Solutionnaire du chapitre 1

1.1

$$\begin{aligned}(7-3i)-(-2+4i)&=7-3i+2-4i\\&=9-7i\end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned}(2+4i)^2&=(2+4i)(2+4i)\\&=4+8i+8i+16i^2\\&=4+8i+8i-16\\&=-12+16i\end{aligned}$$

1.3.

$$\begin{aligned}(3+5i)(3-5i)&=9-15i+15i-25i^2\\&=9-15i+15i+25\\&=34\end{aligned}$$

1.4.

$$\begin{aligned}(5+2i)\cdot i&=5i+2i^2\\&=5i-2\\&=-2+5i\end{aligned}$$

1.5.

$$\begin{aligned}(1+i)^2&=(1+i).(1+i)\\&=1+i+i+i^2\\&=1+i+i-1\\&=2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+i)^4 &= (1+i)^2\cdot(1+i)^2\\ &= 2i\cdot 2i\\ &= 4i^2\\ &= -4\end{aligned}$$

1.6.

$$\begin{aligned}\frac{11+2i}{4+3i} &= \frac{11+2i}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}\\ &= \frac{44-33i+8i-6i^2}{16-12i+12i-9i^2}\\ &= \frac{44-33i+8i+6}{16-12i+12i+9}\\ &= \frac{50-25i}{25}\\ &= 2-i\end{aligned}$$

1.7.

$$\begin{aligned}\frac{52,5-12,5i}{3-i} &= \frac{52,5-12,5i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}\\ &= \frac{157,5+52,5i-37,5i-12,5i^2}{9+3i-3i-i^2}\\ &= \frac{157,5+52,5i-37,5i+12,5}{9+3i-3i+1}\\ &= \frac{170+15i}{10}\\ &= 17+1,5i\end{aligned}$$

1.8.

$$\begin{aligned}\frac{101}{10-i} &= \frac{101}{10-i}\cdot\frac{10+i}{10+i}\\ &= \frac{1010+101i}{100+10i-10i-i^2}\\ &= \frac{1010+101i}{100+10i-10i+1}\\ &= \frac{1010+101i}{101}\\ &= 10+i\end{aligned}$$

1.9

$$\begin{aligned}z_1-z_2 &= (3+4i)-(5-2i)\\ &= -2+6i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z_1-z_2)^2 &= (-2+6i)(-2+6i)\\ &= 4-12i-12i+36i^2\\ &= 4-24i-36\\ &= -32-24i\end{aligned}$$

1.10

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3+4i}{5-2i}\\ &= \frac{3+4i}{5-2i}\cdot\frac{5+2i}{5+2i}\\ &= \frac{15+6i+20i+8i^2}{25+10i-10i-4i^2}\\ &= \frac{15+20i+6i-8}{25+10i-10i+4}\\ &= \frac{7+26i}{29}\\ &= \tfrac{7}{29}+\tfrac{26}{29}i\end{aligned}$$

1.11.

$$
\begin{aligned}
z_1^2 &= (3+4i)(3+4i) \\
&= 9+12i+12i+16i^2 \\
&= 9+12i+12i-16 \\
&= -7+24i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z_1^2} &= \frac{1}{-7+24i} \\
&= \frac{1}{-7+24i}\cdot\frac{-7-24i}{-7-24i} \\
&= \frac{-7-24i}{49+96i-96i-576i^2} \\
&= \frac{-7-24i}{49+96i-96i+576} \\
&= \frac{-7-24i}{1635} \\
&= \tfrac{-7}{625}-\tfrac{24}{625}i
\end{aligned}
$$

1.12.

$$
\begin{aligned}
\frac{z_2}{2z_1} &= \frac{5-2i}{6+8i} \\
&= \frac{5-2i}{6+8i}\cdot\frac{6-8i}{6-8i} \\
&= \frac{30-40i-12i+16i^2}{36-48i+48i-64i^2} \\
&= \frac{30-40i-12i-16}{36-48i+48i+64} \\
&= \frac{14-52i}{100} \\
&= \tfrac{7}{50}-\tfrac{13}{25}i
\end{aligned}
$$

1.13.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+i} &= \frac{1}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\\ &= \frac{2-i}{4-2i+2i-i^2}\\ &= \frac{2-i}{4-2i+2i+1}\\ &= \frac{2-i}{5}\\ &= \tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{5}i\end{aligned}$$

La partie réelle est donc 2/5.

1.14.

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{3+4i} &= \frac{2+i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}\\ &= \frac{6-8i+3i-4i^2}{9-12i+12i-16i^2}\\ &= \frac{6-8i+3i+4}{9-12i+12i+16}\\ &= \frac{10-5i}{25}\\ &= \tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{5}i\end{aligned}$$

La partie imaginaire est donc -1/5.

1.15.

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= (1+i)(1+i)\\ &= 1+i+i+i^2\\ &= 1+i+i-1\\ &= 2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^2}{3+2i} &= \frac{2i}{3+2i}\\ &= \frac{2i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}\\ &= \frac{6i-4i^2}{9-6i+6i-4i^2}\\ &= \frac{6i+4}{9-12i+12i+4}\\ &= \frac{4+6i}{13}\\ &= \tfrac{4}{13}+\tfrac{6}{13}i\end{aligned}$$

La partie réelle est donc 4/13.

1.16.

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{4-3i} &= \frac{2-i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i}\\ &= \frac{8+6i-4i-3i^2}{16+12i-12i-9i^2}\\ &= \frac{8+6i-4i+3}{16+12i-12i+9}\\ &= \frac{11+2i}{25}\\ &= \tfrac{11}{25}+\tfrac{2}{25}i\end{aligned}$$

La partie imaginaire est donc 2/25.

