1)\cosh(1)}{\left(\sinh(1)\right)^2}\right)\vec{i} + \left(0 - \frac{\cosh(1)\cosh(1)}{\left(\sinh(1)\right)^2}\right)\vec{j} \\
&= \left(2 - \frac{1}{\left(\tanh(1)\right)^2}\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{\left(\tanh(1)\right)^2}\right)\vec{j} \\
&= 0,2759\vec{i} - 1,7241\vec{j}
\end{aligned}$$

9.3

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \\
&= \frac{\partial\left(\sqrt{100 - x^2 - y^2}\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(\sqrt{100 - x^2 - y^2}\right)}{\partial y}\vec{j} \\
&= \frac{1}{2}\left(100 - x^2 - y^2\right)^{-1/2}(-2x)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(100 - x^2 - y^2\right)^{-1/2}(-2y)\vec{j} \\
&= \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2 - y^2}}\vec{i} + \frac{-y}{\sqrt{100 - x^2 - y^2}}\vec{j}
\end{aligned}$$

Au point (2,4), on a

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}f &= \frac{-2}{\sqrt{100 - 2^2 - 4^2}}\vec{i} + \frac{-4}{\sqrt{100 - 2^2 - 4^2}}\vec{j} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{80}}\vec{i} + \frac{-4}{\sqrt{80}}\vec{j} \\
&= -0,2236\vec{i} - 0,4472\vec{j}
\end{aligned}$$

9.4

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \\ &= \frac{\partial\left(xye^z\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(xye^z\right)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\left(xye^z\right)}{\partial x}\vec{k} \\ &= ye^z\vec{i} + xe^z\vec{j} + xye^z\vec{k}\end{aligned}$$

Au point (2, 3, 0), on a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= 3\cdot e^0\vec{i} + 2\cdot e^0\vec{j} + 2\cdot 3\cdot e^0\vec{k} \\ &= 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}\end{aligned}$$

9.5 Commençons par calculer le gradient de la fonction

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} w &= \frac{\partial w}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{k} \\ &= \frac{\partial\left((x+y)(y+z)\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left((x+y)(y+z)\right)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\left((x+y)(y+z)\right)}{\partial z}\vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x}(y+z) + (x+y)\frac{\partial(y+z)}{\partial x}\right)\vec{i} \\ &\qquad + \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial y}(y+z) + (x+y)\frac{\partial(y+z)}{\partial y}\right)\vec{j} \\ &\qquad + \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial z}(y+z) + (x+y)\frac{\partial(y+z)}{\partial z}\right)\vec{k} \\ &= \left(1\cdot(y+z) + (x+y)\cdot 0\right)\vec{i} + \left(1\cdot(y+z) + (x+y)\cdot\right)\vec{j} + \left(0\cdot(y+z) + (x+y)\cdot 1\right)\vec{k} \\ &= (y+z)\vec{i} + (2y+x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}\end{aligned}$$

Au point (5, 7, 1), on a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} w &= (7+1)\vec{i} + (2\cdot 7+5+1)\vec{j} + (5+7)\vec{k} \\ &= 8\vec{i} + 20\vec{j} + 12\vec{k}\end{aligned}$$

La dérivée directionnelle est donc

$$\begin{aligned}\frac{dw}{ds} &= \vec{\nabla} w \cdot \frac{\vec{a}}{a} \\ &= \left(8\vec{i} + 20\vec{j} + 12\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}\right) \\ &= \frac{8}{\sqrt{6}} - \frac{20}{\sqrt{6}} + \frac{24}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{6}} \\ &= 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

10.1 La valeur maximale de la dérivée directionnelle est la grandeur du gradient. Le gradient est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} z &= \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} \\ &= \frac{\partial\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)\right)}{\partial y}\vec{j} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \frac{\pi}{2}\vec{i} + \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \frac{\pi}{2}\vec{j}\end{aligned}$$

Au point (1, 1), on a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} z &= \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+1)\right) \cdot \frac{\pi}{2}\vec{i} + \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+1)\right) \cdot \frac{\pi}{2}\vec{j} \\ &= \cos(\pi) \cdot \frac{\pi}{2}\vec{i} + \cos(\pi) \cdot \frac{\pi}{2}\vec{j} \\ &= -\frac{\pi}{2}\vec{i} - \frac{\pi}{2}\vec{j}\end{aligned}$$

La grandeur de ce vecteur est

$$\begin{aligned}\left|\vec{\nabla} z\right| &= \sqrt{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \\ &= 2,221\end{aligned}$$

La direction de ce vecteur (qui est la direction de la dérivée directionnelle maximale) est

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}} \\ &= 225°\end{aligned}$$

10.2 La valeur maximale de la dérivée directionnelle est la grandeur du gradient. Le gradient est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \\ &= \frac{\partial\left(\ln\left(\sqrt{2x-3y}\right)\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(\ln\left(\sqrt{2x-3y}\right)\right)}{\partial y}\vec{j} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2x-3y)^{-1/2}\cdot 2}{\sqrt{2x-3y}}\vec{i} + \frac{\frac{1}{2}(2x-3y)^{-1/2}\cdot(-3)}{\sqrt{2x-3y}}\vec{j} \\ &= \frac{1}{2x-3y}\vec{i} - \frac{3}{2(2x-3y)}\vec{j}\end{aligned}$$

Au point (1, 0), on a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{1}{2\cdot 1-3\cdot 0}\vec{i} - \frac{3}{2(2\cdot 1-3\cdot 0)}\vec{j} \\ &= \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}\end{aligned}$$

La grandeur de ce vecteur est

$$\begin{aligned}\left|\vec{\nabla} f\right| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{4} \\ &= 0,9014\end{aligned}$$

La direction de ce vecteur (qui est la direction de la dérivée directionnelle maximale) est

$$\theta = \arctan \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$$
$$= -56,31°$$

10.3 La valeur maximale de la dérivée directionnelle est la grandeur du gradient. Le gradient est

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \\
&= \frac{\partial\left(\frac{\cosh(xy)}{xy}\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(\frac{\cosh(xy)}{xy}\right)}{\partial y}\vec{j} \\
&= \left(\frac{\partial(\cosh(xy))}{\partial x}(xy)^{-1} + \cosh(xy)\frac{\partial(xy)^{-1}}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(\cosh(xy))}{\partial y}(xy)^{-1} + \cosh(xy)\frac{\partial(xy)^{-1}}{\partial y}\right)\vec{j} \\
&= \left(\sinh(xy)\cdot y\cdot(xy)^{-1} - \cosh(xy)(xy)^{-2}\cdot y\right)\vec{i} + \left(\sinh(xy)\cdot x\cdot(xy)^{-1} - \cosh(xy)(xy)^{-2}\cdot x\right)\vec{j} \\
&= \left(\frac{y\sinh(xy)}{yx} - \frac{y\cosh(xy)}{x^2y^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{x\sinh(xy)}{xy} - \frac{x\cosh(xy)}{x^2y^2}\right)\vec{j} \\
&= \left(\frac{\sinh(xy)}{x} - \frac{\cosh(xy)}{x^2y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\sinh(xy)}{y} - \frac{\cosh(xy)}{xy^2}\right)\vec{j}
\end{aligned}$$

Au point (2, 1), on a

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \left(\frac{\sinh(2\cdot 1)}{2} - \frac{\cosh(2\cdot 1)}{2^2\cdot 1}\right)\vec{i} + \left(\frac{\sinh(2\cdot 1)}{1} - \frac{\cosh(2\cdot 1)}{2\cdot 1^2}\right)\vec{j} \\
&= \left(\frac{\sinh(2)}{2} - \frac{\cosh(2)}{4}\right)\vec{i} + \left(\sinh(2) - \frac{\cosh(2)}{2}\right)\vec{j} \\
&= 0,8728\vec{i} + 1,7457\vec{j}
\end{aligned}$$

La grandeur de ce vecteur est

$$\begin{aligned}
\left|\vec{\nabla} f\right| &= \sqrt{(0,8728)^2 + (1,7457)^2} \\
&= 1,9518
\end{aligned}$$

La direction de ce vecteur (qui est la direction de la dérivée directionnelle maximale) est

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\frac{1,7457}{0,8728}\\ &= \arctan 2\\ &= 63,43°\end{aligned}$$

10.4 Trouvons la direction de la dérivée maximale avec le gradient. Le gradient est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}z &= \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\\ &= \frac{\partial\left(\frac{xy}{x+y}\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(\frac{xy}{x+y}\right)}{\partial y}\vec{j}\\ &= \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x}(x+y)^{-1} + xy\frac{\partial(x+y)^{-1}}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(xy)}{\partial y}(x+y)^{-1} + xy\frac{\partial(x+y)^{-1}}{\partial y}\right)\vec{j}\\ &= \left(y\cdot(x+y)^{-1} - xy(x+y)^{-2}\right)\vec{i} + \left(x\cdot(x+y)^{-1} - xy(x+y)^{-2}\right)\vec{j}\\ &= \left(\frac{y}{x+y} - \frac{xy}{(x+y)^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{x+y} - \frac{xy}{(x+y)^2}\right)\vec{j}\end{aligned}$$

Au point (-4, 5), on a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}z &= \left(\frac{5}{-4+5} - \frac{-4\cdot 5}{(-4+5)^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{-4}{-4+5} - \frac{-4\cdot 5}{(-4+5)^2}\right)\vec{j}\\ &= (5 - -20)\vec{i} + (-4 - -20)\vec{j}\\ &= 25\vec{i} + 16\vec{j}\end{aligned}$$

La direction de ce vecteur (qui est la direction de la dérivée directionnelle maximale) est

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\frac{16}{25}\\ &= 32,62°\end{aligned}$$

Les directions pour lesquelles la dérivée est nulle sont à 90° (de chaque côté) de cette direction. Les deux directions sont donc 122,62° et -57,38°.

10.5 Trouvons la direction de la dérivée maximale avec le gradient. Le gradient est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}P &= \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} \\ &= \frac{\partial\left(100m - 0,01m^{-1}x^2 - 0,04m^{-1}y^2\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(100m - 0,01m^{-1}x^2 - 0,04m^{-1}y^2\right)}{\partial y}\vec{j} \\ &= \left(-0,02m^{-1}x\right)\vec{i} + \left(-0,08m^{-1}y\right)\vec{j}\end{aligned}$$

Au point (10 m, 10 m), on a

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}P &= \left(-0,02m^{-1}\cdot 10m\right)\vec{i} + \left(-0,08m^{-1}\cdot 10m\right)\vec{j} \\ &= -0,2\vec{i} - 0,8\vec{j}\end{aligned}$$

La direction de ce vecteur (qui est la direction de la dérivée directionnelle maximale) est

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\frac{-0,8}{-0,2} \\ &= 255,96°\end{aligned}$$

a) Le pêcheur doit donc aller dans cette direction pour que la profondeur augmente le plus rapidement. Cette direction est l'angle par rapport à l'axe des x. Si on veut l'angle avec le nord, on doit soustraire 90°. La direction est donc 165,96° (en tournant vers l'ouest).

b) Si on veut que la profondeur diminue le plus rapidement, il doit aller dans la direction opposée. L'angle est donc de 14,04° (en tournant vers l'est.)

c) Si on veut que la profondeur reste constante, on doit aller à 90° de la direction vers laquelle la profondeur augmente le plus rapidement. Les deux directions à 90° du gradient sont 104,04° (en tournant vers l'est) et 75,96° (en tournant vers l'ouest)

10.6 a) Trouvons la direction de la dérivée maximale avec le gradient. Le gradient est

$$\vec{\nabla}h = \frac{\partial h}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\vec{j}$$

$$= \frac{\partial\left(100m + 100m\cos\left(\frac{x^2+y^2}{(500m)^2}\right)\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(100m + 100m\cos\left(\frac{x^2+y^2}{(500m)^2}\right)\right)}{\partial y}\vec{j}$$

$$= \left(-100m\sin\left(\frac{x^2+y^2}{(500m)^2}\right)\cdot\frac{2x}{(500m)^2}\right)\vec{i} + \left(-100m\sin\left(\frac{x^2+y^2}{(500m)^2}\right)\cdot\frac{2y}{(500m)^2}\right)\vec{j}$$

Au point (200 m, 4000 m), on a

$$\vec{\nabla}h = \left(-100m\sin\left(\frac{(200m)^2+(400m)^2}{(500m)^2}\right)\cdot\frac{2\cdot 200m}{(500m)^2}\right)\vec{i}$$

$$+\left(-100m\sin\left(\frac{(200m)^2+(400m)^2}{(500m)^2}\right)\cdot\frac{2\cdot 400m}{(500m)^2}\right)\vec{j}$$

$$= \left(-100m\sin\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{625m}\right)\vec{i} + \left(-100m\sin\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{625m}\right)\vec{j}$$

$$= \left(-\frac{4}{25}\sin\left(\frac{4}{5}\right)\right)\vec{i} + \left(-\frac{8}{25}\sin\left(\frac{4}{5}\right)\right)\vec{j}$$

$$= -0,11477\vec{i} - 0,2296\vec{j}$$

La direction de ce vecteur (qui est la direction de la dérivée directionnelle maximale) est

$$\theta = \arctan\frac{-0,2296}{-0,1195}$$

$$= \arctan(2)$$

$$= -116,6°$$

C'est la direction vers laquelle l'altitude augmente le plus rapidement. Si on veut que l'altitude diminue le plus rapidement, il faut allez dans la direction opposée, donc dans la direction θ = 63,43°.

