

Solutionnaire du chapitre 3

1.1

$$\begin{aligned}z &= 5x^2y + xy^2 \\ &= 5(1)^2 \cdot 3 + 1 \cdot (3)^2 \\ &= 15 + 9 \\ &= 24\end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned}f &= xyz + xy + yz \\ &= (-1) \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ &= -2 - 1 + 2 \\ &= -1\end{aligned}$$

1.3

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{u^2 + v^2} - wx \\ &= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} - (-1)(-2) \\ &= 5 - 2 \\ &= 3\end{aligned}$$

1.4 Comme on ne veut pas de division par 0, on a la restriction suivante.

$$\begin{aligned}x - y &\neq 0 \\ y &\neq x\end{aligned}$$

Le domaine est donc tout le plan xy , sauf la droite $y = x$.

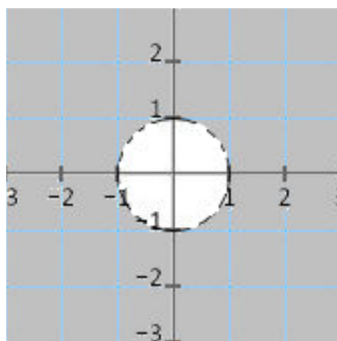
1.5 Comme on ne veut pas de logarithme de nombre négatif ou d'un nombre nul, on a la restriction suivante.

$$x^2 + y^2 - 1 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 1$$

C'est l'équation d'un cercle de rayon 1. On doit donc se situer à l'extérieur d'un cercle de rayon 1 et le cercle lui-même n'est pas inclus.

Le domaine est donc



1.6 Comme on ne veut pas de racine de nombre négatif, on a la restriction suivante.

$$9 - x^2 - 9y^2 \geq 0$$

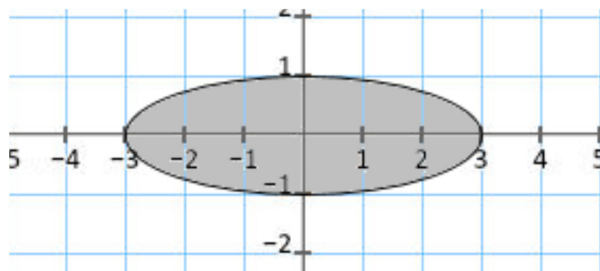
$$9 \geq x^2 + 9y^2$$

$$x^2 + 9y^2 \leq 9$$

$$\frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1$$

C'est l'équation d'une ellipse allant de -3 à 3 sur l'axe des x et de -1 à 1 sur l'axe des y. On doit donc se situer à l'intérieur de cette ellipse et l'ellipse elle-même est incluse.

Le domaine est donc



2.1 Au point (1,4) la fonction vaut

$$\begin{aligned}
 z &= y \arctan x \\
 &= 4 \arctan 1 \\
 &= 4 \cdot \frac{\pi}{4} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

L'équation de la courbe de niveau est donc

$$\begin{aligned}
 \pi &= y \arctan x \\
 y &= \frac{\pi}{\arctan x}
 \end{aligned}$$

2.2 Au point (0,2) la fonction vaut

$$\begin{aligned}
 z &= (2x + y^2) e^{-xy} \\
 &= (2 \cdot 0 + (2)^2) e^{0 \cdot 2} \\
 &= (0 + 4) \cdot 1 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

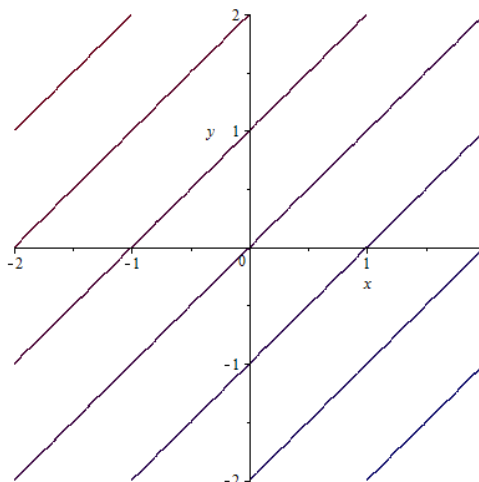
L'équation de la courbe de niveau est donc

$$4 = (2x + y^2) e^{-xy}$$

2.3 La commande est (si *with(plots)* a déjà été écrit au moins 1 fois depuis le démarrage de Maple)

```
contourplot(x-y+4, x=-2..2, y=-2..2, contours=[0,1,2,3,4,5,6,7,8])
```