2.1. Le complexe conjugué est

$$\overline{(1-i)} = 1+i$$

2.2. Le complexe conjugué est

$$\overline{(2i)} = -2i$$

2.3. Le complexe conjugué est

$$\overline{(-5+7i)} = -5-7i$$

2.4. Le complexe conjugué est

$$\overline{(6)} = 6$$

2.5.

$$\begin{aligned} |1+i| &= \sqrt{1^2+1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |1+i|^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2.6.

$$\begin{aligned} \left|-\frac{3}{2}i\right| &= \sqrt{0^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2.7.

$$\begin{aligned} |\cos\theta + i\sin\theta| &= \sqrt{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.8.

$$\begin{aligned} |6-8i| &= \sqrt{6^2+(-8)^2} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

2.9.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1+4i}{4+i}\right| &= \frac{|1+4i|}{|4+i|}\cdot \\ &= \frac{\sqrt{1^2+4^2}}{\sqrt{4^2+1^2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

2.10.

$$\begin{aligned}\left|\frac{z}{\overline{z}}\right| &= \frac{|z|}{|\overline{z}|} \\ &= \frac{|x+iy|}{|x-iy|} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(-y)^2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

2.11.

$$\begin{aligned}\left|\frac{(3+4i)^2}{3-4i}\right| &= \frac{\left|(3+4i)^2\right|}{|3-4i|} \\ &= \frac{|(3+4i)\cdot(3+4i)|}{|3-4i|} \\ &= \frac{|(3+4i)|\cdot|(3+4i)|}{|3-4i|} \\ &= \frac{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \\ &= \frac{5\cdot 5}{5} \\ &= 5\end{aligned}$$

2.12.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{7-\pi i}\right| &= \frac{|1|}{|7-\pi i|}\\ &= \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{7^2+(-\pi)^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{49+\pi^2}}\end{aligned}$$

2.13. La distance est

$$\begin{aligned}d &= |(1-2i)-(4+5i)|\\ &= |-3-7i|\\ &= \sqrt{(-3)^2+(-7)^2}\\ &= \sqrt{58}\end{aligned}$$

2.14. La distance est

$$\begin{aligned}d &= |(-5+2i)-(5i)|\\ &= |-5-3i|\\ &= \sqrt{(-5)^2+(-3)^2}\\ &= \sqrt{34}\end{aligned}$$

2.15. La distance est

$$\begin{aligned}d &= |(10+i)-(-8+5i)|\\ &= |18-4i|\\ &= \sqrt{18^2+4^2}\\ &= \sqrt{340}\end{aligned}$$

2.16. La distance est

$$\begin{aligned} d &= \left|(1)-(-3+2i)\right| \\ &= \left|4-2i\right| \\ &= \sqrt{4^2+(-2)^2} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

3.1.

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{2}{-2}$$
$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

3.2.

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{0}{-4}$$
$$\theta = \pi$$

3.3.

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{\frac{-3}{2}}{0}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

3.4.

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

3.5. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |1+i| \\ &= \sqrt{1^2+1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{1}{1}$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

La forme polaire est donc

$$\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)$$

3.6. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |-4+4i| \\ &= \sqrt{(-4)^2+4^2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{4}{-4}$$
$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

La forme polaire est donc

$$4\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right)$$

3.7. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |4i| \\ &= \sqrt{0^2 + 4^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{4}{0}$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

La forme polaire est donc

$$4\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$

3.8. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |-7| \\ &= \sqrt{(-7)^2 + 0^2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{0}{-7}$$
$$\theta = \pi$$

La forme polaire est donc

$$7\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$$

3.9. Le module du numérateur est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |2+2i| \\ &= \sqrt{2^2+2^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Le module du dénominateur est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |1-i| \\ &= \sqrt{1^2+1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Le module de la division est donc

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

L'argument du numérateur est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{2}{2}$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

L'argument du dénominateur est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{-1}{1}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

L'argument de la division est donc

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_2 - \theta_1 \\ &= \frac{\pi}{4} - -\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

La forme polaire de la division est donc

$$2\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$

3.10. Le module du numérateur est

$$\begin{aligned}r &= |z| \\ &= \left|\sqrt{2}i\right| \\ &= \sqrt{0^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Le module du dénominateur est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |3+3i| \\ &= \sqrt{3^2+3^2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Le module de la division est donc

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

L'argument du numérateur est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{0}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

L'argument du dénominateur est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

L'argument de la division est donc

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_2 - \theta_1 \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

La forme polaire de la division est donc

$$\tfrac{1}{3}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)$$

3.11.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= 4\cos\tfrac{\pi}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= 4\sin\tfrac{\pi}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

La forme cartésienne est donc

$$4i$$

3.12.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= \sqrt{8}\cos\tfrac{\pi}{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= \sqrt{8}\sin\tfrac{\pi}{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

La forme cartésienne est donc

$$2+2i$$

3.13.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= \pi\cos\pi \\ &= -\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= \pi \sin\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

La forme cartésienne est donc

$$-\pi$$

3.14.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= \sqrt{50}\cos\tfrac{3\pi}{4} \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= \sqrt{50}\sin\tfrac{3\pi}{4} \\ &= 5 \end{aligned}$$

La forme cartésienne est donc

$$-5+5i$$

4.1. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned} \left|4+4\sqrt{3}i\right| &= \sqrt{4^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{4\sqrt{3}}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Le module du nombre exposant 5 est donc

$$r = 8^5 = 32768$$

L'argument du nombre exposant 5 est

$$\theta = 5 \cdot \frac{\pi}{3}$$

Le nombre exposant 5 est donc

$$32768\left(\cos\tfrac{5\pi}{3} + i\sin\tfrac{5\pi}{3}\right)$$

Sous forme polaire, ce nombre est

$$16384 - 16384\sqrt{3}i$$

4.2. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned}\left|2\sqrt{3}+2i\right| &= \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2}\\ &= 4\end{aligned}$$

et son argument est

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{y}{x}\\ \tan\theta &= \frac{2}{2\sqrt{3}}\\ \theta &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Le module du nombre exposant 6 est donc

$$r = 4^6 = 4096$$

L'argument du nombre exposant 6 est

$$\theta = 6 \cdot \frac{\pi}{6} = \pi$$

Le nombre exposant 6 est donc

$$4096\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$$

Sous forme polaire, ce nombre est

$$-4096$$

4.3. Le module du numérateur de départ est

$$\begin{aligned}|5+5i| &= \sqrt{5^2+5^2}\\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

et son argument est

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{y}{x}\\ \tan\theta &= \frac{5}{5}\\ \theta &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Le module du numérateur de départ est

$$\begin{aligned}\left|10\sqrt{3}+10i\right| &= \sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2+10^2}\\ &= 20\end{aligned}$$

et son argument est

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{y}{x}\\ \tan\theta &= \frac{10}{10\sqrt{3}}\\ \theta &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Le module de la division est donc

$$r = \frac{5\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'argument de la division est

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

Le module de la division exposant 6 est donc

$$r=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{6}=\frac{1}{512}$$

L'argument de la division exposant 6 est

$$\theta=6\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$$

La division exposant 6 est donc

$$\frac{1}{512}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Sous forme polaire, ce nombre est

$$\frac{i}{512}$$

4.4. Le module du numérateur de départ est

$$\begin{aligned}\left|6\sqrt{3}+6i\right|&=\sqrt{\left(6\sqrt{3}\right)^{2}+6^{2}}\\&=12\end{aligned}$$

et son argument est

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{y}{x}\\\tan\theta&=\frac{6}{6\sqrt{3}}\\\theta&=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Le module du numérateur de départ est

$$\begin{aligned}\left|6+6i\right|&=\sqrt{6^{2}+6^{2}}\\&=6\sqrt{2}\end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{6}{6}$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Le module de la division est donc

$$r = \frac{12}{6\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

L'argument de la division est

$$\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$$

Le module de la division exposant -3 est donc

$$r = \left(\sqrt{2}\right)^{-3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'argument de la division exposant -3 est

$$\theta = -3 \cdot -\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

La division exposant -3 est donc

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Sous forme polaire, ce nombre est