Cette direction est l'angle par rapport à l'axe des *x*. l'angle par rapport au nord est donc de 26,57° (en tournant vers l'est).

b) La pente maximale est donnée par la grandeur du gradient.

$$\begin{aligned}\left|\vec{\nabla} h\right| &= \sqrt{(0{,}11477)^2 + (0{,}22956)^2} \\ &= 0{,}25665\end{aligned}$$

Quand on va dans la direction opposée à la direction du gradient, la pente est identique, mais de signe opposé. La pente est donc de -0,25665.

10.7 La fonction

$$y = \ln(x)$$

est la courbe de niveau $z = 0$ de la fonction

$$z = -y + \ln(x)$$

Comme le gradient est perpendiculaire aux courbes de niveau, on trouve le vecteur perpendiculaire en trouvant le gradient. Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} z &= \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} \\ &= \frac{\partial\left(-y+\ln(x)\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(-y+\ln(x)\right)}{\partial y}\vec{j} \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)\vec{i} + (-1)\vec{j}\end{aligned}$$

Quand $x = 2$, alors $y = \ln(2)$. À cette position, le gradient est

$$\vec{\nabla} z = \left(\frac{1}{2}\right)\vec{i} + (-1)\vec{j}$$

Pour avoir un vecteur unitaire, il faut diviser par la longueur du vecteur. La longueur est

$$\begin{aligned}\left|\vec{\nabla} z\right| &= \sqrt{(0{,}5)^2 + (-1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Le vecteur unitaire est donc

$$\frac{\vec{\nabla}z}{\left|\vec{\nabla}z\right|} = \left(\frac{2}{2\sqrt{5}}\right)\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

Le vecteur normal est donc

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

Comme le vecteur dans la direction opposée à ce vecteur est aussi perpendiculaire à la fonction, le vecteur suivant est aussi perpendiculaire.

$$\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

10.8 La fonction

$$y = e^{3x}$$

est la courbe de niveau $z = 0$ de la fonction

$$z = -y + e^{3x}$$

Comme le gradient est perpendiculaire aux courbes de niveau, on trouve le vecteur perpendiculaire en trouvant le gradient. Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}z &= \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} \\ &= \frac{\partial\left(-y+e^{3x}\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(-y+e^{3x}\right)}{\partial y}\vec{j} \\ &= \left(3e^{3x}\right)\vec{i} + \left(-1\right)\vec{j}\end{aligned}$$

Quand $x = -1$, alors $y = e^{-3}$. À cette position, le gradient est

$$\vec{\nabla}z = \left(3e^{-3}\right)\vec{i} + \left(-1\right)\vec{j}$$

Pour avoir un vecteur unitaire, il faut diviser par la longueur du vecteur. La longueur est

$$\begin{aligned}\left|\vec{\nabla} z\right| &= \sqrt{\left(3e^{-3}\right)^2 + (-1)^2} \\ &= 1{,}0111\end{aligned}$$

Le vecteur unitaire est donc

$$\begin{aligned}\frac{\vec{\nabla} z}{\left|\vec{\nabla} z\right|} &= \left(\frac{3e^{-3}}{1{,}0111}\right)\vec{i} - \frac{1}{1{,}0111}\vec{j} \\ &= 0{,}1477\vec{i} - 0{,}9890\vec{j}\end{aligned}$$

Le vecteur normal est donc

$$\vec{n} = 0{,}1477\vec{i} - 0{,}9890\vec{j}$$

Comme le vecteur dans la direction opposée à ce vecteur est aussi perpendiculaire à la fonction, le vecteur suivant est aussi perpendiculaire.

$$\vec{n} = -0{,}1477\vec{i} + 0{,}9890\vec{j}$$

10.9 La fonction

$$y = 5x^2 - 2x + 6$$

est la courbe de niveau $z = 0$ de la fonction

$$z = -y + 5x^2 - 2x + 6$$

Comme le gradient est perpendiculaire aux courbes de niveau, on trouve le vecteur perpendiculaire en trouvant le gradient. Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} z &= \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} \\ &= \frac{\partial\left(-y + 5x^2 - 2x + 6\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(-y + 5x^2 - 2x + 6\right)}{\partial y}\vec{j} \\ &= (10x - 2)\vec{i} + (-1)\vec{j}\end{aligned}$$

Quand $x = 1$, alors $y = 9$. À cette position, le gradient est

$$\vec{\nabla} z = 8\vec{i} + (-1)\vec{j}$$

Pour avoir un vecteur unitaire, il faut diviser par la longueur du vecteur. La longueur est

$$\begin{aligned} \left|\vec{\nabla} z\right| &= \sqrt{8^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{65} \end{aligned}$$

Le vecteur unitaire est donc

$$\frac{\vec{\nabla} z}{\left|\vec{\nabla} z\right|} = \frac{8}{\sqrt{65}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{65}}\vec{j}$$

Le vecteur normal est donc

$$\vec{n} = \frac{8}{\sqrt{65}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{65}}\vec{j}$$

Comme le vecteur dans la direction opposée à ce vecteur est aussi perpendiculaire à la fonction, le vecteur suivant est aussi perpendiculaire.

$$\vec{n} = -\frac{8}{\sqrt{65}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{65}}\vec{j}$$

10.10 La fonction

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

est la courbe de niveau $z = 8$ de la fonction

$$z = x^2 + 4y^2$$

Comme le gradient est perpendiculaire aux courbes de niveau, on trouve le vecteur perpendiculaire en trouvant le gradient. Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} z &= \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} \\ &= \frac{\partial\left(x^2 + 4y^2\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(x^2 + 4y^2\right)}{\partial y}\vec{j} \\ &= (2x)\vec{i} + (8y)\vec{j} \end{aligned}$$

Quand x = -2 et y = 1, le gradient est

$$\vec{\nabla} z = -4\vec{i} + 8\vec{j}$$

Pour avoir un vecteur unitaire, il faut diviser par la longueur du vecteur. La longueur est

$$\begin{aligned}\left|\vec{\nabla} z\right| &= \sqrt{(-4)^2 + 8^2} \\ &= 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

Le vecteur unitaire est donc

$$\frac{\vec{\nabla} z}{\left|\vec{\nabla} z\right|} = \frac{-4}{4\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{8}{4\sqrt{5}}\vec{j}$$

Le vecteur normal est donc

$$\vec{n} = \frac{-1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

Comme le vecteur dans la direction opposée à ce vecteur est aussi perpendiculaire à la fonction, le vecteur suivant est aussi perpendiculaire.

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

10.11 La fonction

$$z = \cosh(-x + 2y)$$

est la surface de niveau f = 0 de la fonction

$$f = z - \cosh(-x + 2y)$$

Comme le gradient est perpendiculaire aux surfaces de niveaux, on trouve le vecteur perpendiculaire en trouvant le gradient. Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\ &= \frac{\partial\left(z-\cosh\left(-x+2y\right)\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(z-\cosh\left(-x+2y\right)\right)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\left(z-\cosh\left(-x+2y\right)\right)}{\partial z}\vec{k} \\ &= \sinh\left(-x+2y\right)\vec{i} - 2\sinh\left(-x+2y\right)\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

Quand $x = 1$ et $y = 1$, le gradient est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \sinh\left(-1+2\right)\vec{i} - 2\sinh\left(-1+2\right)\vec{j} + \vec{k} \\ &= \sinh\left(1\right)\vec{i} - 2\sinh\left(1\right)\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

Pour avoir un vecteur unitaire, il faut diviser par la longueur du vecteur. La longueur est

$$\begin{aligned}\left|\vec{\nabla} f\right| &= \sqrt{\sinh 1^2 + 4\sinh^2 1 + 1^2} \\ &= \sqrt{5\sinh 1^2 + 1^2}\end{aligned}$$

Le vecteur unitaire est donc

$$\begin{aligned}\frac{\vec{\nabla} f}{\left|\vec{\nabla} f\right|} &= \frac{\sinh\left(1\right)}{\sqrt{5\sinh^2 1+1}}\vec{i} - \frac{2\sinh\left(1\right)}{\sqrt{5\sinh^2 1+1}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5\sinh^2 1+1}}\vec{k} \\ &= 0,41797\vec{i} - 0,83595\vec{j} + 0,35566\vec{k}\end{aligned}$$

Le vecteur normal est donc

$$\vec{n} = 0,41797\vec{i} - 0,83595\vec{j} + 0,35566\vec{k}$$

Comme le vecteur dans la direction opposée à ce vecteur est aussi perpendiculaire à la fonction, le vecteur suivant est aussi perpendiculaire.

$$\vec{n} = -0,41797\vec{i} + 0,83595\vec{j} - 0,35566\vec{k}$$

10.12 La fonction

$$z = \frac{xy}{x+2y} + 3x + 2y$$

est la surface de niveau $f = 0$ de la fonction

$$f = z - \frac{xy}{x+2y} - 3x - 2y$$

Comme le gradient est perpendiculaire aux surfaces de niveaux, on trouve le vecteur perpendiculaire en trouvant le gradient. Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\
&= \frac{\partial\left(z - \frac{xy}{x+2y} - 3x - 2y\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(z - \frac{xy}{x+2y} - 3x - 2y\right)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\left(z - \frac{xy}{x+2y} - 3x - 2y\right)}{\partial z}\vec{k} \\
&= \left(-\frac{y}{x+2y} + \frac{xy}{(x+2y)^2} - 3\right)\vec{i} + \left(-\frac{x}{x+2y} + \frac{2xy}{(x+2y)^2} - 2\right)\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

Quand $x = 1$ et $y = 0$, le gradient est

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \left(-\frac{0}{1+0} + \frac{1\cdot 0}{(1+0)^2} - 3\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{1+0} + \frac{2\cdot 1\cdot 0}{(1+0)^2} - 2\right)\vec{j} + \vec{k} \\
&= -3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

Pour avoir un vecteur unitaire, il faut diviser par la longueur du vecteur. La longueur est

$$\begin{aligned}
\left|\vec{\nabla} f\right| &= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1^2} \\
&= \sqrt{19}
\end{aligned}$$

Le vecteur unitaire est donc

$$\frac{\vec{\nabla} f}{\left|\vec{\nabla} f\right|} = \frac{-3}{\sqrt{19}}\vec{i} + \frac{-3}{\sqrt{19}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{19}}\vec{k}$$

