Solutionnaire du chapitre 2

1.1

$$\sinh(1) = 1{,}1752$$

1.2

$$\cosh(2) = 3{,}7622$$

1.3

$$\tanh(3) = 0{,}9951$$

1.4

$$\begin{aligned}\operatorname{sech}(1) &= \frac{1}{\cosh(1)} \\ &= 0{,}6481\end{aligned}$$

1.5

$$\begin{aligned}\operatorname{csch}(2) &= \frac{1}{\sinh(2)} \\ &= 0{,}2757\end{aligned}$$

1.6

$$\begin{aligned}\coth(2) &= \frac{1}{\tanh(2)} \\ &= 1{,}0373\end{aligned}$$

1.7

$$\begin{aligned}\cosh x+\sinh x &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\\ &= \frac{2e^x}{2}\\ &= e^x\end{aligned}$$

1.8

$$\begin{aligned}\cosh x-\sinh x &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\\ &= \frac{2e^{-x}}{2}\\ &= e^{-x}\end{aligned}$$

1.9

$$\begin{aligned}\sinh(-x) &= \frac{e^{(-x)}-e^{-(-x)}}{2}\\ &= \frac{e^{-x}-e^x}{2}\\ &= -\frac{e^x-e^{-x}}{2}\\ &= -\sinh x\end{aligned}$$

1.10

$$\begin{aligned}\cosh(-x) &= \frac{e^{(-x)}+e^{-(-x)}}{2}\\ &= \frac{e^{-x}+e^x}{2}\\ &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\\ &= \cosh x\end{aligned}$$

1.11

$$\begin{aligned}\tanh^2 x+\operatorname{sech}^2 x &= \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}+\frac{1}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\sinh^2 x+1}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x}\\ &= 1\end{aligned}$$

1.12

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \frac{e^{(x+y)}-e^{-(x+y)}}{2}\\ &= \frac{e^x e^y - e^{-x}e^{-y}}{2}\\ &= \frac{e^x e^y}{2}-\frac{e^{-x}e^{-y}}{2}\end{aligned}$$

Mais puisque

$$e^x = \cosh x+\sinh x \quad \text{et} \quad e^{-x}=\cosh x-\sinh x$$

on a

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \frac{(\cosh x+\sinh x)(\cosh y+\sinh y)}{2}-\frac{(\cosh x-\sinh x)(\cosh y-\sinh y)}{2}\\ &= \frac{\cancel{\cosh x\cosh y}+\cosh x\sinh y+\sinh x\cosh y+\cancel{\sinh x\sinh y}}{2}\\ &\qquad -\frac{\cancel{\cosh x\cosh y}-\cosh x\sinh y-\sinh x\cosh y+\cancel{\sinh x\sinh y}}{2}\\ &= \frac{2\cosh x\sinh y+2\sinh x\cosh y}{2}\\ &= \cosh x\sinh y+\sinh x\cosh y\end{aligned}$$

1.13

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \frac{e^{(x+y)}+e^{-(x+y)}}{2}\\ &= \frac{e^x e^y + e^{-x}e^{-y}}{2}\\ &= \frac{e^x e^y}{2}+\frac{e^{-x}e^{-y}}{2}\end{aligned}$$

Mais puisque

$$e^x = \cosh x + \sinh x \quad \text{et} \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

on a

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \frac{(\cosh x+\sinh x)(\cosh y+\sinh y)}{2}+\frac{(\cosh x-\sinh x)(\cosh y-\sinh y)}{2}\\ &= \frac{\cosh x\cosh y+\cancel{\cosh x\sinh y}+\cancel{\sinh x\cosh y}+\sinh x\sinh y}{2}\\ &\qquad +\frac{\cosh x\cosh y-\cancel{\cosh x\sinh y}-\cancel{\sinh x\cosh y}+\sinh x\sinh y}{2}\\ &= \frac{2\cosh x\cosh y+2\sinh x\sinh y}{2}\\ &= \cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y\end{aligned}$$