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

4.5. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned} |i| &= \sqrt{0^2 + 1^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{1}{0}$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt{1} = 1$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \frac{5\pi}{4}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$1\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}\right)$$

Sous forme polaire, ces nombres sont

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$
$$-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

4.6. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned}|-i| &= \sqrt{0^2 + (-1)^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{-1}{0}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt{1} = 1$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{2}\cdot -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$1\left(\cos\tfrac{-\pi}{4} + i\sin\tfrac{-\pi}{4}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right)$$

Sous forme polaire, ces nombres sont

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$
$$-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

4.7. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned}|-4| &= \sqrt{(-4)^2 + 0^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{0}{-4}$$
$$\theta = \pi$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt{4} = 2$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$$
$$\theta = \frac{1}{2} \cdot (\pi + 2\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$2\left(\cos \tfrac{\pi}{2} + i \sin \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$2\left(\cos \tfrac{3\pi}{2} + i \sin \tfrac{3\pi}{2}\right)$$

Sous forme polaire, ces nombres sont

$$2i$$
$$-2i$$

4.8. Le module du nombre de départ est

$$\left|1 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= 2$$

et son argument est

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt{2}$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot -\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$$
$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi \right) = \frac{5\pi}{6}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{-\pi}{6} + i\sin\tfrac{-\pi}{6}\right)$$
$$\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}\right)$$

Sous forme polaire, ces nombres sont

$$\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

4.9. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned} |-1| &= \sqrt{(-1)^2 + 0^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{0}{-1}$$
$$\theta = \pi$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt{1} = 1$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{4} \cdot (\pi + 2\pi) = \frac{3\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{4} \cdot (\pi + 4\pi) = \frac{5\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{4} \cdot (\pi + 6\pi) = \frac{7\pi}{4}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$1\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4}\right)$$

Sous forme polaire, ces nombres sont

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

4.10. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned} |3+4i| &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$
$$\theta = 0{,}9273$$

Le module de la racine est donc

$$r=\sqrt{5}$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta=\frac{1}{2}\cdot 0,9273=0,4636$$
$$\theta=\frac{1}{2}\cdot\left(0,9273+2\pi\right)=3,6052$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$\sqrt{5}\left(\cos\left(0,4636\right)+i\sin\left(0,4636\right)\right)$$
$$\sqrt{5}\left(\cos\left(3,6052\right)+i\sin\left(3,6052\right)\right)$$

Sous forme polaire, ces nombres sont

$$-2-i$$
$$2+i$$

4.11. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned}\left|-5+12i\right|&=\sqrt{5^2+12^2}\\&=13\end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$
$$\tan\theta=\frac{12}{-5}$$
$$\theta=1,9659$$

Le module de la racine est donc

$$r=\sqrt{13}$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot 1,9659 = 0,9828$$
$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \left(1,9659 + 2\pi\right) = 4,1244$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$\sqrt{5}\left(\cos\left(0,9828\right) + i\sin\left(0,9828\right)\right)$$
$$\sqrt{5}\left(\cos\left(4,1244\right) + i\sin\left(4,1244\right)\right)$$

Sous forme polaire, ces nombres sont

$$2 + 3i$$
$$-2 - 3i$$

4.12. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned} \left|-8 - 6i\right| &= \sqrt{\left(-8\right)^2 + \left(-6\right)^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{-6}{-8}$$
$$\theta = 3,7851$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt{10}$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot 3,7851 = 1,8925$$
$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \left(3,7851 + 2\pi\right) = 5,0341$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$\sqrt{10}\left(\cos(1,8925)+i\sin(1,8925)\right)$$
$$\sqrt{10}\left(\cos(5,0341)+i\sin(5,0341)\right)$$

Sous forme polaire, ces nombres sont

$$-1+3i$$
$$1-3i$$

4.13. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned}|1+i| &= \sqrt{1^2+1^2}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{1}{1}$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt[6]{2}$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$
$$\theta = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right) = \frac{3\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right) = \frac{17\pi}{12}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{12}+i\sin\tfrac{\pi}{12}\right)$$
$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{4}+i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right)$$
$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\tfrac{17\pi}{12}+i\sin\tfrac{17\pi}{12}\right)$$

4.14. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned}|-1| &= \sqrt{(-1)^2+0^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

et son argument est

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{y}{x}\\ \tan\theta &= \frac{0}{-1}\\ \theta &= \pi\end{aligned}$$

Le module de la racine est donc

$$r=\sqrt[5]{1}=1$$

Les arguments de la racine sont

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{5}\cdot\pi=\frac{\pi}{5}\\ \theta &= \frac{1}{5}\cdot(\pi+2\pi)=\frac{3\pi}{5}\\ \theta &= \frac{1}{5}\cdot(\pi+4\pi)=\pi\\ \theta &= \frac{1}{5}\cdot(\pi+6\pi)=\frac{7\pi}{5}\\ \theta &= \frac{1}{5}\cdot(\pi+8\pi)=\frac{9\pi}{5}\end{aligned}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$1\left(\cos\tfrac{\pi}{5}+i\sin\tfrac{\pi}{5}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{3\pi}{5}+i\sin\tfrac{3\pi}{5}\right)$$
$$1\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{7\pi}{5}+i\sin\tfrac{7\pi}{5}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{9\pi}{5}+i\sin\tfrac{9\pi}{5}\right)$$

4.15. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned}|-1| &= \sqrt{(-1)^2+0^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

et son argument est

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{y}{x}\\ \tan\theta &= \frac{0}{-1}\\ \theta &= \pi\end{aligned}$$