Le vecteur normal est donc

$$\vec{n} = \frac{-3}{\sqrt{19}}\vec{i} + \frac{-3}{\sqrt{19}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{19}}\vec{k}$$

Comme le vecteur dans la direction opposée à ce vecteur est aussi perpendiculaire à la fonction, le vecteur suivant est aussi perpendiculaire.

$$\vec{n} = \frac{3}{\sqrt{19}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{19}}\vec{j} + \frac{-1}{\sqrt{19}}\vec{k}$$

10.13 La fonction

$$z = \sqrt{x^2 y + xy^2}$$

est la surface de niveau $f = 0$ de la fonction

$$f = z - \sqrt{x^2 y + xy^2}$$

Comme le gradient est perpendiculaire aux surfaces de niveaux, on trouve le vecteur perpendiculaire en trouvant le gradient. Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\
&= \frac{\partial\left(z - \sqrt{x^2 y + xy^2}\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(z - \sqrt{x^2 y + xy^2}\right)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\left(z - \sqrt{x^2 y + xy^2}\right)}{\partial z}\vec{k} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\left(x^2 y + xy^2\right)^{-1/2}\left(2xy + y^2\right)\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{2}\left(x^2 y + xy^2\right)^{-1/2}\left(x^2 + 2xy\right)\right)\vec{j} + \vec{k} \\
&= -\frac{2xy + y^2}{2\sqrt{x^2 y + xy^2}}\vec{i} - \frac{x^2 + 2xy}{2\sqrt{x^2 y + xy^2}}\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

Quand $x = 2$ et $y = 1$, le gradient est

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= -\frac{2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2}{2\sqrt{2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2}}\vec{i} - \frac{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1}{2\sqrt{2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2}}\vec{j} + \vec{k} \\
&= -\frac{5}{2\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{8}{2\sqrt{6}}\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

Pour avoir un vecteur unitaire, il faut diviser par la longueur du vecteur. La longueur est

$$\left|\vec{\nabla}f\right| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{8}{2\sqrt{6}}\right)^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{\frac{113}{24}}$$
$$= \frac{\sqrt{678}}{12}$$

Le vecteur unitaire est donc

$$\frac{\vec{\nabla}f}{\left|\vec{\nabla}f\right|} = -\frac{5}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{12}{\sqrt{678}}\vec{i} - \frac{8}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{12}{\sqrt{678}}\vec{j} + \frac{12}{\sqrt{678}}\vec{k}$$
$$= -\frac{30}{\sqrt{4068}}\vec{i} - \frac{48}{\sqrt{4068}}\vec{j} + \frac{12}{\sqrt{678}}\vec{k}$$
$$= -\frac{30}{6\sqrt{113}}\vec{i} - \frac{48}{6\sqrt{113}}\vec{j} + \frac{12}{\sqrt{678}}\vec{k}$$
$$= -\frac{5}{\sqrt{113}}\vec{i} - \frac{8}{\sqrt{113}}\vec{j} + \frac{12}{\sqrt{678}}\vec{k}$$

Le vecteur normal est donc

$$\vec{n} = -\frac{5}{\sqrt{113}}\vec{i} - \frac{8}{\sqrt{113}}\vec{j} + \frac{12}{\sqrt{678}}\vec{k}$$

Comme le vecteur dans la direction opposée à ce vecteur est aussi perpendiculaire à la fonction, le vecteur suivant est aussi perpendiculaire.

$$\vec{n} = \frac{5}{\sqrt{113}}\vec{i} + \frac{8}{\sqrt{113}}\vec{j} - \frac{12}{\sqrt{678}}\vec{k}$$

10.14 Pour trouver l'équation du plan, il nous faut un vecteur normal à la surface. Trouvons premièrement ce vecteur normal. La fonction

$$z = 3x^2 - y^2 + 4x + 7y - 9$$

est la surface de niveau $f = 0$ de la fonction

$$f = z - 3x^2 + y^2 - 4x - 7y + 9$$

Comme le gradient est perpendiculaire aux surfaces de niveaux, on trouve le vecteur perpendiculaire en trouvant le gradient. Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\ &= \frac{\partial\left(z-3x^2+y^2-4x-7y+9\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(z-3x^2+y^2-4x-7y+9\right)}{\partial y}\vec{j} \\ &\qquad + \frac{\partial\left(z-3x^2+y^2-4x-7y+9\right)}{\partial z}\vec{k} \\ &= \left(-6x-4\right)\vec{i} + \left(2y-7\right)\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

Quand $x = 0$ et $y = 0$, le gradient est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \left(-6\cdot 0-4\right)\vec{i} + \left(2\cdot 0-7\right)\vec{j} + \vec{k} \\ &= -6\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

C'est notre vecteur normal. Puisque l'équation du plan est

$$n_x\left(x-x_0\right)+n_y\left(y-y_0\right)+n_z\left(z-z_0\right)=0$$

On a, au point (0, 0, -9)

$$-4\left(x-0\right)-7\left(y-0\right)+\left(z+9\right)=0$$

Si on isole z, on arrive à

$$z = 4x+7y-9$$

10.15 Pour trouver l'équation du plan, il nous faut un vecteur normal à la surface. Trouvons premièrement ce vecteur normal. La fonction

$$z=\cos\left(2x+y+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

est la surface de niveau $f = 0$ de la fonction

$$f = z-\cos\left(2x+y+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

Comme le gradient est perpendiculaire aux surfaces de niveaux, on trouve le vecteur perpendiculaire en trouvant le gradient. Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\ &= \frac{\partial\left(z - \cos\left(2x + y + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(z - \cos\left(2x + y + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\partial y}\vec{j} \\ &\qquad + \frac{\partial\left(z - \cos\left(2x + y + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\partial z}\vec{k} \\ &= \left(2\sin\left(2x + y + \frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{i} + \left(\sin\left(2x + y + \frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

Quand $x = 0$ et $y = 0$, le gradient est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}f &= \left(2\sin\left(2\cdot 0 + 0 + \frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{i} + \left(\sin\left(2\cdot 0 + 0 + \frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{j} + \vec{k} \\ &= \left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{i} + \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{j} + \vec{k} \\ &= 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

C'est notre vecteur normal. Puisque l'équation du plan est

$$n_x\left(x - x_0\right) + n_y\left(y - y_0\right) + n_z\left(z - z_0\right) = 0$$

On a, au point (0, 0, 0)

$$2\left(x - 0\right) + \left(y - 0\right) + \left(z + 0\right) = 0$$

Si on isole z, on arrive à

$$z = -2x - y$$

10.16 Pour trouver l'équation du plan, il nous faut un vecteur normal à la surface. Trouvons premièrement ce vecteur normal. La fonction

$$z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$$

est la surface de niveau $f = 0$ de la fonction

$$f = z - \sqrt{100 - x^2 - y^2}$$

Comme le gradient est perpendiculaire aux surfaces de niveaux, on trouve le vecteur perpendiculaire en trouvant le gradient. Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\
&= \frac{\partial\left(z - \sqrt{100 - x^2 - y^2}\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(z - \sqrt{100 - x^2 - y^2}\right)}{\partial y}\vec{j} \\
&\qquad + \frac{\partial\left(z - \sqrt{100 - x^2 - y^2}\right)}{\partial z}\vec{k} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\left(100 - x^2 - y^2\right)^{-1/2}(-2x)\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{2}\left(100 - x^2 - y^2\right)^{-1/2}(-2x)\right)\vec{j} + \vec{k} \\
&= \frac{x}{\sqrt{100 - x^2 - y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{100 - x^2 - y^2}}\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

Quand $x = 6$ et $y = 0$, le gradient est

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{6}{\sqrt{100 - 6^2 - 0^2}}\vec{i} + \frac{0}{\sqrt{100 - 6^2 - 0^2}}\vec{j} + \vec{k} \\
&= \frac{6}{8}\vec{i} + \vec{k} \\
&= \frac{3}{4}\vec{i} + \vec{k}
\end{aligned}$$

C'est notre vecteur normal. Puisque l'équation du plan est

$$n_x\left(x - x_0\right) + n_y\left(y - y_0\right) + n_z\left(z - z_0\right) = 0$$

On a, au point (6, 0, 8)

$$\frac{3}{4}\left(x - 6\right) + 0 \cdot \left(y - 0\right) + \left(z - 8\right) = 0$$

Si on isole z, on arrive à

$$\frac{3}{4}(x-6)+(z-8)=0$$
$$z=-\frac{3}{4}(x-6)+8$$
$$z=-\frac{3x}{4}+\frac{18}{4}+8$$
$$z=-\frac{3x}{4}+\frac{25}{2}$$

11.1 On travaille avec la fonction

$$F = ye^x + x^2 - \ln(x)$$

La dérivée est alors

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \\
&= -\frac{d\left(ye^x + x^2 - \ln(x)\right)/dx}{d\left(ye^x + x^2 - \ln(x)\right)/dy} \\
&= -\frac{ye^x + 2x - 1/x}{e^x} \\
&= -\frac{xye^x + 2x^2 - 1}{xe^x} \\
&= \frac{1 - xye^x - 2x^2}{xe^x}
\end{aligned}$$

11.2 On travaille avec la fonction

$$F = xy - \sin(xy)$$

La dérivée est alors

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \\ &= -\frac{d\left(xy-\sin\left(xy\right)\right)/dx}{d\left(xy-\sin\left(xy\right)\right)/dy} \\ &= -\frac{y-y\cos\left(xy\right)}{x-x\cos\left(xy\right)} \\ &= -\frac{y\left(1-\cos\left(xy\right)\right)}{x\left(1-\cos\left(xy\right)\right)} \\ &= \frac{-y}{x}\end{aligned}$$

11.3 On travaille avec la fonction

$$F = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 1$$

La dérivée est alors

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \\ &= -\frac{d\left(x^3+3x^2y-3xy^2-1\right)/dx}{d\left(x^3+3x^2y-3xy^2-1\right)/dy} \\ &= -\frac{3x^2+6xy-3y^2}{3x^2-6xy} \\ &= -\frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy} \\ &= \frac{y^2-2xy-x^2}{x^2-2xy}\end{aligned}$$

11.4 Pour calculer

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$

On a besoin de la dérivée. Pour trouver la dérivée, on travaille avec la fonction

$$F = x^2 y + \ln(x+y)$$

La dérivée est alors

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \\
&= -\frac{d\left(x^2 y + \ln(x+y)\right) / dx}{d\left(x^2 y + \ln(x+y)\right) / dy} \\
&= -\frac{2xy + \frac{1}{x+y}}{x^2 + \frac{1}{x+y}} \\
&= -\frac{2xy(x+y)+1}{x^2(x+y)+1}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\Delta y &\approx \frac{dy}{dx}\Delta x \\
&\approx -\frac{2xy(x+y)+1}{x^2(x+y)+1}\Delta x
\end{aligned}$$

Si $x = 1$, $y = 0$ et $\Delta x = 0{,}01$, alors

$$\begin{aligned}
\Delta y &\approx -\frac{2\cdot 1\cdot 0(1+0)+1}{1^2(1+0)+1}\cdot 0{,}01 \\
&\approx -\frac{1}{2}\cdot 0{,}01 \\
&\approx -0{,}005
\end{aligned}$$

11.5 Pour calculer

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$

On a besoin de la dérivée. Pour trouver la dérivée, on travaille avec la fonction

$$F = xy - \sin(x+y)$$

La dérivée est alors

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}\\ &= -\frac{d(xy-\sin(x+y))/dx}{d(xy-\sin(x+y))/dy}\\ &= -\frac{y+\cos(x+y)}{x+\cos(x+y)}\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Delta y &\approx \frac{dy}{dx}\Delta x\\ &\approx -\frac{y+\cos(x+y)}{x+\cos(x+y)}\Delta x\end{aligned}$$