1.14

Version 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cosh x+\sinh x} &= \frac{1}{\cosh x+\sinh x}\cdot\frac{\cosh x-\sinh x}{\cosh x-\sinh x}\\ &= \frac{\cosh x-\sinh x}{\cosh^2 x-\cosh x\sinh x+\sinh x\cosh x-\sinh^2 x}\\ &= \frac{\cosh x-\sinh x}{\cosh^2 x-\sinh^2 x}\\ &= \frac{\cosh x-\sinh x}{1}\\ &= \cosh x-\sinh x\end{aligned}$$

Version 2

$$\begin{aligned}(\cosh x+\sinh x)^{-1} &= \left(e^{x}\right)^{-1}\\ &= e^{-x}\\ &= \cosh x-\sinh x\end{aligned}$$

1.15

$$\begin{aligned}\tanh(x+y) &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)}\\ &= \frac{\cosh x\sinh y+\sinh x\cosh y}{\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y}\end{aligned}$$

Si on divise le numérateur et le dénominateur par cosh x cosh y, on a

$$\begin{aligned}\tanh(x+y) &= \frac{\cosh x\sinh y+\sinh x\cosh y}{\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y}\\ &= \frac{\frac{\cosh x\sinh y}{\cosh x\cosh y}+\frac{\sinh x\cosh y}{\cosh x\cosh y}}{\frac{\cosh x\cosh y}{\cosh x\cosh y}+\frac{\sinh x\sinh y}{\cosh x\cosh y}}\\ &= \frac{\frac{\sinh y}{\cosh y}+\frac{\sinh x}{\cosh x}}{1+\frac{\sinh x}{\cosh x}\cdot\frac{\sinh x}{\cosh x}}\\ &= \frac{\tanh y+\tanh x}{1+\tanh x\cdot\tanh y}\end{aligned}$$

1.16

$$\begin{aligned}(\cosh x+\sinh x)^{n} &= \left(e^{x}\right)^{n}\\ &= e^{nx}\\ &= \cosh nx-\sinh nx\end{aligned}$$

2.1

$$\begin{aligned}\frac{d\sinh 5x}{dx} &= \cosh(5x)\cdot\frac{d(5x)}{dx}\\ &= \cosh(5x)\cdot 5\\ &= 5\cosh 5x\end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned}\frac{d\cosh x^4}{dx} &= \sinh\left(x^4\right)\cdot\frac{d\left(x^4\right)}{dx}\\ &= \sinh\left(x^4\right)\cdot 4x^3\\ &= 4x^3\sinh\left(x^4\right)\end{aligned}$$

2.3

$$\begin{aligned}\frac{d\left(x^2\tanh\sqrt{x}\right)}{dx} &= \frac{d\left(x^2\right)}{dx}\tanh\sqrt{x}+x^2\frac{d\left(\tanh\sqrt{x}\right)}{dx}\\ &= 2x\tanh\sqrt{x}+x^2\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{x}\right)\cdot\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{dx}\\ &= 2x\tanh\sqrt{x}+x^2\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}\\ &= 2x\tanh\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^{3/2}\operatorname{sech}^2\sqrt{x}\end{aligned}$$

2.4

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\coth\frac{2}{x^2}\right)}{dx} &= -\operatorname{csch}^2\frac{2}{x^2}\cdot\frac{d\left(\frac{2}{x^2}\right)}{dx}\\ &= -\operatorname{csch}^2\frac{2}{x^2}\cdot\frac{-4}{x^3}\\ &= \frac{4}{x^3}\operatorname{csch}^2\frac{2}{x^2}\end{aligned}$$