Le module de la racine est donc

$$r=\sqrt[6]{1}=1$$

Les arguments de la racine sont

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{6}\cdot\pi=\frac{\pi}{6}\\ \theta &= \frac{1}{6}\cdot(\pi+2\pi)=\frac{\pi}{2}\\ \theta &= \frac{1}{6}\cdot(\pi+4\pi)=\frac{5\pi}{6}\\ \theta &= \frac{1}{6}\cdot(\pi+6\pi)=\frac{7\pi}{6}\\ \theta &= \frac{1}{6}\cdot(\pi+8\pi)=\frac{3\pi}{2}\\ \theta &= \frac{1}{6}\cdot(\pi+10\pi)=\frac{11\pi}{6}\end{aligned}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$1\left(\cos\tfrac{\pi}{6}+i\sin\tfrac{\pi}{6}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{\pi}{2}+i\sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{5\pi}{6}+i\sin\tfrac{5\pi}{6}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{7\pi}{6}+i\sin\tfrac{7\pi}{6}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{3\pi}{2}+i\sin\tfrac{3\pi}{2}\right)$$
$$1\left(\cos\tfrac{11\pi}{6}+i\sin\tfrac{11\pi}{6}\right)$$

4.16. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned}|1| &= \sqrt{1^2+0^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{0}{1}$$
$$\theta = 0$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt[8]{1} = 1$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{8} \cdot 0 = 0$$
$$\theta = \frac{1}{8} \cdot (0 + 2\pi) = \frac{\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{8} \cdot (0 + 4\pi) = \frac{\pi}{2}$$
$$\theta = \frac{1}{8} \cdot (0 + 6\pi) = \frac{3\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{8} \cdot (0 + 8\pi) = \pi$$
$$\theta = \frac{1}{8} \cdot (0 + 10\pi) = \frac{5\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{8} \cdot (0 + 12\pi) = \frac{3\pi}{2}$$
$$\theta = \frac{1}{8} \cdot (0 + 14\pi) = \frac{7\pi}{4}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$1(\cos 0 + i \sin 0)$$
$$1(\cos \tfrac{\pi}{4} + i \sin \tfrac{\pi}{4})$$
$$1(\cos \tfrac{\pi}{2} + i \sin \tfrac{\pi}{2})$$
$$1(\cos \tfrac{3\pi}{4} + i \sin \tfrac{3\pi}{4})$$
$$1(\cos \pi + i \sin \pi)$$
$$1(\cos \tfrac{5\pi}{4} + i \sin \tfrac{5\pi}{4})$$
$$1(\cos \tfrac{3\pi}{2} + i \sin \tfrac{3\pi}{2})$$
$$1(\cos \tfrac{7\pi}{4} + i \sin \tfrac{7\pi}{4})$$

4.17. Selon la formule de l'équation quadratique, la solution est

$$z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$z=\frac{-1+\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(1-i)}}{2}$$
$$z=\frac{-1+\sqrt{1-(4-4i)}}{2}$$
$$z=\frac{-1+\sqrt{-3+4i}}{2}$$

On a alors une racine à faire. Le module du nombre dans la racine est

$$\begin{aligned}|-3+4i|&=\sqrt{(-3)^2+4^2}\\&=5\end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$
$$\tan\theta=\frac{4}{-3}$$
$$\theta=2,2143$$

Le module de la racine est donc

$$r=\sqrt{5}$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta=\frac{1}{2}\cdot 2,2143=1,1071$$
$$\theta=\frac{1}{2}\cdot(2,2143+2\pi)=4,2487$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$\sqrt{5}\left(\cos 1,1071+i\sin 1,1071\right)$$
$$\sqrt{5}\left(\cos 4,2487+i\sin 4,2487\right)$$

En cartésien, ces racines sont

$$1+2i$$
$$-1-2i$$

La première solution de l'équation quadratique est donc

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1+\sqrt{-3+4i}}{2} \\ &= \frac{-1+1+2i}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

La deuxième solution de l'équation quadratique est donc

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1+\sqrt{-3+4i}}{2} \\ &= \frac{-1+-1-2i}{2} \\ &= -1-i \end{aligned}$$

Les solutions sont donc i et $-1 - i$.

4.18. Selon la formule de l'équation quadratique, la solution est

$$\begin{aligned} z &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ z &= \frac{3+\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot (3-i)}}{2} \\ z &= \frac{3+\sqrt{9-(12-4i)}}{2} \\ z &= \frac{3+\sqrt{-3+4i}}{2} \end{aligned}$$

On a alors une racine à faire. Le module du nombre dans la racine est

$$\begin{aligned} |-3+4i| &= \sqrt{(-3)^2+4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{4}{-3}$$
$$\theta = 2,2143$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt{5}$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{2}\cdot 2,2143 = 1,1071$$
$$\theta = \frac{1}{2}\cdot\left(2,2143 + 2\pi\right) = 4,2487$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$\sqrt{5}\left(\cos 1,1071 + i\sin 1,1071\right)$$
$$\sqrt{5}\left(\cos 4,2487 + i\sin 4,2487\right)$$

En cartésien, ces racines sont

$$1 + 2i$$
$$-1 - 2i$$

La première solution de l'équation quadratique est donc

$$\begin{aligned} z &= \frac{3+\sqrt{-3+4i}}{2} \\ &= \frac{3+1+2i}{2} \\ &= 2+i \end{aligned}$$

La deuxième solution de l'équation quadratique est donc

$$\begin{aligned} z &= \frac{3+\sqrt{-3+4i}}{2} \\ &= \frac{3+-1-2i}{2} \\ &= 1-i \end{aligned}$$

Les solutions sont donc 2 + *i* et 1 – *i*.

4.19. Selon la formule de l'équation quadratique, la solution est

$$\begin{aligned} z &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ z &= \frac{5+i+\sqrt{(-5-i)^2-4\cdot 1\cdot (8+i)}}{2} \\ z &= \frac{5+i+\sqrt{25+5i+5i+i^2-(32+4i)}}{2} \\ z &= \frac{5+i+\sqrt{25+5i+5i-1-(32+4i)}}{2} \\ z &= \frac{5+i+\sqrt{24+10i-(32+4i)}}{2} \\ z &= \frac{5+i+\sqrt{-8+6i}}{2} \end{aligned}$$

On a alors une racine à faire. Le module du nombre dans la racine est

$$\begin{aligned} |-8+6i| &= \sqrt{(-8)^2+6^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

et son argument est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{6}{-8} \\ \theta &= 2,4981 \end{aligned}$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt{10}$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot 2,4981 = 1,2490$$
$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \left(2,4981 + 2\pi\right) = 4,3906$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$\sqrt{10}\left(\cos 1,2490 + i \sin 1,2490\right)$$
$$\sqrt{10}\left(\cos 4,3906 + i \sin 4,3906\right)$$

En cartésien, ces racines sont

$$1 + 3i$$
$$-1 - 3i$$

La première solution de l'équation quadratique est donc

$$\begin{aligned} z &= \frac{5 + i + \sqrt{-8 + 6i}}{2} \\ &= \frac{5 + i + 1 + 3i}{2} \\ &= 3 + 2i \end{aligned}$$

La deuxième solution de l'équation quadratique est donc

$$\begin{aligned} z &= \frac{5 + i + \sqrt{-8 + 6i}}{2} \\ &= \frac{5 + i + -1 - 3i}{2} \\ &= 2 - i \end{aligned}$$

Les solutions sont donc $3 + 2i$ et $2 - i$.