Si $x = 0$, $y = 0$ et $\Delta x = 0{,}02$, alors

$$\begin{aligned}\Delta y &\approx -\frac{0+\cos(0+0)}{0+\cos(0+0)}\cdot 0{,}02\\ &\approx -\frac{1}{1}\cdot 0{,}02\\ &\approx -0{,}02\end{aligned}$$

11.6 On travaille avec la fonction

$$F = x^3z + 5xy^2 - 6xz + 3y - 11$$

La dérivée partielle par rapport à x est alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \\ &= -\frac{d\left(x^3z+5xy^2-6xz+3y-11\right)/dx}{d\left(x^3z+5xy^2-6xz+3y-11\right)/dz} \\ &= -\frac{3x^2z+5y^2-6z}{x^3-6x}\end{aligned}$$

Au point x = 1, y = 2 et z = 3, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{3\cdot(1)^2\cdot 3+5\cdot(2)^2-6\cdot 3}{(1)^3-6\cdot 1} \\ &= -\frac{11}{-5} \\ &= \frac{11}{5}\end{aligned}$$

La dérivée partielle par rapport à y est alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \\ &= -\frac{d\left(x^3z+5xy^2-6xz+3y-11\right)/dy}{d\left(x^3z+5xy^2-6xz+3y-11\right)/dz} \\ &= -\frac{10xy+3}{x^3-6x}\end{aligned}$$

Au point x = 1, y = 2 et z = 3, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{10\cdot 1\cdot 2+3}{(1)^3-6\cdot 1} \\ &= -\frac{23}{-5} \\ &= \frac{23}{5}\end{aligned}$$

11.7 On travaille avec la fonction

$$F = xy - \tfrac{\pi}{2} - \arcsin(xyz) + z$$

La dérivée partielle par rapport à x est alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \\
&= -\frac{d\left(xy - \tfrac{\pi}{2} - \arcsin(xyz) + z\right)/dx}{d\left(xy - \tfrac{\pi}{2} - \arcsin(xyz) + z\right)/dz} \\
&= -\frac{y - \frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}}{-\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}} + 1} \\
&= \frac{y\sqrt{1-x^2y^2z^2} - yz}{xy - \sqrt{1-x^2y^2z^2}}
\end{aligned}$$

Au point $x = 1$, $y = -1$ et $z = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-1\cdot\sqrt{1-1^2\cdot(-1)^2\cdot 1^2} - (-1)\cdot 1}{1\cdot(-1) - \sqrt{1-1^2\cdot(-1)^2\cdot 1^2}} \\
&= \frac{-1\cdot 0 + 1}{-1-0} \\
&= -1
\end{aligned}$$

La dérivée partielle par rapport à y est alors

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z}$$
$$= -\frac{d\left(xy - \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(xyz\right) + z\right) / dy}{d\left(xy - \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(xyz\right) + z\right) / dz}$$
$$= -\frac{x - \frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}}{-\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}} + 1}$$
$$= \frac{x\sqrt{1-x^2y^2z^2} - xz}{xy - \sqrt{1-x^2y^2z^2}}$$

Au point $x = 1$, $y = -1$ et $z = 1$, on a

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 \cdot \sqrt{1 - 1^2 \cdot (-1)^2 \cdot 1^2} - (1) \cdot 1}{1 \cdot (-1) - \sqrt{1 - 1^2 \cdot (-1)^2 \cdot 1^2}}$$
$$= \frac{1 \cdot 0 - 1}{-1 - 0}$$
$$= 1$$

11.8 On travaille avec la fonction

$$F = \frac{4xy + 3z}{xz - y} - 1$$

La dérivée partielle par rapport à x est alors

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

$$=-\frac{d\left(\frac{4xy+3z}{xz-y}-1\right)\Big/dx}{d\left(\frac{4xy+3z}{xz-y}-1\right)\Big/dz}$$

$$=-\frac{(4y)(xz-y)^{-1}-(4xy+3z)(xz-y)^{-2}z}{(3)(xz-y)^{-1}-(4xy+3z)(xz-y)^{-2}x}$$

$$=-\frac{(4y)(xz-y)-(4xy+3z)z}{3(xz-y)-(4xy+3z)x}$$

Au point x = -1, y = 2 et z = 3/2, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{(4\cdot 2)\left((-1)\cdot\frac{3}{2}-2\right)-\left(4\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}}{3\left((-1)\cdot\frac{3}{2}-2\right)-\left(4\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot(-1)}$$

$$=-\frac{8\left(-\frac{3}{2}-2\right)-\left(-8+\frac{9}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}}{3\left(-\frac{3}{2}-2\right)+\left(-8+\frac{9}{2}\right)}$$

$$=-\frac{8\left(-\frac{7}{2}\right)-\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}}{3\left(-\frac{7}{2}\right)+\left(-\frac{7}{2}\right)}$$

$$=-\frac{-28+\frac{21}{4}}{-\frac{21}{2}-\frac{7}{2}}$$

$$=-\frac{-112+21}{-42-14}$$

$$=-\frac{-91}{-56}$$

$$=-\frac{13}{8}$$

La dérivée partielle par rapport à y est alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} \\
&= -\frac{d\left(\frac{4xy+3z}{xz-y}-1\right) / dy}{d\left(\frac{4xy+3z}{xz-y}-1\right) / dz} \\
&= -\frac{(4x)(xz-y)^{-1}-(4xy+3z)(xz-y)^{-2}(-1)}{(3)(xz-y)^{-1}-(4xy+3z)(xz-y)^{-2}x} \\
&= -\frac{(4x)(xz-y)+(4xy+3z)}{3(xz-y)-(4xy+3z)x}
\end{aligned}$$

Au point x = -1, y = 2 et z = 3/2, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{(4\cdot(-1))\left((-1)\cdot\frac{3}{2}-2\right)+\left(4\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot\frac{3}{2}\right)}{3\left((-1)\cdot\frac{3}{2}-2\right)-\left(4\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot(-1)} \\
&= -\frac{-4\cdot\left(-\frac{3}{2}-2\right)+\left(-8+\frac{9}{2}\right)}{3\left(-\frac{3}{2}-2\right)+\left(-8+\frac{9}{2}\right)} \\
&= -\frac{-4\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)+\left(-\frac{7}{2}\right)}{3\left(-\frac{7}{2}\right)+\left(-\frac{7}{2}\right)} \\
&= -\frac{14-\frac{7}{2}}{-\frac{21}{2}-\frac{7}{2}} \\
&= -\frac{28-7}{-21-7} \\
&= -\frac{21}{-28} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

11.9 Pour calculer

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

On a besoin des dérivées. Pour trouver ces dérivées, on travaille avec la fonction

$$F = x^2 y + yz^2 + zy^2 - 3$$

La dérivée par rapport à x est alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} \\ &= -\frac{d\left(x^2 y + yz^2 + zy^2 - 3\right) / dx}{d\left(x^2 y + yz^2 + zy^2 - 3\right) / dz} \\ &= -\frac{2xy}{2yz + y^2}\end{aligned}$$

Au point $x = 1$, $y = 1$ et $z = 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2} \\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

La dérivée par rapport à y est alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} \\ &= -\frac{d\left(x^2 y + yz^2 + zy^2 - 3\right) / dy}{d\left(x^2 y + yz^2 + zy^2 - 3\right) / dz} \\ &= -\frac{x^2 + z^2 + 2zy}{2yz + y^2}\end{aligned}$$

Au point $x = 1$, $y = 1$ et $z = 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1^2+1^2+2\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1+1^2} \\ &= -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

On a donc

$$\Delta z \approx -\frac{2}{3}\Delta x - \frac{4}{3}\Delta y$$

Puisque Δx = 0,01 et Δy = -0,01, on a

$$\begin{aligned}\Delta z &\approx -\frac{2}{3}\cdot 0,01 - \frac{4}{3}\cdot(-0,01) \\ &\approx -\frac{2}{300}+\frac{4}{300} \\ &\approx \frac{1}{150}\end{aligned}$$

11.10 Pour calculer

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

On a besoin des dérivées. Pour trouver ces dérivées, on travaille avec la fonction

$$F = 6ze^{z-1} - xy$$

La dérivée par rapport à x est alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} \\ &= -\frac{\partial\left(6ze^{z-1} - xy\right) / \partial x}{\partial\left(x^2 y + yz^2 + zy^2 - 3\right) / \partial z} \\ &= -\frac{-y}{6e^{z-1} + 6ze^{z-1}} \\ &= \frac{y}{6e^{z-1} + 6ze^{z-1}}\end{aligned}$$

Au point $x = 2$, $y = 3$ et $z = 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{3}{6e^{1-1} + 6 \cdot 1 \cdot e^{1-1}} \\ &= \frac{3}{6+6} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

La dérivée par rapport à y est alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} \\ &= -\frac{\partial\left(6ze^{z-1} - xy\right) / \partial x}{\partial\left(x^2 y + yz^2 + zy^2 - 3\right) / \partial z} \\ &= -\frac{-x}{6e^{z-1} + 6ze^{z-1}} \\ &= \frac{x}{6e^{z-1} + 6ze^{z-1}}\end{aligned}$$

Au point $x = 2$, $y = 3$ et $z = 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2}{6e^{1-1}+6\cdot 1\cdot e^{1-1}}\\ &= \frac{2}{6+6}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

On a donc

$$\Delta z \approx \frac{1}{4}\Delta x+\frac{1}{6}\Delta y$$

Puisque $\Delta x = 0{,}02$ et $\Delta y = 0{,}03$, on a

$$\begin{aligned}\Delta z &\approx \frac{1}{4}\cdot 0{,}02+\frac{1}{6}\cdot 0{,}03\\ &\approx 0{,}01\end{aligned}$$

12.1

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}\\ &= 3u^2(-1)(x+1)^{-2}+(-3v^2)\left((x+1)^{-1}-x(x+1)^{-2}\right)\\ &= \frac{-3u^2}{(x+1)^2}-3v^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x}{(x+1)^2}\right)\\ &= \frac{-3u^2}{(x+1)^2}-3v^2\left(\frac{x+1}{(x+1)^2}-\frac{x}{(x+1)^2}\right)\\ &= -\frac{3u^2}{(x+1)^2}-\frac{3v^2}{(x+1)^2}\\ &= -\frac{3u^2+3v^2}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Quand $x = 2$, on a

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{x+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}\\ v &= \frac{x}{x+1}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

La dérivée est donc

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx}&=-\frac{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(2+1\right)^2}\\&=-\frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{9}\\&=-\frac{5}{27}\end{aligned}$$

12.2

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx}&=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{dr}{dx}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{ds}{dx}\\&=\frac{1}{r+s}\left(-1\right)e^{-x}+\frac{1}{r+s}\left(3x^2-2x\right)\\&=\frac{-e^{-x}+3x^2-2x}{r+s}\end{aligned}$$

Quand $x=4$, on a

$$r=e^{-4}$$
$$s=4^3-4^2=48$$

La dérivée est donc

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx}&=\frac{-e^{-4}+3\cdot 4^2-2\cdot 4}{e^{-4}+48}\\&=\frac{40-e^{-4}}{e^{-4}+48}\\&\approx 0,832634\end{aligned}$$

12.3

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial p}\frac{dp}{dx}+\frac{\partial z}{\partial q}\frac{dq}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}\\ &= 2p\left(-2\cos x\sin x\right)-\tan w\left(\cos x\right)-q\sec^2 w\left(2\right)\\ &= -4p\cos x\sin x-\tan w\cos x-2q\sec^2 w\end{aligned}$$

Quand $x = 4$, on a

$$\begin{aligned}p &= \cos^2\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{3}{4}\\ q &= \sin\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{1}{2}\\ w &= 2\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{\pi}{3}\end{aligned}$$