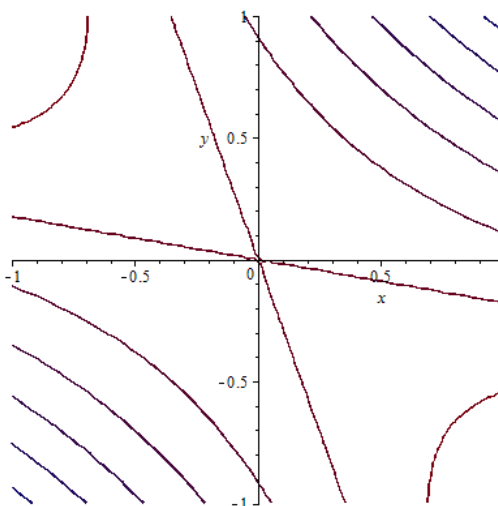
On a alors



2.4 La commande est (si *with(plots)* a déjà été écrit au moins 1 fois depuis le démarrage de Maple)

```
contourplot(3x^2+18*x*y+6y^2, x=-1..1, y=-1..1, contours=[-5,0,5,10,15,20,25])
```

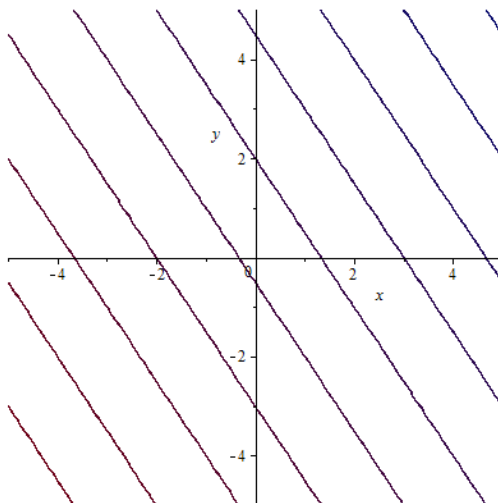
On a alors



2.5 La commande est (si *with(plots)* a déjà été écrit au moins 1 fois depuis le démarrage de Maple)

```
contourplot(0.6*x+0.4*y-0.8, x=-5..5, y=-5..5, contours=[-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5])
```

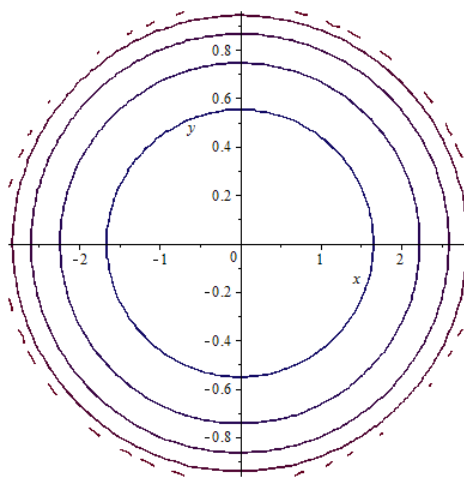
On a alors



2.6 La commande est (si *with(plots)* a déjà été écrit au moins 1 fois depuis le démarrage de Maple)

```
contourplot(sqrt(9 - x^2 - 9·y^2), x=-3..3, y=-1..1, contours = [0, 0.5, 1,
1.5, 2, 2.5])
```

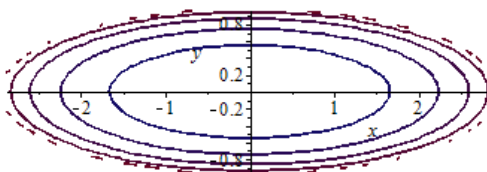
On a alors



Ce qui est dommage, c'est que les échelles des axes sont différentes. Pour corriger cela, on ajoute

```
contourplot(sqrt(9 - x^2 - 9·y^2), x=-3..3, y=-1..1, contours = [0, 0.5, 1,
1.5, 2, 2.5], scaling = constrained)
```