4.20. On va poser $u = z^2$. L'équation devient alors

$$u^2 - 3(1 + 2i)u = 8 - 6i$$

Selon la formule de l'équation quadratique, la solution de cette équation est

$$\begin{aligned}
u &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&= \frac{3+6i+\sqrt{(-3-6i)^2-4\cdot 1\cdot(-8+6i)}}{2} \\
&= \frac{3+6i+\sqrt{9+18i+18i+36i^2-(-32+24i)}}{2} \\
&= \frac{3+6i+\sqrt{9+18i+18i-36-(-32+24i)}}{2} \\
&= \frac{3+6i+\sqrt{-27+36i-(-32+24i)}}{2} \\
&= \frac{3+6i+\sqrt{5+12i}}{2}
\end{aligned}$$

On a alors une racine à faire. Le module du nombre dans la racine est

$$\begin{aligned}
|5+12i| &= \sqrt{5^2+12^2} \\
&= 13
\end{aligned}$$

et son argument est

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{y}{x} \\
\tan\theta &= \frac{12}{5} \\
\theta &= 1{,}1760
\end{aligned}$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt{13}$$

Les arguments de la racine sont

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{1}{2}\cdot 1{,}1760 = 0{,}5880 \\
\theta &= \frac{1}{2}\cdot(1{,}1760+2\pi) = 3{,}7296
\end{aligned}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$\sqrt{13}\left(\cos 0,5880+i\sin 0,5880\right)$$
$$\sqrt{13}\left(\cos 3,7296+i\sin 3,7296\right)$$

En cartésien, ces racines sont

$$3+2i$$
$$-3-2i$$

La première solution de l'équation quadratique est donc

$$\begin{aligned} u &= \frac{3+6i+\sqrt{5+12i}}{2} \\ &= \frac{3+6i+3+2i}{2} \\ &= 3+4i \end{aligned}$$

La deuxième solution de l'équation quadratique est donc

$$\begin{aligned} z &= \frac{3+6i+\sqrt{5+12i}}{2} \\ &= \frac{3+6i+-3-2i}{2} \\ &= 2i \end{aligned}$$

On a maintenant les valeurs de u (qui est z^2). Il reste à trouver les valeurs de z avec

$$z=\sqrt{u}$$

On va premièrement faire la racine de 3 + 4i. Le module du nombre dans la racine est

$$\begin{aligned} \left|3+4i\right| &= \sqrt{3^2+4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$
$$\tan\theta=\frac{4}{3}$$
$$\theta=0,9273$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt{5}$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot 0,9273 = 0,4636$$
$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \left(0,9273 + 2\pi\right) = 3,6052$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$\sqrt{5}\left(\cos 0,4636 + i \sin 0,4636\right)$$
$$\sqrt{5}\left(\cos 3,6052 + i \sin 3,6052\right)$$

En cartésien, ces racines sont

$$2 + i$$
$$-2 - i$$

Ce sont nos deux premières réponses.

On va premièrement faire la racine de $2i$. Le module du nombre dans la racine est

$$\begin{aligned} |2i| &= \sqrt{0^2 + 2^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{2}{0}$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt{2}$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \right) = \frac{5\pi}{4}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)$$
$$\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}\right)$$

En cartésien, ces racines sont

$$1+i$$
$$-1-i$$

Ce sont nos troisième et quatrième réponses. Les 4 réponses sont donc

$$2+i$$
$$-2-i$$
$$1+i$$
$$-1-i$$

4.21. On va premièrement trouver la position des points dans le plan complexe en trouvant les valeurs de la 5e racine de 1. Le module du nombre de départ est

$$\begin{aligned} |1| &= \sqrt{1^2 + 0^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et son argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{0}{1}$$
$$\theta = 0$$

Le module de la racine est donc

$$r = \sqrt[5]{1} = 1$$

Les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{5} \cdot 0 = 0$$
$$\theta = \frac{1}{5} \cdot (0 + 2\pi) = \frac{2\pi}{5}$$
$$\theta = \frac{1}{5} \cdot (0 + 4\pi) = \frac{4\pi}{5}$$
$$\theta = \frac{1}{5} \cdot (0 + 6\pi) = \frac{6\pi}{5}$$
$$\theta = \frac{1}{5} \cdot (0 + 8\pi) = \frac{8\pi}{5}$$

Les valeurs de la racine sont donc

$$1(\cos 0 + i \sin 0)$$
$$1\left(\cos \tfrac{2\pi}{5} + i \sin \tfrac{2\pi}{5}\right)$$
$$1\left(\cos \tfrac{4\pi}{5} + i \sin \tfrac{4\pi}{5}\right)$$
$$1\left(\cos \tfrac{6\pi}{5} + i \sin \tfrac{6\pi}{5}\right)$$
$$1\left(\cos \tfrac{8\pi}{5} + i \sin \tfrac{8\pi}{5}\right)$$

Pour la droite 1, on cherche la distance entre la 1re racine et la 2^{e} racine. La distance est

$$\begin{aligned} d &= \left|(\cos 0 + i \sin 0) - \left(\cos \tfrac{2\pi}{5} + i \sin \tfrac{2\pi}{5}\right)\right| \\ &= \left|1 - \left(\cos \tfrac{2\pi}{5} + i \sin \tfrac{2\pi}{5}\right)\right| \\ &= \left|1 - \cos \tfrac{2\pi}{5} - i \sin \tfrac{2\pi}{5}\right| \\ &= \sqrt{\left(1 - \cos \tfrac{2\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin \tfrac{2\pi}{5}\right)^2} \\ &= 1{,}17557 \end{aligned}$$

Pour la droite 2, on cherche la distance entre la 2^{e} racine et la 4^{e} racine. La distance est

$$\begin{aligned} d &= \left|\left(\cos\tfrac{2\pi}{5} + i\sin\tfrac{2\pi}{5}\right) - \left(\cos\tfrac{6\pi}{5} + i\sin\tfrac{6\pi}{5}\right)\right| \\ &= \left|\left(\cos\tfrac{2\pi}{5} - \cos\tfrac{6\pi}{5}\right) + i\left(\sin\tfrac{2\pi}{5} - \sin\tfrac{6\pi}{5}\right)\right| \\ &= \sqrt{\left(\cos\tfrac{2\pi}{5} - \cos\tfrac{6\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin\tfrac{2\pi}{5} - \sin\tfrac{6\pi}{5}\right)^2} \\ &= 1{,}90211 \end{aligned}$$

4.22. On va former le polygone avec les n solutions de la racine n-ième de 1 (qui forment un polygone sur le cercle de rayon 1). On notera ces racines a_0 (qui est 1), a_1, a_2, a_3 et ainsi de suite jusqu'à a_{n-1}.