La dérivée est donc

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= -4\frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-2\frac{1}{2}\sec^2\frac{\pi}{3}\\ &= -4\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}-\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}-2\frac{1}{2}4\\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{2}-4\\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{11}{2}\\ &\approx -6,799\end{aligned}$$

12.4 Ici, on veut dA/dt. Ce taux de variation est

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial b}\frac{db}{dt}+\frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

On a donc

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}h\left(-2\tfrac{m}{s}\right)+\frac{1}{2}b\left(4\tfrac{m}{s}t\right)$$

Quand $t = 1$ s, on a

$$\begin{aligned}b &= 5m-2\tfrac{m}{s}\cdot 1s=3m\\ h &= 5m+2\tfrac{m}{s}\cdot\left(1s\right)^2=7m\end{aligned}$$

La dérivée est donc

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2}\cdot 7m\left(-2\tfrac{m}{s}\right)+\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot\left(4\tfrac{m}{s}\cdot 1s\right)\\ &= -7\tfrac{m^2}{s}+6\tfrac{m^2}{s}\\ &= -1\tfrac{m^2}{s}\end{aligned}$$

12.5 Ici, on veut dT/dt. Ce taux de variation est

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial P}\frac{dP}{dt}+\frac{\partial T}{\partial V}\frac{dV}{dt}$$

On a donc

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{70\frac{J}{K}}V\left(\frac{100kPa}{10s}\cdot e^{t/10s}\right)+\frac{1}{70\frac{J}{K}}P\left(-\frac{5m^3}{2s^{-1}t^2}\right)$$

Quand t = 10 s, on a

$$\begin{aligned}P &= 100kPa\cdot e^{10s/10s}=100kPa\cdot e\\ V &= \frac{5m^3}{2s^{-1}\cdot 10s}=0,25m^3\end{aligned}$$

La dérivée est donc

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{70\frac{J}{K}}\cdot 0,25m^3\cdot\left(\frac{100kPa}{10s}\cdot e^{10s/10s}\right)+\frac{1}{70\frac{J}{K}}100kPa\cdot e\cdot\left(-\frac{5m^3}{2s^{-1}\cdot(10s)^2}\right)\\ &= \frac{1}{70\frac{J}{K}}\cdot 0,25m^3\cdot\left(\frac{100kPa}{10s}\cdot e\right)+\frac{1}{70\frac{J}{K}}100kPa\cdot e\cdot\left(-\frac{5m^3}{200s}\right)\\ &= \frac{100kPa\cdot e}{70\frac{J}{K}}\left(\frac{0,25m^3}{10s}-\frac{5m^3}{200s}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

12.6

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= \cos v(2x)-u\sin v(y)\\ &= 2x\cos v-uy\sin v\end{aligned}$$

Quand $x = 1$ et $y = 0$, on a

$$\begin{aligned}u &= 1^2+0^2=1\\ v &= 1\cdot 0\end{aligned}$$

La dérivée partielle par rapport à x est donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2\cdot 1\cos 0-1\cdot 0\cdot\sin 0\\ &= 2\end{aligned}$$

Pour la dérivée partielle par rapport à y, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= \cos v(2y)-u\sin v(x)\\ &= 2y\cos v-ux\sin v\\ &= 2\cdot 0\cdot\cos 0-1\cdot 1\cdot\sin 0\\ &= 0\end{aligned}$$

12.7

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\\ &= (s+3)(1)+(r+4)(\cosh x)\end{aligned}$$

Quand $x = 0$ et $y = 0$, on a

$$\begin{aligned}r &= 0+\sinh 0=0\\ s &= 3\cdot 0+\sinh 0=0\end{aligned}$$

La dérivée partielle par rapport à x est donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= (0+3)(1)+(0+4)(\cosh 0)\\ &= 7\end{aligned}$$

Pour la dérivée partielle par rapport à *y,* on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} \\ &= (s+3)(\cosh y) + (r+4)(3) \\ &= (0+3)(\cosh 0) + (0+4)(3) \\ &= 15\end{aligned}$$

12.8

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} \\ &= qe^{pq}(2) + pe^{pq}(3y+2)\end{aligned}$$

Quand $x = 0$ et $y = 0$, on a

$$\begin{gathered}p = 2\cdot 0 + 0 - 1 = -1 \\ q = 3\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 0 - 3\cdot 0 - 2 = -2\end{gathered}$$

La dérivée partielle par rapport à *x* est donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -2\cdot e^{-1\cdot -2}(2) + -1e^{-1\cdot -2}(3\cdot 0 + 2) \\ &= -4\cdot e^{2} - 2e^{2} \\ &= -6e^{2} \\ &\approx -44,33\end{aligned}$$

Pour la dérivée partielle par rapport à *y,* on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} \\ &= qe^{pq}(1) + pe^{pq}(3x-3) \\ &= -2\cdot e^{-1\cdot -2}(1) + -1\cdot e^{-1\cdot -2}(3\cdot 0 - 3) \\ &= -2\cdot e^{2} + 3e^{2} \\ &= e^{2} \\ &\approx 7,389\end{aligned}$$

12.9

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\\ &= \left(3u^2\right)\left(e^y\right)+\left(1\right)ye^x+\left(2w\right)y^2\end{aligned}$$

Quand $x = 1$ et $y = 2$, on a

$$\begin{aligned}u &= xe^y = 1e^2 = e^2\\ v &= ye^x = 2e^1 = 2e\\ w &= xy^2 = 1\cdot 2^2 = 4\end{aligned}$$

La dérivée partielle par rapport à x est donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(3e^4\right)\left(e^2\right)+\left(1\right)2\cdot e^1+\left(2\cdot 4\right)\cdot 2^2\\ &= 3e^6+2\cdot e+32\\ &\approx 1247,7\end{aligned}$$

Pour la dérivée partielle par rapport à y, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\\ &= \left(3u^2\right)\left(xe^y\right)+\left(1\right)e^x+\left(2w\right)2xy\\ &= 3e^4\cdot 1\cdot e^2+e^1+\left(2\cdot 4\right)\cdot 2\cdot 1\cdot 2\\ &= 3e^6+e+32\\ &\approx 1245,0\end{aligned}$$

12.10 La composante en x de la force est

$$\begin{aligned}-\frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\\ &= -\left(-\frac{2\cdot 1500Jm^2}{r^3}\sin 2\theta\right)\left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x\right)\right)-\left(\frac{2\cdot 1500Jm^2}{r^2}\cos 2\theta\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{-y}{x^2}\right)\\ &= \left(\frac{3000Jm^2}{r^3}\sin 2\theta\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\left(\frac{3000Jm^2}{r^2}\cos 2\theta\right)\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

Quand x = 3 m et y = 4 m, on a

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3m)^2 + (4m)^2} = 5m$$
$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{4}{3} = 0,9273rad$$

La force est donc

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial U}{\partial x} &= \left(\frac{3000Jm^2}{(5m)^3}\sin 2\cdot 0,9273\right)\left(\frac{3m}{5m}\right) + \left(\frac{3000Jm^2}{(5m)^2}\cos 2\cdot 0,9273\right)\left(\frac{4m}{(3m)^2+(4m)^2}\right) \\
&= \left(\frac{3000Jm^2}{125m^3}\frac{24}{25}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3000Jm^2}{25m^2}\cdot\frac{-7}{25}\right)\left(\frac{4}{25m}\right) \\
&= \frac{1728}{125}N - \frac{672}{125}N \\
&= \frac{1056}{125}N \\
&= 8,448N
\end{aligned}$$

Pour la composante en y de la force, on a

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \\
&= -\left(-\frac{2\cdot 1500Jm^2}{r^3}\sin 2\theta\right)\left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2y)\right) - \left(\frac{2\cdot 1500Jm^2}{r^2}\cos 2\theta\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}\right) \\
&= \left(\frac{3000Jm^2}{r^3}\sin 2\theta\right)\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \left(\frac{3000Jm^2}{r^2}\cos 2\theta\right)\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)
\end{aligned}$$

Avec les valeurs, on a

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial U}{\partial y} &= \left(\frac{3000Jm^2}{(5m)^3}\sin 2\cdot 0,9273\right)\left(\frac{4m}{5m}\right)-\left(\frac{3000Jm^2}{(5m)^2}\cos 2\cdot 0,9273\right)\left(\frac{3m}{(3m)^2+(4m)^2}\right)\\
&= \left(\frac{3000Jm^2}{125m^3}\frac{24}{25}\right)\left(\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{3000Jm^2}{25m^2}\cdot\frac{-7}{25}\right)\left(\frac{3}{25m}\right)\\
&= \frac{2304}{125}N+\frac{504}{125}N\\
&= \frac{2808}{125}N\\
&= 22,464N
\end{aligned}$$

12.11 On a premièrement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\
&= \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta
\end{aligned}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\\
&= \frac{\partial w}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial w}{\partial y}(r\cos\theta)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial w}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial w}{\partial y}y\cos\theta\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta \\
&\qquad +\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta-2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta \\
&= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta \\
&= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) \\
&= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

13.1 Trouvons premièrement les points critiques.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0$$
$$2x+3=0$$
$$x=-\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=0$$
$$8y-2=0$$
$$y=\frac{1}{4}$$

Le seul point critique est donc à (-3/2, 1/4)

Les deuxièmes dérivées sont

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 8$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Au point critique, on a donc $A = 2$, $B = 8$ et $C = 0$.

Ainsi

$$AB - C^2 = 2 \cdot 8 - 0 = 16$$

Comme la valeur est positive et que A et B sont positifs, on a un minimum au point (-3/2, 1/4).

13.2 Trouvons premièrement les points critiques. Les dérivées donnent

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
$$2x - 4y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
$$-4x + 3y^2 + 4 = 0$$

Avec la première équation, on trouve que $x = 2y$. La deuxième équation nous donne alors

$$-8y + 3y^2 + 4 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $y = 2$ et $y = 2/3$.

Si $y = 2$, alors $x = 4$. On a donc un point critique à (4,2).

Si $y = 2/3$, alors $x = 4/3$. On a donc un point critique à (4/3,2/3).

Les deuxièmes dérivées sont

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4$$

Au point critique (4,2), on a donc A = 2, B = 12 et C = -4. Ainsi

$$AB - C^2 = 2 \cdot 12 - (-4)^2 = 8$$

Comme la valeur est positive et que A et B sont positifs, on a un minimum au point (2, 4).

Au point critique (4/3, 2/3), on a donc A = 2, B = 4 et C = -4. Ainsi

$$AB - C^2 = 2 \cdot 4 - (-4)^2 = -8$$

Comme la valeur est négative, on a un point de selle au point (4/3, 2/3).

13.3 Trouvons premièrement les points critiques. Les dérivées donnent

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
$$-4x + 4 = 0$$
$$x = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
$$-2y + 3 = 0$$
$$y = \frac{3}{2}$$

On a donc un point critique à (1, 3/2).

Les deuxièmes dérivées sont

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Au point critique (1, 3/2), on a donc A = -4, B = -2 et C = 0. Ainsi

$$AB - C^2 = -4 \cdot -2 - (0)^2 = 8$$

Comme la valeur est positive et que A et B sont négatifs, on a un maximum au point (1, 3/2).

13.4 Trouvons premièrement les points critiques. Les dérivées donnent

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
$$3x^2 + 3y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
$$3x - 3y^2 = 0$$

Avec la première équation, on trouve que $x^2 = -y$. En remplaçant dans la deuxième équation, on a

$$3x - 3x^4 = 0$$
$$3x\left(1 - x^3\right) = 0$$

Les solutions de cette équation sont $x = 0$ et $x = 1$.

Si $x = 0$, alors $y = 0$. On a donc un point critique à (0,0).

Si $x = 1$, alors $y = -1$. On a donc un point critique à (1,-1).