2.5

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\frac{\operatorname{sech} x^2}{x^2+4}\right)}{dx} &= \frac{\frac{d\left(\operatorname{sech} x^2\right)}{dx}\cdot\left(x^2+4\right)-\operatorname{sech} x^2\cdot\frac{d\left(x^2+4\right)}{dx}}{\left(x^4+4\right)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 \frac{d\left(x^2\right)}{dx}\cdot\left(x^2+4\right)-\operatorname{sech} x^2\cdot 2x}{\left(x^4+4\right)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 2x\cdot\left(x^2+4\right)-\operatorname{sech} x^2\cdot 2x}{\left(x^4+4\right)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 2x\cdot\left(x^2+4\right)}{\left(x^4+4\right)^2}-\frac{\operatorname{sech} x^2\cdot 2x}{\left(x^4+4\right)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 2x}{\left(x^4+4\right)}-\frac{\operatorname{sech} x^2\cdot 2x}{\left(x^4+4\right)^2} \\
&= -\frac{2x\operatorname{sech} x^2}{x^2+4}\left(\tanh x^2+\frac{1}{x^4+4}\right)
\end{aligned}$$

2.6

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\operatorname{csch}^2 3x\right)}{dx} &= 2\operatorname{csch} 3x\cdot\frac{d\operatorname{csch} 3x}{dx} \\
&= 2\operatorname{csch} 3x\cdot\left(-\operatorname{csch} 3x\coth 3x\right)\frac{d3x}{dx} \\
&= 2\operatorname{csch} 3x\cdot\left(-\operatorname{csch} 3x\coth 3x\right)\cdot 3 \\
&= -6\operatorname{csch}^2 3x\cdot\coth 3x
\end{aligned}$$

2.7

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\ln\left(\cosh(3x)\right)\right)}{dx} &= \frac{\frac{d\cosh 3x}{dx}}{\cosh 3x} \\ &= \frac{\sinh 3x \frac{d3x}{dx}}{\cosh 3x} \\ &= \frac{\sinh 3x \cdot 3}{\cosh 3x} \\ &= 3\tanh 3x\end{aligned}$$

2.8

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\cosh\sqrt{3x^2+2x+2}\right)}{dx} &= \sinh\sqrt{3x^2+2x+2}\,\frac{d\sqrt{3x^2+2x+2}}{dx} \\ &= \sinh\sqrt{3x^2+2x+2}\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2+2x+2\right)^{-1/2}\frac{d\left(3x^2+2x+2\right)}{dx} \\ &= \sinh\sqrt{3x^2+2x+2}\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2+2x+2\right)^{-1/2}\cdot(6x+2) \\ &= \frac{(3x+1)\cdot\sinh\sqrt{3x^2+2x+2}}{\sqrt{3x^2+2x+2}}\end{aligned}$$

2.9

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\frac{1}{\tanh^2(x)+4}\right)}{dx} &= -\left(\tanh^2(x)+4\right)^{-2}\frac{d\left(\tanh^2(x)+4\right)}{dx} \\ &= -\left(\tanh^2(x)+4\right)^{-2}2\tanh x\frac{d\left(\tanh(x)\right)}{dx} \\ &= -\left(\tanh^2(x)+4\right)^{-2}2\tanh x\,\mathrm{sech}^2 x \\ &= -\frac{2\tanh x\,\mathrm{sech}^2 x}{\left(\tanh^2(x)+4\right)^2}\end{aligned}$$

2.10

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\arctan\left(\sinh\left(x\right)\right)\right)}{dx} &= \frac{1}{1+\sinh^2 x}\frac{d\left(\sinh x\right)}{dx}\\ &= \frac{1}{1+\sinh^2 x}\cosh x\end{aligned}$$

Mais comme $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\arctan\left(\sinh\left(x\right)\right)\right)}{dx} &= \frac{1}{1+\sinh^2 x}\cosh x\\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}\cosh x\\ &= \frac{1}{\cosh x}\\ &= \operatorname{sech} x\end{aligned}$$

2.11 On pose

$$\begin{aligned}u &= 2x+1\\ du &= 2dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \sinh\left(2x+1\right)dx &= \frac{1}{2}\int \sinh\left(2x+1\right)2dx\\ &= \frac{1}{2}\int \sinh u du\\ &= \frac{1}{2}\cosh u + C\\ &= \frac{1}{2}\cosh\left(2x+1\right)+C\end{aligned}$$