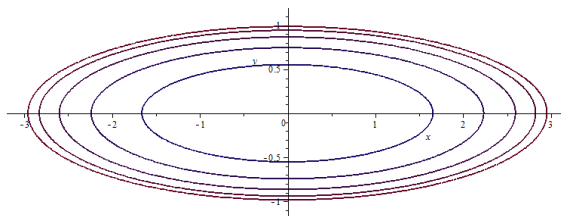
On a alors



La courbe de niveau $z = 0$ est mal tracée. Pour l'améliorer, faites-la tracer avec plus de points avec l'option `numpoints`. (Par défaut, cette valeur est 200.) On obtient une belle courbe avec 3000.

```
contourplot(sqrt(9 - x^2 - 9*y^2), x=-3..3, y=-1..1, contours = [0, 0.5,
1, 1.5, 2, 2.5], scaling = constrained, view = [-3.2..3.2, -1.2..1.2],
numpoints = 30000)
```

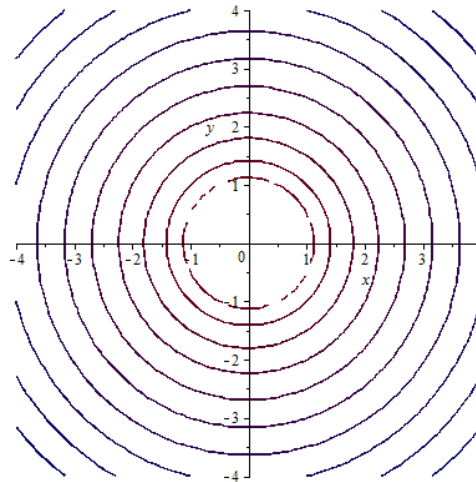
(Le `view` permet de voir un peu plus grand que de -3 à 3 en x et de -1 à 1 en y). On a alors



2.7 La commande est (si `with(plots)` a déjà été écrit au moins 1 fois depuis le démarrage de Maple)

```
contourplot(sqrt(4*x^2 + 4*y^2 - 4), x=-4..4, y=-4..4, contours = [0, 1,
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10])
```