Nos droites vont toutes partir de la première racine qui est à (1,0). La longueur de la droite allant de ce point à un autre point du polygone est

$$|1 - z_n| = \sqrt{(1 - a_n)(1 - \overline{a}_n)}$$

Le produit de toutes ces longueurs de droite est

$$P = \sqrt{(1-a_1)(1-\overline{a}_1)(1-a_2)(1-\overline{a}_2)...(1-a_{n-2})(1-\overline{a}_{n-2})...(1-a_{n-1})(1-\overline{a}_{n-1})}$$

Mais, il y a symétrie dans ce polygone. La figure au-dessus de l'axe des x est identique à la figure sous l'axe des x. cela signifie que

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \overline{a}_1 \\ a_{n-2} &= \overline{a}_2 \\ a_{n-3} &= \overline{a}_3 \\ &... \end{aligned}$$

Le produit est donc

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(1-a_1)(1-\overline{a}_1)(1-a_2)(1-\overline{a}_2)...(1-a_{n-2})(1-\overline{a}_{n-2})...(1-a_{n-1})(1-\overline{a}_{n-1})} \\ &= \sqrt{(1-a_1)^2(1-a_2)^2...(1-a_{n-2})^2(1-a_n)^2} \\ &= (1-a_1)(1-a_2)...(1-a_{n-2})(1-a_n) \end{aligned}$$

On sait que les valeurs de a sont les racines de 1. Or, l'équation suivante

$$z^n - 1 = 0$$

peut être factorisé et être écrit sous la forme

$$z^n - 1 = (z - a_0)(z - a_1)(z - a_2)...(z - a_{n-2})(z - a_{n-1})$$

Puisque a_0 est 1, on a

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - a_1)(z - a_2)...(z - a_{n-2})(z - a_{n-1})$$

Cela veut dire que

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = (z - a_1)(z - a_2)...(z - a_{n-2})(z - a_{n-1})$$

Ainsi, notre produit est

$$\begin{aligned}P &= (1 - a_1)(1 - a_2)...(1 - a_{n-2})(1 - a_n)\\ &= \lim_{z\to 1}(z - a_1)(z - a_2)...(z - a_{n-2})(z - a_n)\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{z^n - 1}{z - 1}\end{aligned}$$

Cette limite est

$$\begin{aligned}P &= \lim_{z\to 1}\frac{z^n - 1}{z - 1}\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{n \cdot z^{n-1}}{1}\\ &= n\end{aligned}$$

5.1.

$$\begin{aligned}e^1 &= e^{1+0i}\\ &= e^1(\cos 0 + i \sin 0)\\ &= e^1\\ &= 2,71828\end{aligned}$$

5.2.

$$\begin{aligned}e^{3+i\pi} &= e^3(\cos\pi + i\sin\pi)\\ &= e^3(-1 + 0i)\\ &= -20,086\end{aligned}$$

5.3.

$$\begin{aligned} e^{-i} &= e^{0-i} \\ &= e^{0}\left(\cos(-1)+i\sin(-1)\right) \\ &= 1(0,5403-0,8415i) \\ &= 0,5403-0,8415i \end{aligned}$$

5.4.

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i} &= e^{-1/2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{3}{2}\right)\right) \\ &= 0,6065(0,0707+0,9975i) \\ &= 0,0429+0,6050i \end{aligned}$$

5.5.

$$\begin{aligned} e^{-2-3\pi i} &= e^{-2}\left(\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi)\right) \\ &= 0,1353(-1+0i) \\ &= -0,1353 \end{aligned}$$

5.6.

$$\begin{aligned} e^{0+\frac{9\pi}{2}i} &= e^{0}\left(\cos\left(\tfrac{9\pi}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{9\pi}{2}\right)\right) \\ &= 1(0+i) \\ &= i \end{aligned}$$

5.7.

$$\begin{aligned} e^{e+5\pi i} &= e^{e}\left(\cos(5\pi)+i\sin(5\pi)\right) \\ &= 15,1543(-1+0i) \\ &= -15,1543 \end{aligned}$$

5.8.

$$\begin{aligned} e^{\pi+i/2} &= e^{\pi}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) \\ &= 23,1406(0,87758+0,47942i) \\ &= 20,3079+11,0942i \end{aligned}$$

5.9.

$$\begin{aligned} e^{-1-\frac{7\pi}{4}i} &= e^{-1}\left(\cos\left(-\tfrac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\tfrac{7\pi}{4}\right)\right) \\ &= 0,36788\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 0,26013+0,26013i \end{aligned}$$

5.10.

$$\begin{aligned} e^{-z/2} &= e^{-x/2-iy/2} \\ &= e^{-x/2}\left(\cos\left(-\tfrac{y}{2}\right)+i\sin\left(-\tfrac{y}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

La partie réelle est donc

$$e^{-x/2}\cos\left(\tfrac{y}{2}\right)$$

et la partie imaginaire est

$$-e^{-x/2}\sin\left(\tfrac{y}{2}\right)$$

5.11.

$$\begin{aligned} e^{2\pi z} &= e^{2\pi x+2\pi y} \\ &= e^{2\pi x}\left(\cos\left(2\pi y\right)+i\sin\left(2\pi y\right)\right) \end{aligned}$$

La partie réelle est donc

$$e^{2\pi x}\cos\left(2\pi y\right)$$

et la partie imaginaire est

$$e^{2\pi x}\sin\left(2\pi y\right)$$

5.12.

$$\begin{aligned} e^{z^2} &= e^{(x+iy)(x+iy)} \\ &= e^{x^2+ixy+ixy-y^2} \\ &= e^{x^2-y^2+2ixy} \\ &= e^{x^2-y^2}\left(\cos\left(2xy\right)+i\sin\left(2xy\right)\right) \end{aligned}$$

La partie réelle est donc

$$e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$

et la partie imaginaire est

$$e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$

5.13.

$$\begin{aligned}e^{(1+i)z} &= e^{(1+i)(x+iy)} \\ &= e^{x+iy+ix-y} \\ &= e^{x-y+i(x+y)} \\ &= e^{x-y}\left(\cos(x+y)+i\sin(x+y)\right)\end{aligned}$$