2.12 On pose

$$\begin{aligned}u &= \sinh x\\ du &= \cosh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{\cosh x}{1+\sinh x}dx &= \int \frac{\cosh x dx}{1+\sinh x} \\ &= \int \frac{du}{1+u} \\ &= \ln(1+u)+C \\ &= \ln(1+\sinh x)+C\end{aligned}$$

2.13 On pose

$$\begin{aligned}u &= x^3 \\ du &= 3x^2 dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int x^2 \sinh(x^3)dx &= \frac{1}{3}\int \sinh(x^3)\cdot 3x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}\int \sinh u du \\ &= \frac{1}{3}\cosh u + C \\ &= \frac{1}{3}\cosh x^3 + C\end{aligned}$$

2.14 On pose

$$\begin{aligned}u &= \sqrt{x} \\ du &= \frac{1}{2}x^{-1/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx &= 2\int \sinh\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}}\\ &= 2\int \sinh u\cdot du\\ &= 2\cosh u + C\\ &= 2\cosh\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

2.15 On pose

$$\begin{aligned}u &= 3x\\ du &= 3dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sinh^2(3x)}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sinh^2(3x)}3dx\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sinh^2 u}du\\ &= \frac{1}{3}\int \operatorname{csch}^2 u du\\ &= -\frac{1}{3}\coth u + C\\ &= -\frac{1}{3}\coth 3x + C\end{aligned}$$

2.16 On pose

$$\begin{aligned}u &= \sinh x\\ du &= \cosh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \coth x dx &= \int \frac{\cosh x}{\sinh x} dx \\ &= \int \frac{\cosh x dx}{\sinh x} \\ &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln u + C \\ &= \ln(\sinh x) + C\end{aligned}$$

2.17 On pose

$$\begin{aligned}u &= \sinh x \\ du &= \cosh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \sinh x \cosh x dx &= \int u du \\ &= \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{\sinh^2 x}{2} + C\end{aligned}$$

Autre possibilité

On pose

$$\begin{aligned}u &= \cosh x \\ du &= \sinh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \sinh x \cosh x dx &= \int \cosh x \sinh x dx \\ &= \int u du \\ &= \frac{u^2}{2} + K \\ &= \frac{\cosh^2 x}{2} + K\end{aligned}$$

(Les deux réponses sont équivalentes puisque $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$)

2.18 En utilisant $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, l'intégrale est

$$\begin{aligned}\int \cosh^3 x dx &= \int \cosh^2 x \cosh x dx \\ &= \int \left(1 + \sinh^2 x\right) \cosh x dx \\ &= \int \left(\cosh x + \sinh^2 x \cosh x\right) dx \\ &= \int \cosh x dx + \int \sinh^2 x \cosh x dx\end{aligned}$$

La première intégrale est facile à faire. Pour la 2e intégrale, on pose

$$\begin{aligned}u &= \sinh x \\ du &= \cosh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \sinh^2 x \cosh x dx &= \int u^2 du \\ &= \frac{u^3}{3} + C \\ &= \frac{\sinh^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \cosh^3 x dx &= \int \cosh x dx + \int \sinh^2 x \cosh x dx \\ &= \sinh x + \frac{\sinh^3 x}{3} + C \\ &= \frac{1}{3}\sinh x\left(3+\sinh^2 x\right)+C\end{aligned}$$

2.19 On pose

$$\begin{aligned}u &= \cosh x \\ du &= \sinh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{\sinh x}{1+\cosh^2 x} dx &= \int \frac{\sinh x dx}{1+\cosh^2 x} \\ &= \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= \arctan u + C \\ &= \arctan\left(\cosh x\right)+C\end{aligned}$$

2.20 On pose

$$\begin{aligned}u &= \cosh x \\ du &= \sinh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \sinh x \operatorname{sech}^2 x dx &= \int \frac{\sinh x dx}{\cosh^2 x} \\ &= \int \frac{du}{u^2} \\ &= -u^{-1} + C \\ &= -\frac{1}{\cosh x} + C \\ &= -\operatorname{sech} x + C\end{aligned}$$