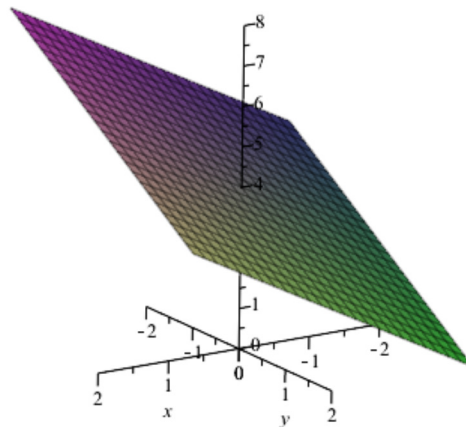
On a alors



3.1 La commande est

```
plot3d(x-y+4,x=-2..2,y=-2..2,axes=normal)
```

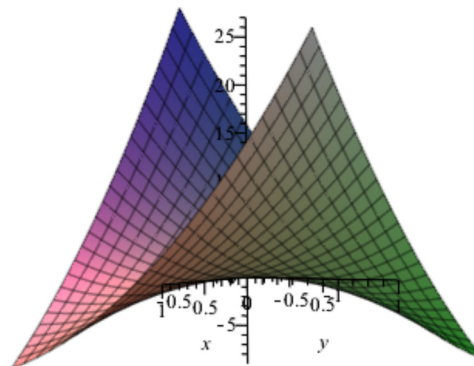
On a alors



3.2 La commande est

```
plot3d(3*x^2+18*x*y+6*y^2,x=-1..1,y=-1..1,axes=normal)
```

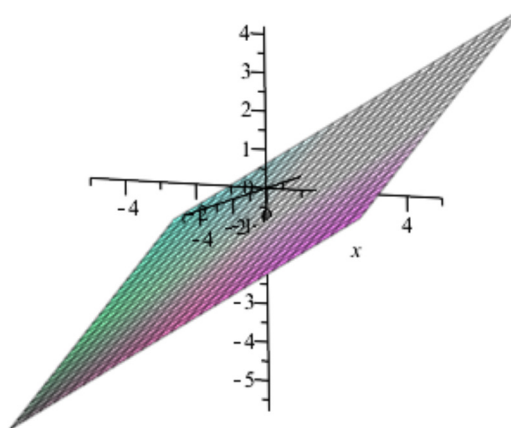
On a alors



3.3 La commande est

```
plot3d(0.6*x+0.4*y-0.8,x=-5..5,y=-5..5,axes=normal)
```

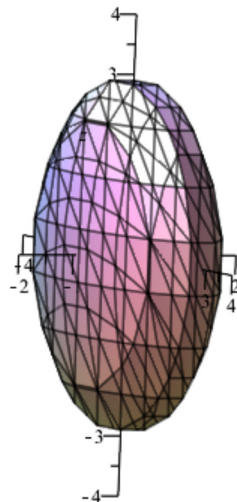
On a alors



3.4 La commande est (si *with(plots)* a déjà été écrit au moins 1 fois depuis le démarrage de Maple)

```
implicitplot3d(x^2 + 9*y^2 + z^2 = 9, x=-4..4, y=-2..2, z=-4..4, axes
= normal, scaling = constrained)
```

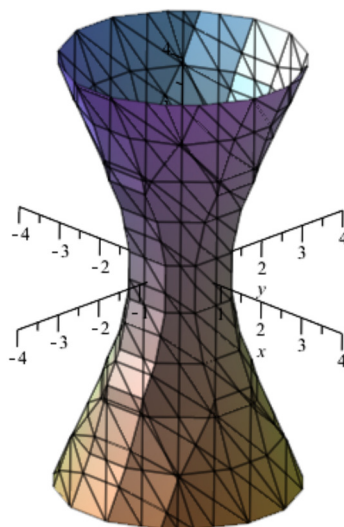
On a alors



3.5 La commande est (si *with(plots)* a déjà été écrit au moins 1 fois depuis le démarrage de Maple)

```
implicitplot3d(4·x2 + 4·y2 - z2 = 4, x = -4..4, y = -4..4, z = -4..4, axes  
= normal, scaling = constrained)
```

On a alors



5.1

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 2}{3 + xy} = \frac{-2}{3}$$

5.2

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - (mx)^4}{x^2 + (mx)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - m^4 x^4}{x^2 + m^2 x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - m^4)x^4}{(1 + m^2)x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - m^4)}{(1 + m^2)} x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il y a peut-être un problème si $m = \infty$. Pour voir ce qu'on obtient dans cette direction, posons $y = \sqrt{x}$. On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - (\sqrt{x})^4}{x^2 + (\sqrt{x})^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^2}{x^2 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x}{2x + 1} \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La limite est donc 0.

5.3

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - (mx)^2}{x^2 + 2(mx)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - m^2x^2}{x^2 + 2m^2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - m^2)x^2}{(1 + 2m^2)x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - m^2)}{(1 + 2m^2)} \\ &= \frac{(2 - m^2)}{(1 + 2m^2)} \end{aligned}$$

Comme la valeur de la limite dépend de m , la limite n'existe pas.

5.4

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y} = \frac{2 - 2}{1 - 1 + 4 - 4} = \frac{0}{0}$$

Pour trouver la limite, on peut simplifier un peu la fonction.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y(x-1)}{x(x-1) + 2y(x-1)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y}{x + 2y} \end{aligned}$$

La limite est alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y}{x + 2y} = \frac{2}{5}$$

Évidemment, il y a la version plus longue si on n'a pas vu la simplification.