Les deuxièmes dérivées sont

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3$$

Au point critique (0,0), on a donc A = 0, B = 0 et C = 3. Ainsi

$$AB - C^2 = 0 \cdot 0 - (3)^2 = -9$$

Comme la valeur est négative, on a un point de selle au point (0, 0).

Au point critique (1, -1), on a donc A = 6, B = 6 et C = 6. Ainsi

$$AB - C^2 = 6 \cdot 6 - (3)^2 = 27$$

Comme la valeur est positive et que A et B sont positifs, on a un minimum au point (1, -1).

13.5 Trouvons premièrement les points critiques. Les dérivées donnent

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
$$4x^3 + 32 = 0$$
$$x = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
$$3y^2 - 27 = 0$$
$$y = \pm 3$$

On a donc des points critiques à (-2,3) et (-2,-3).

Les deuxièmes dérivées sont

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Au point critique (-2,3), on a donc A = 48, B = 18 et C = 0. Ainsi

$$AB - C^2 = 48 \cdot 18 - (0)^2 = 864$$

Comme la valeur est positive et que A et B sont positifs, on a un minimum au point (-2, 3).

Au point critique (-2, -3), on a donc A = 48, B = -18 et C = 0. Ainsi

$$AB - C^2 = 48 \cdot -18 - (0)^2 = -864$$

Comme la valeur est négative, on a un point de selle au point (-2, -3).

13.6 Trouvons premièrement les points critiques. Les dérivées donnent

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$-10\left(x^2 + y^2 + 1\right)^{-1} - -10x\left(x^2 + y^2 + 1\right)^{-2} 2x = 0$$

$$-\frac{10}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{20x^2}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2} = 0$$

$$\frac{-10\left(x^2 + y^2 + 1\right) + 20x^2}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2} = 0$$

$$\frac{-10\left(x^2 + y^2 + 1\right) + 20x^2}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2} = 0$$

$$\frac{10\left(x^2 - y^2 - 1\right)}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2} = 0$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$10x\left(x^2 + y^2 + 1\right)^{-2} 2y = 0$$

$$\frac{20xy}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2} = 0$$

Cette dernière équation a pour solution $y = 0$. En utilisant cette valeur dans la première équation, on a

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

On a donc des points critiques à (1,0) et (-1,0)

Les deuxièmes dérivées sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{10\left(x^2 - y^2 - 1\right)}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2}\right) \\
&= 20x\left(x^2 + y^2 + 1\right)^{-2} - 20\left(x^2 - y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 + 1\right)^{-3} 2x \\
&= \frac{20x}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2} - \frac{40x\left(x^2 - y^2 - 1\right)}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^3} \\
&= \frac{20x}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2}\left(1 - \frac{2x^2 - 2y^2 - 2}{x^2 + y^2 + 1}\right) \\
&= \frac{20x}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2}\left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2x^2 - 2y^2 - 2}{x^2 + y^2 + 1}\right) \\
&= \frac{20x}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2}\left(\frac{-x^2 + 3y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 1}\right) \\
&= \frac{20x\left(-x^2 + 3y^2 + 3\right)}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{20xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\right) \\
&= 20x\left(x^2+y^2+1\right)^{-2} - 40xy\left(x^2+y^2+1\right)^{3} 2y \\
&= \frac{20x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} - \frac{80xy^2}{\left(x^2+y^2+1\right)^3} \\
&= \frac{20x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\left(1-\frac{4y^2}{x^2+y^2+1}\right) \\
&= \frac{20x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\left(\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2+1}-\frac{4y^2}{x^2+y^2+1}\right) \\
&= \frac{20x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\left(\frac{x^2-3y^2+1}{x^2+y^2+1}\right) \\
&= \frac{20x\left(x^2-3y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-20xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\right) \\
&= -20y\left(x^2+y^2+1\right)^{-2} + 40xy\left(x^2+y^2+1\right)^{3} 2x \\
&= \frac{-20y}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} + \frac{80x^2y}{\left(x^2+y^2+1\right)^3} \\
&= \frac{-20y}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\left(1-\frac{4x^2}{x^2+y^2+1}\right) \\
&= \frac{-20y}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\left(\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2+1}-\frac{4x^2}{x^2+y^2+1}\right) \\
&= \frac{-20y}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\left(\frac{-3x^2+y^2+1}{x^2+y^2+1}\right) \\
&= \frac{-20y\left(-3x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^3}
\end{aligned}$$

Au point critique (1,0), on a donc $A = 5$, $B = 5$ et $C = 0$. Ainsi

$$AB - C^2 = 5 \cdot -5 - (0)^2 = 25$$

Comme la valeur est positive et que A et B sont positifs, on a un minimum au point (1, 0).

Au point critique (-1, 0), on a donc A = -5, B = -5 et C = 0. Ainsi

$$AB - C^2 = -5 \cdot -5 - (0)^2 = 25$$

Comme la valeur est positive et que A et B sont négatifs, on a un maximum au point (-1, 0).

13.7 On veut la valeur maximale de la fonction $f = xyz$ tout en respectant la condition $x + y + z = 54$. Cela signifie que la fonction est

$$\begin{aligned} f &= xy(54 - x - y) \\ &= 54xy - x^2y - xy^2 \end{aligned}$$

Trouvons les valeurs de x et y qui maximise cette fonction. Trouvons premièrement les points critiques. Les dérivées donnent

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ 54y - 2xy - y^2 &= 0 \\ 54 - 2x - y &= 0 \\ 54 - 2x &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ 54x - x^2 - 2xy &= 0 \\ 54 - x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

En utilisant ce que la première équation nous a donné, on a

$$\begin{aligned} 54 - x - 2(54 - 2x) &= 0 \\ 54 - x - 108 + 4x &= 0 \\ -54 + 3x &= 0 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

De là, on trouve (en utilisant encore le résultat de la première équation) que

$$54-2\cdot 18=y$$
$$y=18$$

On a donc un point critique à (18,18). Vérifions si on a bel et bien un maximum de la fonction

Les deuxièmes dérivées sont

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1$$

Au point critique (18,18), on a

$$AB-C^2=-2\cdot -2-(-1)^2=3$$

Comme la valeur est positive et que A et B sont négatifs, on a un maximum au point (18, 18).

Notre maximum est donc à x = 18 et y = 18. La valeur de z est alors

$$\begin{aligned} z &= 54-x-y \\ &= 54-18-18 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Nos trois nombres sont donc 18, 18 et 18.

13.8 La distance entre un point d'un plan et l'origine est

$$s=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

On va se simplifier la vie une peu en prenant comme fonction

$$f=x^2+y^2+z^2$$

Si f est à un minimum, s l'est aussi.

Puisque le point est sur le plan

$$3x+2y+4z-1=0$$
$$z=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y$$

notre fonction est

$$f=x^2+y^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y\right)^2$$

Trouvons les points critiques. Les dérivées donnent

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0$$
$$2x+2\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y\right)\left(-\frac{3}{4}\right)=0$$
$$2x-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y\right)=0$$
$$2x-\frac{3}{8}+\frac{9}{8}x+\frac{3}{4}y=0$$
$$16x-3+9x+6y=0$$
$$25x+6y-3=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0$$
$$2y+2\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$
$$2y-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y\right)=0$$
$$2y-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}y=0$$
$$8y-1+3x+2y=0$$
$$3x+10y-1=0$$

On a donc les deux équations suivantes.

$$25x+6y-3=0$$
$$3x+10y-1=0$$

Si on multiplie la première équation par 5 et la deuxième par -3, on a

$$\begin{gathered}125x+30y-15=0\\-9x-30y+3=0\end{gathered}$$

Si on additionne alors les équations, on a

$$\begin{gathered}116x-12=0\\x=\frac{3}{29}\end{gathered}$$

La valeur de y est donc

$$\begin{gathered}3x+10y-1=0\\3\cdot\frac{3}{29}+10y-1=0\\3\cdot3+10\cdot29y-29=0\\9+290y-29=0\\290y=20\\y=\frac{2}{29}\end{gathered}$$

La valeur de z est alors

$$\begin{gathered}3x+2y+4z-1=0\\3\cdot\frac{3}{29}+2\cdot\frac{2}{29}+4z-1=0\\3\cdot3+2\cdot2+4\cdot29z-29=0\\4\cdot29z=16\\z=\frac{4}{29}\end{gathered}$$

Le point est donc (3/29, 2/29, 4/29).

13.9 Le cout de la boite est

$$C=1,5\cdot2xy+2yz+2xz$$

Mais comme on doit avoir que xyz = 300 cm³, la fonction est

$$C = 3xy + \frac{600cm^3 y}{xy} + \frac{600cm^3 x}{xy}$$
$$C = 3xy + \frac{600cm^3}{x} + \frac{600cm^3}{y}$$

Trouvons les points critiques de cette fonction

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0$$
$$3y - \frac{600cm^3}{x^2} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0$$
$$3x - \frac{600cm^3}{y^2} = 0$$

La 2e équation donne

$$x = \frac{200cm^3}{y^2}$$

En remplaçant dans la 1re équation, on a

$$3y - \frac{600cm^3}{\left(200cm^3\right)^2} y^4 = 0$$
$$3y = \frac{600cm^3}{\left(200cm^3\right)^2} y^4$$
$$y = \frac{200cm^3}{\left(200cm^3\right)^2} y^4$$
$$1 = \frac{200cm^3}{\left(200cm^3\right)^2} y^3$$
$$200cm^3 = y^3$$
$$y = \sqrt[3]{200cm^3} \approx 5,848cm$$

La valeur de x est donc

$$x = \frac{200cm^3}{y^2}$$
$$= \frac{200cm^3}{\left(200cm^3\right)^{2/3}}$$
$$= \sqrt[3]{200cm^3} \approx 5,848cm$$

La valeur de z est alors

$$xyz = 300cm^3$$
$$\left(200cm^3\right)^{1/3} \cdot \left(200cm^3\right)^{1/3} \cdot z = 300cm^3$$
$$z = \frac{300cm^3}{\left(200cm^3\right)^{2/3}} \approx 8.772cm$$

Il faudrait vérifier qu'on a bel et bien un minimum du cout de la boite. Les deuxièmes dérivées sont

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1200cm^3}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{1200cm^3}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = 3$$

Quand x et y valent 5,848 cm, on a A = 6, B = 6 et C = 3. On a donc

$$AB - C^2 = 6 \cdot 6 - (3)^2 = 27$$

Comme la valeur est positive et que A et B sont positifs, on a un minimum.

14.1 Dans ce cas, les équations

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y}\\ g &= 0\end{aligned}$$

sont

$$\begin{aligned}2x &= \lambda \cdot 2\\ 2y &= \lambda \cdot 3\\ 2x+3y-4 &= 0\end{aligned}$$

La première équation donne

$$x = \lambda$$

Avec cette valeur, la deuxième équation donne

$$2y = 3x$$

En utilisant cette valeur dans la 3^{e} équation, on a

$$\begin{aligned}2x+3y-4 &= 0\\ 2x+3\tfrac{3}{2}x-4 &= 0\\ 4x+9x-8 &= 0\\ x &= \tfrac{8}{13}\end{aligned}$$

De là, on trouve que

$$\begin{aligned}2y &= 3x\\ 2y &= 3\tfrac{8}{13}\\ y &= \tfrac{12}{13}\end{aligned}$$

La solution est donc

$$x = \tfrac{8}{13} \qquad y = \tfrac{12}{13}$$

La fonction vaut alors

$$\begin{aligned} f &= x^2 + y^2 \\ &= \left(\tfrac{8}{13}\right)^2 + \left(\tfrac{12}{13}\right)^2 \\ &= \tfrac{208}{169} \\ &= \tfrac{16}{13} \end{aligned}$$

Pour savoir si c'est un maximum ou un minimum, calculons la valeur de la fonction ailleurs en suivant la contrainte.

$$2x + 3y - 4 = 0$$

Par exemple, on peut calculer la valeur de la fonction à (2,0). À ce point, la valeur est

$$\begin{aligned} f &= x^2 + y^2 \\ &= (2)^2 + (0)^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Comme cette valeur est plus grande, on a un minimum au point (8/13, 12/13). La fonction vaut alors 16/13.