2.20 L'aire sous la courbe est

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \cosh x dx &= [\sinh x]_{-1}^{2} \\ &= \sinh 2 - \sinh(-1) \\ &= 4,8021\end{aligned}$$

3.1

$$\operatorname{arsinh} 1 = 0,8814$$

3.2

$$\operatorname{arcosh} 1 = 1,3170$$

3.3

$$\operatorname{artanh} \tfrac{1}{2} = 0,5493$$

3.4 On pose premièrement $y = \operatorname{arsech}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arsech}(x) \\ \operatorname{sech} y &= x \\ \frac{1}{\cosh y} &= x \\ \cosh y &= \frac{1}{x} \\ y &= \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Puisque $y = \operatorname{arsech}(x)$, on a

$$\operatorname{arsech}(x) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.5 On pose premièrement $y = \operatorname{arcsch}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arcsch}(x) \\ \operatorname{csch} y &= x \\ \frac{1}{\sinh y} &= x \\ \sinh y &= \frac{1}{x} \\ y &= \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Puisque $y = \operatorname{arcsch}(x)$, on a

$$\operatorname{arcsch}(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.6 On pose premièrement $y = \operatorname{arcoth}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arcoth}(x) \\ \coth y &= x \\ \frac{1}{\tanh y} &= x \\ \tanh y &= \frac{1}{x} \\ y &= \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Puisque $y = \operatorname{arcoth}(x)$, on a

$$\operatorname{arcoth}(x) = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.7

$$\begin{aligned} \operatorname{arsech}\frac{3}{4} &= \operatorname{arcosh}\frac{4}{3} \\ &= 0,7954 \end{aligned}$$

3.8

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsch} 3 &= \operatorname{arsinh}\frac{1}{3}\\ &= 0,3275\end{aligned}$$

3.9

$$\begin{aligned}\operatorname{arcoth} 2 &= \operatorname{artanh}\frac{1}{2}\\ &= 0,5493\end{aligned}$$

3.10 On pose premièrement $y = \operatorname{artanh}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
x &= \tanh y\\
x &= \frac{\sinh y}{\cosh y}\\
x &= \frac{\left(e^{y} - e^{-y}\right)/2}{\left(e^{y} + e^{-y}\right)/2}\\
x &= \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}}\\
xe^{y} + xe^{-y} &= e^{y} - e^{-y}\\
x\left(e^{y}\right)^{2} + x &= \left(e^{y}\right)^{2} - 1\\
x\left(e^{y}\right)^{2} - \left(e^{y}\right)^{2} &= -1 - x\\
\left(e^{y}\right)^{2}(x-1) &= -1 - x\\
\left(e^{y}\right)^{2} &= \frac{-1-x}{x-1}\\
\left(e^{y}\right)^{2} &= \frac{1+x}{1-x}\\
e^{y} &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\\
y &= \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}
\end{aligned}$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}$$
$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Puisque $y = \operatorname{artanh}(x)$, on a

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Il y a une restriction pour éviter d'avoir le logarithme d'un nombre négatif ou de 0.
Si $x \geq 1$, le dénominateur dans le logarithme est 0 ou négatif, ce qui n'est pas acceptable.
Si $x \leq -1$, le numérateur dans le logarithme est 0 ou négatif, ce qui n'est pas acceptable.

Cette restriction est bien sensée puisque la fonction arctanh x n'existe qu'entre -1 et 1.

3.11 Version 1

Selon ce qu'on a vu au chapitre 1, on a

$$\arcsin z = -i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned}\arcsin(ix) &= -i\ln\left(i(ix) + \sqrt{1-(ix)^2}\right)\\ &= -i\ln\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\arcsin(ix) &= -i\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) \\
&= i\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1} \\
&= i\ln\left(\frac{1}{-x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= i\ln\left(\frac{1}{-x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= i\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{-x^2-x\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+x^2}+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\right) \\
&= i\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{-x^2+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\right) \\
&= i\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{-x^2+\left(1+x^2\right)}\right) \\
&= i\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1}\right) \\
&= i\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)
\end{aligned}$$