On pose alors $y - 2 = m(x - 1)$. On a alors

$$\begin{aligned}y - 2 &= m(x - 1) \\ y &= mx - m + 2\end{aligned}$$

La limite devient donc

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y(x-1)}{x^2 - x + (2x-2)y} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(mx - m + 2)(x - 1)}{x^2 - x + (2x - 2)(mx - m + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(mx - m + 2) - (mx - m + 2)}{x^2 - x + 2x(mx - m + 2) - 2(mx - m + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^2 - mx + 2x - mx + m - 2}{x^2 - x + 2mx^2 - 2xm + 4x - 2mx + 2m - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^2 + (2 - 2m)x + m - 2}{(1 + 2m)x^2 + (3 - 4m)x + 2m - 4}\end{aligned}$$

On a toujours 0/0. Si on applique la règle de l'Hospital, on a

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2mx + (2 - 2m)}{2(1 + 2m)x + (3 - 4m)} \\ &= \frac{2m + (2 - 2m)}{2(1 + 2m) + (3 - 4m)} \\ &= \frac{2m + 2 - 2m}{2 + 4m + 3 - 4m} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

5.5

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y^3}{2y^5 - 2x^5} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y^3}{2y^5 - 2x^5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2(mx)^3}{2(mx)^5 - 2x^5} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3m^3x^5}{2m^5x^5 - 2x^5} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3m^3x^5}{(2m^5 - 2)x^5} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3m^3}{2m^5 - 2} \\
&= \frac{3m^3}{2m^5 - 2}
\end{aligned}$$

Comme la valeur de la limite dépend de m , la limite n'existe pas.

5.6

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2(mx) + x(mx)^2 - (mx)^3}{x^2 + (mx)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - mx^3 + m^2x^3 - m^3x^3}{x^2 + m^2x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1 - m + m^2 - m^3)}{x^2(1 + m^2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1 - m + m^2 - m^3}{1 + m^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Il y a peut-être un problème si $m = \infty$. Pour voir ce qu'on obtient dans cette direction, posons $y = \sqrt{x}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2\sqrt{x} + x\sqrt{x^2} - \sqrt{x^3}}{x^2 + \sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^{5/2} + x^2 - x^{3/2}}{x^2 + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - x^{3/2} + x - x^{1/2})}{x(x+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^{3/2} + x - x^{1/2}}{x+1} \\
&= \frac{0}{1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

La limite est donc 0.

5.7

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{4+x}{2-y} = \frac{6}{1} = 6$$

5.8

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{5x^4 + 2y^4} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{5x^4 + 2y^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(mx)}{5x^4 + 2(mx)^4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx^2}{5x^4 + 2m^4x^4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx^2}{(5 + 2m^4)x^4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3m}{(5 + 2m^4)x^2} \\
&= \frac{3m}{5 + 2m^4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{3m}{5 + 2m^4} \infty
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de limite, car la valeur peut changer selon la valeur de m . Si m est positif, la limite est $+\infty$ et si m est négatif, la limite est $-\infty$.

Donc, la limite n'existe pas.

5.9

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xe^x + y}{y \ln(x+2)} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xe^x + y}{y \ln(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x + mx}{mx \ln(x+2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + m)x}{mx \ln(x+2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + m}{m \ln(x+2)} \\
&= \frac{1 + m}{m \ln(2)}
\end{aligned}$$

Comme la valeur dépend de m , la limite n'existe pas.

5.10

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1+y^2)\sin x}{x} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1+y^2)\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+(mx)^2)\sin x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + m^2 x^2 \sin x}{x} \end{aligned}$$

Comme on a $0/0$, on applique la règle de l'Hospital. On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + m^2 x^2 \sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + m^2 x^2 \cos x + 2m^2 x \sin x}{1} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Il y a peut-être un problème si $m = \infty$. Pour voir ce qu'on obtient dans cette direction, posons $y = \sqrt{x}$. On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1+y^2)\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sqrt{x^2})\sin x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \sin x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x + x \cos x}{1} \\ &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

La limite est donc 1

5.11

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 - 2y} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 - 2y} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(mx)^2}{x^2 - 2mx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m^2 x^3}{x^2 - 2mx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m^2 x^2}{x - 2m} \\ &= \frac{0}{-2m} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il y a peut-être un problème si $m = 0$. Pour voir ce qu'on obtient dans cette direction, posons $y = x^2$. On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 - 2y} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(x^2)^2}{x^2 - 2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5}{-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La limite est donc 0.