La partie réelle est donc

$$e^{x-y}\cos(x+y)$$

et la partie imaginaire est

$$e^{x-y}\sin(x+y)$$

5.14. Le module est

$$\begin{aligned}r &= |z| \\ &= |-1+i| \\ &= \sqrt{(-1)^2+1^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{1}{-1}$$
$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

Ainsi, 1 – *i* en forme polaire est

$$\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

5.15. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |6-8i| \\ &= \sqrt{6^2+(-8)^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{-8}{6}$$
$$\theta = -0,9273$$

Ainsi, 1 – *i* en forme polaire est

$$10e^{-0,9273i}$$

5.16. Transformons premièrement *i* en forme polaire. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |i| \\ &= \sqrt{0^2+1^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{1}{0}$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Si on fait la racine, le module est

$$\sqrt{1} = 1$$

et les arguments sont

$$\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \frac{5\pi}{4}$$

Ainsi, $\sqrt{i}$ en forme polaire est

$$e^{\frac{\pi}{4}i} \quad \text{et} \quad e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

6.1. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |-7| \\ &= \sqrt{(-7)^2 + 0^2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{0}{-7}$$
$$\theta = -\pi$$

La valeur principale du logarithme est donc

$$\text{Ln } z = \ln r + i\theta$$
$$\text{Ln}(-7) = \ln 7 - \pi i$$
$$\text{Ln}(-7) = 1,9459 - 3,1416i$$

6.2. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \left|\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right| \\ &= \sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

La valeur principale du logarithme est donc

$$\text{Ln } z = \ln r + i\theta$$
$$\text{Ln}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right) = \ln 2 + \tfrac{\pi}{4} i$$
$$\text{Ln}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right) = 0,6931 + 0,7854i$$

6.3. Le module de 1 – i est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |1-i| \\ &= \sqrt{1^2+1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Le module de (1 – i)² est donc 2

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{-1}{1}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

L'argument de $(1 - i)^2$ est donc $-\pi/2$

La valeur principale du logarithme est donc

$$\text{Ln } z = \ln r + i\theta$$
$$\text{Ln}\left(1-i\right)^2 = \ln 2 - \tfrac{\pi}{2} i$$
$$\text{Ln}\left(1-i\right)^2 = 0,6931 - 1,5708i$$

6.4. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \left|3+\sqrt{27}i\right| \\ &= \sqrt{3^2+\sqrt{27}^2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{\sqrt{27}}{3}$$
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

La valeur principale du logarithme est donc

$$\text{Ln } z = \ln r + i\theta$$
$$\text{Ln}\left(3+\sqrt{27}i\right) = \ln 6 + \tfrac{\pi}{3} i$$
$$\text{Ln}\left(3+\sqrt{27}i\right) = 1,7918 + 1,0472i$$

6.5. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |2| \\ &= \sqrt{2^2 + 0^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{0}{2} \\ \theta &= 0 \end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln r + i\theta + 2\pi ni \\ \ln(2) &= \ln 2 + 0i + 2\pi ni \\ \ln(2) &= 0,6931 + 2\pi ni \end{aligned}$$

6.6. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |-5| \\ &= \sqrt{(-5)^2 + 0^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{0}{-5} \\ \theta &= \pi \end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln r + i\theta + 2\pi ni \\ \ln(-5) &= \ln 5 + \pi i + 2\pi ni \\ \ln(-5) &= 1{,}6094 + 3{,}1416i + 2\pi ni\end{aligned}$$

6.7. Le module est

$$\begin{aligned}r &= |z| \\ &= \left|-\frac{i}{3}\right| \\ &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{\frac{-1}{3}}{0} \\ \theta &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln r + i\theta + 2\pi ni \\ \ln\left(-\tfrac{i}{3}\right) &= \ln\tfrac{1}{3} - \tfrac{\pi}{2}i + 2\pi ni \\ \ln\left(-\tfrac{i}{3}\right) &= -1{,}0986 - 1{,}5708i + 2\pi ni\end{aligned}$$

6.8. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |3+2i| \\ &= \sqrt{3^2+2^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{2}{3}$$
$$\theta = 0,5880$$

Le logarithme est donc

$$\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ni$$
$$\ln(3+2i) = \ln\sqrt{13} + 0,5880i + 2\pi ni$$
$$\ln(3+2i) = 1,2825 + 0,5880i + 2\pi ni$$

6.9. Puisque le logarithme et l'exponentielle sont des fonctions inverses l'une de l'autre, on a

$$\ln\left(e^{2i}\right) = 2i$$

En fait, voici une version qui donne toutes les réponses

$$\ln\left(e^{2i+2\pi ni}\right) = 2i + 2\pi ni$$

6.10. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \left|-\tfrac{1}{4}+5i\right| \\ &= \sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}\right)^2+5^2} \\ &= \tfrac{\sqrt{401}}{4} \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{5}{-\frac{1}{4}}$$
$$\theta = 1,6208$$

Le logarithme est donc

$$\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ni$$
$$\ln\left(\tfrac{1}{4} + 5i\right) = \ln\tfrac{\sqrt{401}}{4} + 1,6208i + 2\pi ni$$
$$\ln\left(\tfrac{1}{4} + 5i\right) = 1,6107 + 1,6208i + 2\pi ni$$

6.11. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |\pi - i| \\ &= \sqrt{\pi^2 + 1^2} \\ &= 3,2969 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{-1}{\pi}$$
$$\theta = -0,3082$$

Le logarithme est donc

$$\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ni$$
$$\ln(\pi - i) = \ln(3,2969) - 0,3082i + 2\pi ni$$
$$\ln(\pi - i) = 1,1930 - 0,3082i + 2\pi ni$$

6.12. Le module est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |e + \pi i| \\ &= \sqrt{e^2 + \pi^2} \\ &= 4,1544 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{\pi}{e} \\ \theta &= 0,8575 \end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln r + i\theta + 2\pi n i \\ \ln(e + \pi i) &= \ln(4,1544) + 0,8575i + 2\pi n i \\ \ln(e + \pi i) &= 1,4242 + 0,8575i + 2\pi n i \end{aligned}$$

6.13. Isolons z

$$\begin{aligned} e^z &= -3 + 4i \\ z &= \ln(-3 + 4i) \end{aligned}$$

Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |-3 + 4i| \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

L'argument du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{4}{-3} \\ \theta &= 2,2143 \end{aligned}$$

La solution est donc

$$\begin{aligned} z &= \ln(-3+4i) \\ &= \ln 5 + 2,2143i + 2\pi ni \\ &= 1,6094 + 2,2143i + 2\pi ni \end{aligned}$$