Or, comme

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

on arrive à

$$\arcsin(ix) = i\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$
$$\arcsin(ix) = i\operatorname{arsinh}(x)$$

Version 2

On pose $y = \arcsin(ix)$

On a alors

$$\begin{aligned}
\sin y &= ix \\
-i \sin y &= x \\
-i \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} &= x \\
-\frac{e^{(iy)} - e^{-(iy)}}{2} &= x \\
-\sinh(iy) &= x \\
\sinh(-iy) &= x \\
-iy &= \operatorname{arsinh} x \\
y &= \frac{\operatorname{arsinh} x}{-i} \\
y &= i \operatorname{arsinh} x
\end{aligned}$$

Comme $y = \arcsin(ix)$, on a

$$\arcsin(ix) = i \operatorname{arsinh} x$$

3.12 Version 1

On pose premièrement $y = \operatorname{artanh}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{artanh} x \\
x &= \tanh y \\
\frac{dx}{dy} &= \operatorname{sech}^2 y
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
\cosh^2 y - \sinh^2 y &= 1 \\
1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y} &= \frac{1}{\cosh^2 y} \\
1 - \tanh^2 y &= \operatorname{sech}^2 y
\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{sech}^2 y$$
$$\frac{dx}{dy} = 1 - \tanh^2 y$$
$$\frac{dx}{dy} = 1 - x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

Puisque, $y = \operatorname{artanh}(x)$, on a

$$\frac{d(\operatorname{artanh} x)}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

Version 2

$$\begin{aligned}
\frac{d \operatorname{artanh} x}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{(1+x)(1-x)} + \frac{1+x}{(1+x)(1-x)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(1+x)(1-x)}\right) \\
&= \frac{1}{(1+x)(1-x)} \\
&= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

3.13

$$\begin{aligned}\frac{d\,\text{arsinh}\,5x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{25x^2+1}}\frac{d5x}{dx}\\ &= \frac{5}{\sqrt{25x^2+1}}\end{aligned}$$

3.14

$$\begin{aligned}\frac{d\,\text{arcosh}\,x^4}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{\left(x^4\right)^2-1}}\frac{dx^4}{dx}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(x^4\right)^2-1}}4x^3\\ &= \frac{4x^3}{\sqrt{x^8-1}}\end{aligned}$$

3.15

$$\begin{aligned}\frac{d\left(x^2\,\text{artanh}\sqrt{x}\right)}{dx} &= \frac{d\left(x^2\right)}{dx}\text{artanh}\sqrt{x}+x^2\frac{d\left(\text{artanh}\sqrt{x}\right)}{dx}\\ &= 2x\,\text{artanh}\sqrt{x}+x^2\frac{1}{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}\frac{d\sqrt{x}}{dx}\\ &= 2x\,\text{artanh}\sqrt{x}+x^2\frac{1}{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}\frac{1}{2}x^{-1/2}\\ &= 2x\,\text{artanh}\sqrt{x}+\frac{x^{3/2}}{2}\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

3.16

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\operatorname{arcoth}\frac{2}{x^2}\right)}{dx} &= \frac{1}{1-\left(\frac{2}{x^2}\right)^2}\frac{d\frac{2}{x^2}}{dx} \\
&= \frac{1}{1-\left(\frac{2}{x^2}\right)^2}(-4)\,x^{-3} \\
&= \frac{-4}{1-\frac{4}{x^4}}\frac{1}{x^3} \\
&= \frac{-4x^4}{x^4-4}\frac{1}{x^3} \\
&= \frac{-4x}{x^4-4}
\end{aligned}$$