14.2 Dans ce cas, les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g &= 0 \end{aligned}$$

sont

$$\begin{aligned} 4x + y &= \lambda \cdot 2 \\ x - 2y + 1 &= \lambda \cdot 3 \\ 2x + 3y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

On peut écrire les deux premières équations sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} 12x + 3y &= \lambda \cdot 6 \\ 2x - 4y + 2 &= \lambda \cdot 6 \end{aligned}$$

Cela signifie que

$$\begin{gathered}12x+3y=2x-4y+2\\10x+7y=2\end{gathered}$$

On a alors les 2 équations suivantes

$$10x+7y=2 \qquad 2x+3y-1=0$$

On peut alors écrire

$$\begin{gathered}10x+7y=2\\10x+15y=5\end{gathered}$$

En soustrayant ces équations, on a

$$\begin{gathered}-8y=-3\\y=\tfrac{3}{8}\end{gathered}$$

Alors, x est

$$\begin{gathered}2x+3y-1=0\\2x+3\cdot\tfrac{3}{8}-1=0\\16x+9-8=0\\x=-\tfrac{1}{16}\end{gathered}$$

Les solutions sont donc

$$x=-\tfrac{1}{16} \qquad y=\tfrac{3}{8}$$

La fonction vaut alors

$$\begin{aligned}f&=2x^2+xy-y^2+y\\&=2\cdot\left(-\tfrac{1}{16}\right)^2+\left(-\tfrac{1}{16}\right)\cdot\tfrac{3}{8}-\left(\tfrac{3}{8}\right)^2+\tfrac{3}{8}\\&=\tfrac{1}{128}-\tfrac{3}{128}-\tfrac{9}{64}+\tfrac{3}{8}\\&=\tfrac{7}{32}\end{aligned}$$

Pour savoir si c'est un maximum ou un minimum, calculons la valeur de la fonction ailleurs en suivant la contrainte.

$$2x+3y-1=0$$

Par exemple, on peut calculer la valeur de la fonction à (½, 0). À ce point, la valeur est

$$\begin{aligned} f &= 2x^2 + xy - y^2 + y \\ &= 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot 0 - (0)^2 + 0 \\ &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Comme cette valeur est plus grande, on a un minimum au point (-1/16, 3/8). La fonction vaut alors 7/32.

14.3 Dans ce cas, les équations

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g = 0 \end{gathered}$$

sont

$$\begin{gathered} -4y + 8x = \lambda \cdot 2x \\ 2y - 4x = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{gathered}$$

On peut écrire les deux premières équations sous la forme suivante.

$$\begin{gathered} -4y^2 + 8xy = \lambda \cdot 2xy \\ 2yx - 4x^2 = \lambda \cdot 2xy \end{gathered}$$

Cela signifie que

$$\begin{gathered} -4y^2 + 8xy = 2yx - 4x^2 \\ -4y^2 + 6xy + 4x^2 = 0 \\ -2y^2 + 3xy + 2x^2 = 0 \end{gathered}$$

On a alors les 2 équations suivantes

$$-2y^2 + 3xy + 2x^2 = 0 \qquad x^2 + y^2 = 1$$

La deuxième donne

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

En remplaçant dans la 1[re] équation, on arrive à

$$\begin{gathered}
-2\left(1-x^2\right) \pm 3x\sqrt{1-x^2} + 2x^2 = 0 \\
-2 + 2x^2 \pm 3x\sqrt{1-x^2} + 2x^2 = 0 \\
-2 + 4x^2 \pm 3x\sqrt{1-x^2} = 0 \\
-2 + 4x^2 = \pm 3x\sqrt{1-x^2} \\
\left(-2+4x^2\right)^2 = 9x^2\left(1-x^2\right) \\
4 - 16x^2 + 16x^4 = 9x^2 - 9x^4 \\
4 - 25x^2 + 25x^4 = 0
\end{gathered}$$

Les solutions de cette équation quadratique sont

$$x^2 = \tfrac{1}{5} \quad \text{et} \quad x^2 = \tfrac{4}{5}$$

Avec la première solution, on a

$$x^2 = \frac{1}{5}$$

Ce qui signifie que y est alors

$$\begin{aligned}
y^2 &= 1 - x^2 \\
y^2 &= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

On a alors 4 points

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Avec la deuxième solution, on a

$$x^2 = \frac{4}{5}$$

Ce qui signifie que y est alors

$$y^2 = 1 - x^2$$
$$y^2 = \frac{1}{5}$$

On a alors 4 points

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Pour savoir si c'est des maximums ou des minimums, calculons la valeur de la fonction à ces points en suivant la contrainte.

$$x^2 + y^2 = 1$$

Tous ces points sont sur un cercle de rayon 1 (c'est la contrainte). Voici les valeurs de la fonction qu'on a en tournant sur ce cercle dans le sens contraire des aiguilles d'une montre en partant du point (1,0).

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \rightarrow f = \frac{9}{5}$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \rightarrow f = 0$$
$$\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \rightarrow f = \frac{16}{5}$$
$$\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \rightarrow f = 25$$
$$\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \rightarrow f = \frac{9}{5}$$
$$\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \rightarrow f = 0$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \rightarrow f = \frac{16}{5}$$
$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \rightarrow f = 25$$

On voit alors qu'il y a deux maximums et minimums.

$$Minimum:\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\text{ La fonction vaut alors 0}$$
$$Maximum:\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\text{ La fonction vaut alors 25}$$

14.4 Dans ce cas, les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}$$
$$g=0$$

sont

$$2x=\lambda\cdot 1$$
$$2y=\lambda\cdot 1$$
$$2x=\lambda\cdot 1$$
$$x+y+z-24=0$$

Les trois premières équations indiquent que

$$x=y=z$$

Cela signifie que

$$x+y+z-24=0$$
$$x+x+x-24=0$$
$$3x-24=0$$
$$x=8$$

La solution est donc

$$x=8$$
$$y=8$$
$$z=8$$

La fonction vaut alors

$$\begin{aligned} f &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= 8^2 + 8^2 + 8^2 \\ &= 192 \end{aligned}$$

Pour savoir si c'est un maximum ou un minimum, calculons la valeur de la fonction ailleurs en suivant la contrainte.

$$x + y + z - 24 = 0$$

Par exemple, on peut calculer la valeur de la fonction à (7, 9, 8). À ce point, la valeur est

$$\begin{aligned} f &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= 7^2 + 9^2 + 8^2 \\ &= 194 \end{aligned}$$

Comme cette valeur est plus grande, on a un minimum au point (8, 8, 8).

14.5 Dans ce cas, les équations

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g = 0 \end{gathered}$$

sont

$$\begin{gathered} yz = \lambda \cdot 2x \\ xz = \lambda \cdot 2y \\ xy = \lambda \cdot 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \end{gathered}$$

Pour résoudre, on va écrire les 3 premières équations sous la forme suivante

$$\begin{gathered} xyz = \lambda \cdot 2x^2 \\ xyz = \lambda \cdot 2y^2 \\ xyz = \lambda \cdot 2z^2 \end{gathered}$$

Ces trois équations indiquent que

$$x^2 = y^2 = z^2$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 3 &= 0 \\ x^2 + x^2 + x^2 - 3 &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ x^2 &= 1 \end{aligned}$$

La solution est donc

$$\begin{aligned} x &= \pm 1 \\ y &= \pm 1 \\ z &= \pm 1 \end{aligned}$$

On a donc les 8 points suivants.

(1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1), (1,-1,-1), (-1,1,1), (-1,1,-1) (-1,-1,1), (-1,-1,-1),

Pour savoir si ce sont des maximums ou des minimums, calculons la valeur de la fonction à ces points.

$$\begin{aligned} &(1,1,1) \to f = 1 \\ &(1,1,-1) \to f = -1 \\ &(1,-1,1) \to f = -1 \\ &(1,-1,-1) \to f = 1 \\ &(-1,1,1) \to f = -1 \\ &(-1,1,-1) \to f = 1 \\ &(-1,-1,1) \to f = 1 \\ &(-1,-1,-1) \to f = -1 \end{aligned}$$

On a donc des maximums à (1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1) et (-1,-1,1). La fonction vaut alors 1.

On a donc des minimums à (1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1) et (-1,-1,-1). La fonction vaut alors -1.

14.6 La distance entre un point quelconque (x, y) et le point (2,3) est

$$d=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

Il faut donc trouver le minimum de cette fonction. En fait, les maximums et minimums de d sont à la même place que deux de d^2. On peut donc, pour nous simplifier la vie, travailler avec la fonction

$$f=(x-2)^2+(y-3)^2$$

On va donc chercher le minimum de cette fonction tout en restant sur le cercle, donc tout en respectant la condition suivante.

$$g=x^2+y^2-4=0$$

Ainsi, les équations

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}\\ g=0\end{gathered}$$

sont

$$\begin{gathered}2(x-2)=\lambda\cdot 2x\\ 2(y-3)=\lambda\cdot 2y\\ x^2+y^2-4=0\end{gathered}$$

On peut écrire les deux premières équations sous la forme suivante

$$\begin{gathered}2y(x-2)=\lambda\cdot 2xy\\ 2x(y-3)=\lambda\cdot 2xy\end{gathered}$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned} 2y(x-2) &= 2x(y-3) \\ y(x-2) &= x(y-3) \\ xy-2y &= xy-3x \\ -2y &= -3x \\ 2y &= 3x \end{aligned}$$

On utilise alors cette équation dans la 3e équation

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4 &= 0 \\ 4x^2+4y^2-16 &= 0 \\ 4x^2+9x^2-16 &= 0 \\ 13x^2 &= 16 \\ x &= \pm\frac{4}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Si x est positif, alors la valeur de y est

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2}x \\ y &= \frac{6}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Si x est négatif, alors la valeur de y est

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2}x \\ y &= -\frac{6}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

On a alors 2 points d'intérêt sur le cercle. Ces points sont

$$\left(\frac{4}{\sqrt{13}},\frac{6}{\sqrt{13}}\right),\left(\frac{-4}{\sqrt{13}},\frac{-6}{\sqrt{13}}\right)$$

La valeur de f à ces points est

$$\left(\frac{4}{\sqrt{13}},\frac{6}{\sqrt{13}}\right)\rightarrow f=2,578$$
$$\left(\frac{-4}{\sqrt{13}},\frac{-6}{\sqrt{13}}\right)\rightarrow f=31,422$$

On cherchait le minimum de la fonction *f*. Le point le plus près du point (2,3) est donc le point

$$\left(\frac{4}{\sqrt{13}},\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$$

14.7 Le cout des ski-doos est

$$C=2x^2+xy+y^2+1000$$

On doit obtenir le plus petit cout tout en respectant la contrainte suivante.

$$g=x+y-500=0$$

Ainsi, les équations

$$\frac{\partial C}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial C}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}$$
$$g=0$$

sont

$$4x+y=\lambda\cdot 1$$
$$x+2y=\lambda\cdot 1$$
$$x+y=500$$

Les deux premières équations indiquent que

$$4x+y=x+2y$$
$$3x=y$$

Si on utilise ce résultat dans la 3^{e} équation, on a

$$x+y=500$$
$$x+3x=500$$
$$4x=500$$
$$x=125$$

Alors la valeur de y est

$$x+y=500$$
$$125+y=500$$
$$y=375$$

Il faut donc fabriquer 125 ski-doos à Amos et 375 à Senneterre.