3.17

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\frac{\operatorname{arsech}\left(x^2\right)}{x^2+4}\right)}{dx} &= \frac{d\left(x^2+4\right)^{-1}}{dx}\operatorname{arsech}x^2+\left(x^2+4\right)^{-1}\frac{d\left(\operatorname{arsech}x^2\right)}{dx} \\
&= -\left(x^2+4\right)^{-2}\frac{d\left(x^2+4\right)}{dx}\operatorname{arsech}x^2+\left(x^2+4\right)^{-1}\left(\frac{-1}{x^2\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}\right)\frac{d\left(x^2\right)}{dx} \\
&= -\left(x^2+4\right)^{-2}2x\operatorname{arsech}x^2+\left(x^2+4\right)^{-1}\left(\frac{-1}{x^2\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}\right)2x \\
&= -\frac{2x\operatorname{arsech}x^2}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{-2x}{\left(x^2-4\right)x^2\sqrt{1-x^4}} \\
&= -\frac{2x}{x^2+4}\left(\frac{\operatorname{arsech}x^2}{x^2+4}+\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^4}}\right)
\end{aligned}$$

3.18 Au minimum, la dérivée de la fonction est nulle. On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(8\cosh x-\sinh x\right)}{dx}&=0\\
8\sinh x-\cosh x&=0\\
8\sinh x&=\cosh x\\
8\tanh x&=1\\
\tanh x&=\frac{1}{8}\\
x&=\operatorname{artanh}\frac{1}{8}\\
x&=0{,}1257
\end{aligned}$$

La valeur minimale de la fonction est alors

$$8\cosh\left(0{,}1257\right)-\sinh\left(0{,}1257\right)=7{,}9373$$

Il faudrait alors s'assurer que c'est un minimum. Si c'est un minimum, la 2e dérivée de la fonction doit être positive, La deuxième dérivée est

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\left(8\cosh x-\sinh x\right)}{dx^2}&=\frac{d\left(8\sinh x-\cosh x\right)}{dx}\\
&=8\cosh x-\sinh x
\end{aligned}$$

La valeur de la deuxième dérivée est donc

$$8\cosh\left(0{,}1257\right)-\sinh\left(0{,}1257\right)=7{,}9373$$

Comme le résultat est positif, il s'agit bel et bien d'un minimum.

3.19 On pose

$$\begin{aligned}
u&=2x\\
du&=2dx
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{49+4x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{49+(2x)^2}}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{49+(2x)^2}}\,2dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{49+u^2}}\,du \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{u}{7}\right)+C \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{2x}{7}\right)+C\end{aligned}$$

3.20 On pose

$$\begin{aligned}u &= 2x \\ du &= 2dx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{81-4x^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{81-(2x)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{81-(2x)^2}\,2dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{81-u^2}\,du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\operatorname{artanh}\left(\frac{u}{9}\right)\right]_0^2 \\ &= \left[\frac{1}{18}\operatorname{artanh}\left(\frac{2}{9}\right)-\frac{1}{18}\operatorname{artanh}\left(\frac{0}{9}\right)\right] \\ &= 0,01256\end{aligned}$$

Notez qu'on prend l'arctanh comme réponse de l'intégrale puisque les valeurs entre les bornes sont inférieures à 9 (qui est la valeur de a).

3.21 On pose

$$u = 2x$$
$$du = 2dx$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_5^6 \frac{1}{81-4x^2}\,dx &= \int_5^6 \frac{1}{81-(2x)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_5^6 \frac{1}{81-(2x)^2}\,2dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{10}^{12} \frac{1}{81-u^2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\operatorname{arcoth}\left(\frac{u}{9}\right)\right]_{10}^{12} \\
&= \left[\frac{1}{18}\operatorname{arcoth}\left(\frac{12}{9}\right)-\frac{1}{18}\operatorname{arcoth}\left(\frac{10}{9}\right)\right] \\
&= \left[\frac{1}{18}\operatorname{artanh}\left(\frac{9}{12}\right)-\frac{1}{18}\operatorname{artanh}\left(\frac{9}{10}\right)\right] \\
&= 0,05405-0,08179 \\
&= -0,02774
\end{aligned}$$

Notez qu'on prend l'arcoth comme réponse de l'intégrale puisque les valeurs entre les bornes sont supérieures à 9 (qui est la valeur de a).