14.8 Le cout de la boite est

$$C=\left(\text{Aire du côté}\right)\cdot 0,5\tfrac{¢}{cm^2}+\left(\text{Aire des bouts}\right)\cdot 0,8\tfrac{¢}{cm^2}$$
$$C=2\pi rh\cdot 0,5\tfrac{¢}{cm^2}+2\pi r^2\cdot 0,8\tfrac{¢}{cm^2}$$
$$C=\pi rh\cdot 1\tfrac{¢}{cm^2}+\pi r^2\cdot 1,6\tfrac{¢}{cm^2}$$

Il faut donc trouver le minimum de cette fonction tout en gardant un volume de 300 cm³, donc tout en respectant la condition suivante.

$$g=\pi r^2h-300cm^3=0$$

Ainsi, les équations

$$\frac{\partial C}{\partial r}=\lambda\frac{\partial g}{\partial r}$$
$$\frac{\partial C}{\partial h}=\lambda\frac{\partial g}{\partial h}$$
$$g=0$$

sont

$$\pi h\cdot 1\tfrac{¢}{cm^2}+2\pi r\cdot 1,6\tfrac{¢}{cm^2}=\lambda\cdot 2\pi rh$$
$$\pi r\cdot 1\tfrac{¢}{cm^2}=\lambda\cdot\pi r^2$$
$$\pi r^2h-300cm^3=0$$

La deuxième équation donne

$$\pi r \cdot 1\tfrac{¢}{cm^2} = \lambda \cdot \pi r^2$$
$$1\tfrac{¢}{cm^2} = \lambda \cdot r$$

En utilisant cette valeur dans la 1re équation, on obtient

$$\begin{aligned}
\pi h \cdot 1\tfrac{¢}{cm^2} + 2\pi r \cdot 1{,}6\tfrac{¢}{cm^2} &= \lambda \cdot 2\pi rh \\
\pi h \cdot 1\tfrac{¢}{cm^2} + 2\pi r \cdot 1{,}6\tfrac{¢}{cm^2} &= 1\tfrac{¢}{cm^2} \cdot 2\pi h \\
h + 2r \cdot 1{,}6 &= 2h \\
2r \cdot 1{,}6 &= h \\
3{,}2r &= h
\end{aligned}$$

On utilise maintenant cette valeur dans la 3e équation

$$\begin{aligned}
\pi r^2 h - 300cm^3 &= 0 \\
\pi r^2 (3{,}2r) - 300cm^3 &= 0 \\
3{,}2\pi r^3 &= 300cm^3 \\
r &= 3{,}1017cm
\end{aligned}$$

La hauteur est alors

$$\begin{aligned}
h &= 3{,}2r \\
&= 9{,}9256cm
\end{aligned}$$

Alors, le cout de la boite est

$$\begin{aligned}
C &= \pi rh \cdot 1\tfrac{¢}{cm^2} + \pi r^2 \cdot 1{,}6\tfrac{¢}{cm^2} \\
&= \pi (3{,}1017cm)(9{,}9256cm) \cdot 1\tfrac{¢}{cm^2} + \pi (3{,}1017cm)^2 \cdot 1{,}6\tfrac{¢}{cm^2} \\
&= 145{,}08¢
\end{aligned}$$

Reste à s'assurer que c'est le cout minimum (et non pas le cout maximum). On le détermine en calculant le cout pour d'autres dimensions tout en gardant un volume de 300 cm³. Prenons, par exemple, un rayon de 3 cm. Pour avoir un volume de 300 cm³, alors la hauteur devrait être de 10,61 cm. Avec ces valeurs, le cout est

$$\begin{aligned}
C &= \pi (3cm)(10{,}61cm) \cdot 1\tfrac{¢}{cm^2} + \pi (3cm)^2 \cdot 1{,}6\tfrac{¢}{cm^2} \\
&= 145{,}24¢
\end{aligned}$$

Comme on obtient un cout plus grand, on avait bel et bien un minimum.

14.9 On veut maximiser la résistance de la poutre

$$R = kAB^2$$

En taillant la poutre, la largeur de la poutre peut être dans le sens vertical ou horizontal. On va commencer en disant que la largeur est dans le sens horizontal du tronc.

Largeur de la poutre dans le sens horizontal.

Selon la figure, on a alors $A = 2x$ et $B = 2y$. En termes de x et y, la résistance est

$$R = 8kxy^2$$

On doit obtenir la plus grande résistance tout en respectant la contrainte suivante.

$$g = \frac{x^2}{(20cm)^2} + \frac{y^2}{(30cm)^2} - 1 = 0$$

Ainsi, les équations

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial R}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$
$$g = 0$$

sont

$$8ky^2 = \lambda \cdot \frac{2x}{(20cm)^2}$$
$$16kxy = \lambda \cdot \frac{2y}{(30cm)^2}$$
$$\frac{x^2}{(20cm)^2} + \frac{y^2}{(30cm)^2} = 1$$

On peut écrire les deux premières équations sous la forme suivante.

$$8ky^3(20cm)^2 = \lambda \cdot 2xy$$
$$16kx^2 y(30cm)^2 = \lambda \cdot 2xy$$

Cela signifie que

$$8ky^3(20cm)^2 = 16kx^2 y(30cm)^2$$
$$y^2(20cm)^2 = 2x^2(30cm)^2$$
$$y^2 400cm^2 = 2x^2 900cm^2$$
$$2y^2 = 9x^2$$

Si on utilise ce résultat dans la 3e équation, on a

$$\frac{x^2}{(20cm)^2} + \frac{y^2}{(30cm)^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{(20cm)^2} + \frac{\frac{9}{2}x^2}{(30cm)^2} = 1$$
$$x^2\left(\frac{1}{(20cm)^2} + \frac{\frac{9}{2}}{(30cm)^2}\right) = 1$$
$$x = \frac{20}{\sqrt{3}}cm$$
$$x \approx 11,547cm$$

Alors la valeur de *y* est

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{\sqrt{2}}x \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{20}{\sqrt{3}}cm \\ &= 10\sqrt{6}cm \\ &\approx 24,495cm \end{aligned}$$

Avec ces dimensions, la résistance de la poutre est

$$\begin{aligned} R &= 8kxy^2 \\ &= 8k\frac{20}{\sqrt{3}}cm \cdot \left(10\sqrt{6}cm\right)^2 \\ &= 55426cm^3 \cdot k \end{aligned}$$

<u>*Largeur de la poutre dans le sens vertical*</u>

Selon la figure, on a $A = 2y$ et $B = 2x$. En termes de x et y, la résistance est

$$R = 8kyx^2$$

tout en respectant la contrainte

$$g = \frac{x^2}{(20cm)^2} + \frac{y^2}{(30cm)^2} - 1 = 0$$

Ainsi, les équations

$$\begin{gathered} \frac{\partial R}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g = 0 \end{gathered}$$

sont

$$\begin{gathered} 16kxy = \lambda \cdot \frac{2x}{(20cm)^2} \\ 8kx^2 = \lambda \cdot \frac{2y}{(30cm)^2} \\ \frac{x^2}{(20cm)^2} + \frac{y^2}{(30cm)^2} = 1 \end{gathered}$$

On peut écrire les deux premières équations sous la forme suivante.

$$\begin{gathered} 16kxy^2 (20cm)^2 = \lambda \cdot 2xy \\ 8kx^3 (30cm)^2 = \lambda \cdot 2xy \end{gathered}$$

Cela signifie que

$$16kxy^2\left(20cm\right)^2 = 8kx^3\left(30cm\right)^2$$
$$2y^2\left(20cm\right)^2 = x^2\left(30cm\right)^2$$
$$2y^2 400cm^2 = x^2 900cm^2$$
$$8y^2 = 9x^2$$

Si on utilise ce résultat dans la 3e équation, on a

$$\frac{x^2}{\left(20cm\right)^2} + \frac{y^2}{\left(30cm\right)^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{\left(20cm\right)^2} + \frac{\frac{9}{8}x^2}{\left(30cm\right)^2} = 1$$
$$x^2\left(\frac{1}{\left(20cm\right)^2} + \frac{\frac{9}{8}}{\left(30cm\right)^2}\right) = 1$$
$$x = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}cm$$
$$x = \frac{20\sqrt{6}}{3}cm$$
$$x \approx 16,323cm$$

Alors la valeur de y est

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{\sqrt{8}}x \\ &= \frac{3}{\sqrt{8}}\frac{20\sqrt{6}}{3}cm \\ &= 10\sqrt{3}cm \\ &\approx 17,321cm \end{aligned}$$

Avec ces dimensions, la résistance de la poutre est

$$\begin{aligned} R &= 8kyx^2 \\ &= 8k\left(10\sqrt{3}cm\right)\cdot\left(\frac{20\sqrt{6}}{3}cm\right)^2 \\ &= 36950cm^3 \cdot k \end{aligned}$$

En comparant les deux résultats, on constate alors qu'il est préférable de prendre la largeur de la poutre dans le sens horizontal.

Les dimensions optimales sont donc

$$x = \frac{20}{\sqrt{3}} cm \qquad y = 10\sqrt{6cm}$$

Cela signifie que la largeur et la hauteur sont

$$\text{largeur} = \frac{40}{\sqrt{3}} cm \approx 23,094 cm \qquad \text{hauteur} = 20\sqrt{6} cm \approx 48,990 cm$$

14.10 La température est

$$T = 1\tfrac{°C}{m^2} \cdot x^2 + 2\tfrac{°C}{m^2} \cdot y^2 + 4\tfrac{°C}{m} \cdot z + 10°C$$

On doit obtenir la plus petite température tout en respectant la contrainte suivante.

$$g = x + 2y + z - 10m = 0$$

Ainsi, les équations

$$\begin{gathered} \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \\ g = 0 \end{gathered}$$

sont

$$\begin{gathered} 2\tfrac{°C}{m^2} \cdot x = \lambda \cdot 1 \\ 4\tfrac{°C}{m^2} \cdot y = \lambda \cdot 2 \\ 4\tfrac{°C}{m} = \lambda \cdot 1 \\ x + 2y + z - 10m = 0 \end{gathered}$$

La 3e équation nous donne la valeur de λ. En utilisant cette valeur dans les deux premières équations, on arrive à

$$2\tfrac{°C}{m^2}\cdot x = 4\tfrac{°C}{m}\cdot 1$$
$$4\tfrac{°C}{m^2}\cdot y = 4\tfrac{°C}{m}\cdot 2$$

Ces équations nous donnent

$$x = 2m$$
$$y = 2m$$

La valeur de z est alors

$$x + 2y + z - 10m = 0$$
$$2m + 4m + z - 10m = 0$$
$$z = 4m$$

Notre point est donc (2 m, 2 m, 4 m). À cet endroit, la température est

$$\begin{aligned} T &= 1\tfrac{°C}{m^2}\cdot x^2 + 2\tfrac{°C}{m^2}\cdot y^2 + 4\tfrac{°C}{m}\cdot z + 10°C \\ &= 1\tfrac{°C}{m^2}\cdot(2m)^2 + 2\tfrac{°C}{m^2}\cdot(2m)^2 + 4\tfrac{°C}{m}\cdot(4m) + 10°C \\ &= 38°C \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à s'assurer qu'on a un minimum. Pour le savoir, il suffit de calculer la température à un autre endroit, tout en respectant la condition

$$x + 2y + z - 10m = 0$$

Par exemple, on peut prendre le point (0 m, 0 m, 10 m). À cet endroit, la température est

$$\begin{aligned} T &= 1\tfrac{°C}{m^2}\cdot x^2 + 2\tfrac{°C}{m^2}\cdot y^2 + 4\tfrac{°C}{m}\cdot z + 10°C \\ &= 1\tfrac{°C}{m^2}\cdot(0m)^2 + 2\tfrac{°C}{m^2}\cdot(0m)^2 + 4\tfrac{°C}{m}\cdot(10m) + 10°C \\ &= 50°C \end{aligned}$$

Comme la température est plus élevée, on a un minimum à (2 m, 2 m, 4 m).