3.22 On pose

$$u = e^x$$
$$du = e^x dx$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-25}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(e^x\right)^2-25}}\,e^x dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2-25}}\,du \\ &= \operatorname{arcosh}\left(\frac{u}{5}\right)+C \\ &= \operatorname{arcosh}\left(\frac{e^x}{5}\right)+C\end{aligned}$$

3.23 On pose

$$\begin{aligned}u &= x^2 \\ du &= 2xdx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^4}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-\left(x^2\right)^2}}\,2xdx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u\sqrt{4-u^2}}\,du \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{arsech}\left(\frac{u}{2}\right)+C\right) \\ &= -\frac{1}{4}\operatorname{arsech}\left(\frac{x^2}{2}\right)+C\end{aligned}$$

3.24 On pose

$$\begin{aligned}u &= x+1 \\ du &= dx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+1+9}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+9}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2+9}}\,dx \\ &= \operatorname{arsinh}\left(\frac{u}{3}\right)+C \\ &= \operatorname{arsinh}\left(\frac{x+1}{3}\right)+C\end{aligned}$$

3.25 On pose

$$\begin{aligned}u &= x+1 \\ du &= dx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9x^2+12x+5}}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9x^2+12x+4+1}}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^2+1}}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^2+1}}\,3dx \\ &= \frac{1}{3}\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du \\ &= \frac{1}{3}\Big[\operatorname{arsinh}(u)\Big]_2^5 \\ &= \frac{1}{3}\big(\operatorname{arsinh}(5)-\operatorname{arsinh}(2)\big) \\ &= 0,2896\end{aligned}$$

3.26 *<u>Première preuve</u>*

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx\end{aligned}$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned}u &= \sin x \\ du &= \cos x dx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{1-u^2} du \\ &= \operatorname{artanh} u + C \\ &= \operatorname{artanh}(\sin x) + C\end{aligned}$$

<u>*Deuxième preuve*</u>

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \frac{1}{\sin x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx\end{aligned}$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned}u &= \cos x \\ du &= -\sin x dx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx \\ &= -\int \frac{1}{1-u^2} du \\ &= -\operatorname{artanh} u + C \\ &= -\operatorname{artanh}(\cos x) + C\end{aligned}$$

3.27 La position de l'objet sur la ligne est (5, 0). La distance entre l'objet et l'origine est donc

$$d = \sqrt{5^2 + y^2}$$

Puisque la vitesse est proportionnelle à la distance entre l'objet et l'origine, on a

$$v = k\sqrt{5^2 + y^2}$$

Puisqu'on sait que la vitesse est de 2 m/s quand l'objet est à (5 m, 0), on a

$$\begin{aligned}2\tfrac{m}{s} &= k\sqrt{(5m)^2 + (0m)^2} \\ k &= \tfrac{2}{5s}\end{aligned}$$

La vitesse est donc

$$v = \frac{2}{5s}\sqrt{(5m)^2 + y^2}$$

Pour trouver la position, on utilise

$$v = \frac{dy}{dt} \text{ (puisque l'objet se déplace en } y\text{)}$$

On a alors

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{5s}\sqrt{(5m)^2 + y^2}$$

Il ne reste qu'à résoudre cette équation pour trouver la position en y

$$\frac{dy}{\sqrt{(5m)^2 + y^2}} = \frac{2}{5s} dt$$
$$\operatorname{arsinh} \frac{y}{5m} = \frac{2}{5s} \cdot t + C$$

On peut trouver la constante puisqu'on sait qu'à $t = 0$, l'objet est à $y = 0$. On a alors

$$\operatorname{arsinh} \frac{0m}{5m} = \frac{2}{5s} \cdot 0s + C$$
$$C = 0$$

La position est donc

$$\operatorname{arsinh} \frac{y}{5m} = \frac{2}{5s} \cdot t$$
$$\frac{y}{5m} = \sinh\left(\frac{2}{5s} \cdot t\right)$$
$$y = 5m \cdot \sinh\left(\frac{2}{5s} \cdot t\right)$$

À $t = 5$ s, la position en y de l'objet est donc

$$y = 5m \cdot \sinh\left(\frac{2}{5s} \cdot 5s\right)$$
$$y = 18{,}134m$$

La position est donc (5 m, 18,134 m).