6.14. Isolons z

$$\begin{aligned} e^z &= i \\ z &= \ln(i) \end{aligned}$$

Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |i| \\ &= \sqrt{0^2+1^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'argument du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{1}{0} \\ \theta &= \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La solution est donc

$$\begin{aligned} z &= \ln(i) \\ &= \ln 1 + \tfrac{\pi}{2} i + 2\pi ni \\ &= 0 + 1,5708i + 2\pi ni \end{aligned}$$

6.15. Isolons z

$$\begin{aligned} e^{2z} &= -2 \\ 2z &= \ln(-2) \\ z &= \tfrac{1}{2}\ln(-2) \end{aligned}$$

Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |-2| \\ &= \sqrt{(-2)^2 + 0^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

L'argument du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{0}{-2} \\ \theta &= -\pi \end{aligned}$$

La solution est donc

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{1}{2}\ln(-2) \\ &= \tfrac{1}{2}(\ln 2 + \pi i + 2\pi n i) \\ &= 0{,}3466 + 1{,}5708 i + \pi n i \end{aligned}$$

6.16. Isolons z

$$\begin{aligned} e^{z^2} &= 1 \\ z^2 &= \ln(1) \\ z &= \sqrt{\ln(1)} \end{aligned}$$

On va commencer par faire le logarithme. Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |1| \\ &= \sqrt{1^2 + 0^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'argument du nombre dans le logarithme est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{0}{1}$$
$$\theta = 0$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned}\ln(1) &= \ln(1) + 0i + 2\pi ni \\ &= 2\pi ni\end{aligned}$$

La solution est donc

$$z = \sqrt{2\pi ni}$$

Il nous reste donc à faire une racine carrée. Pour faire cette racine, il nous faut le module et l'argument du nombre. Le module est

$$\begin{aligned}r &= |z| \\ &= |2\pi ni| \\ &= \sqrt{0^2 + (2\pi n)^2} \\ &= 2\pi n\end{aligned}$$

L'argument du nombre dans le logarithme est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{2\pi n}{0}$$
$$\theta = \tfrac{\pi}{2}$$

Le module de la racine est donc

$$\sqrt{2\pi n}$$

et les arguments de la racine sont

$$\theta = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$
$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \frac{5\pi}{4}$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\ln(1)} \\ &= \sqrt{2\pi n i} \\ &= \sqrt{2\pi n}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2\pi n}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{\pi n} + \sqrt{\pi n}i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\ln(1)} \\ &= \sqrt{2\pi n i} \\ &= \sqrt{2\pi n}\left(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2\pi n}\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -\sqrt{\pi n} - \sqrt{\pi n}i \end{aligned}$$

On peut écrire ces solutions sous la forme suivante

$$\begin{aligned} z &= \pm\left(\sqrt{\pi n} + \sqrt{\pi n}i\right) \\ &= \pm(1{,}7725 + 1{,}7725i)\sqrt{n} \end{aligned}$$

6.17. Isolons z

$$\begin{aligned} \ln(z) &= -\tfrac{\pi}{2}i \\ z &= e^{-\frac{i\pi}{2}} \end{aligned}$$

On peut alors simplement calculer la valeur de z.

$$\begin{aligned} z &= e^{-\frac{i\pi}{2}} \\ &= \cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 - i \\ &= -i \end{aligned}$$

6.18. Isolons z

$$\ln(z) = 2 - \tfrac{3}{2}i$$
$$z = e^{2-\frac{3}{2}i}$$

On peut alors simplement calculer la valeur de z.

$$\begin{aligned} z &= e^{2-\frac{3i}{2}} \\ &= e^2 e^{-\frac{3i}{2}} \\ &= e^2\left(\cos\left(-\tfrac{3}{2}\right) + i\sin\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right) \\ &= 0,5227 - 7,3705i \end{aligned}$$

6.19. Isolons z

$$\ln(z) = 3 - i$$
$$z = e^{3-i}$$

On peut alors simplement calculer la valeur de z.

$$\begin{aligned} z &= e^{3-i} \\ &= e^i e^{-i} \\ &= e^3\left(\cos(-1) + i\sin(-1)\right) \\ &= 10,8522 - 16,9014i \end{aligned}$$

6.20. Isolons z

$$\ln(z) = e - \pi i$$
$$z = e^{e-\pi i}$$

On peut alors simplement calculer la valeur de z.

$$\begin{aligned} z &= e^{e-\pi i} \\ &= e^{e} e^{-\pi i} \\ &= e^{e}\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) \\ &= e^{e}\left(-1+0i\right) \\ &= -15{,}1543 \end{aligned}$$

6.21. On doit calculer

$$i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(i)}$$

On doit donc commencer par calculer le logarithme. Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |i| \\ &= \sqrt{0^2+1^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{0}$$

$$\theta = \tfrac{\pi}{2}$$

Le logarithme est donc

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + i\theta$$

$$\mathrm{Ln}(i) = \ln(1) + \tfrac{\pi}{2} i$$

$$\mathrm{Ln}(i) = \tfrac{\pi}{2} i$$

On a donc

$$\begin{aligned} i^{\frac{1}{2}} &= e^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(i)} \\ &= e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}i\right)} \\ &= e^{\frac{\pi}{4}i} \end{aligned}$$

On peut alors simplement calculer la valeur.

$$\begin{aligned} i^{\frac{1}{2}} &= e^{\frac{\pi}{4}i} \\ &= \cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4} \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ &= 0,7071 + 0,7071i \end{aligned}$$

6.22. On doit calculer

$$2i^{2i} = e^{2i\,\mathrm{Ln}(2i)}$$

On doit donc commencer par calculer le logarithme. Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |2i| \\ &= \sqrt{0^2 + 2^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{2}{0}$$
$$\theta = \tfrac{\pi}{2}$$

Le logarithme est donc

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + i\theta$$
$$\mathrm{Ln}(2i) = \ln(2) + \tfrac{\pi}{2}i$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2i^{2i} &= e^{2i\,\mathrm{Ln}(2i)} \\ &= e^{2i\left(\ln 2 + \frac{\pi}{2}i\right)} \\ &= e^{2i\ln 2 - \pi} \\ &= e^{-\pi + (\ln 4)i} \end{aligned}$$

On peut alors simplement calculer la valeur.

$$\begin{aligned} 2i^{2i} &= e^{-\pi + (\ln 4)i} \\ &= e^{-\pi} e^{(\ln 4)i} \\ &= e^{-\pi}\left(\cos \ln 4 + i \sin \ln 4\right) \\ &= 0,00793 + 0,04248i \end{aligned}$$

6.23. On doit calculer

$$(1+3i)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}(1+3i)}$$

On doit donc commencer par calculer le logarithme. Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |1+3i| \\ &= \sqrt{1^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{3}{1} \\ \theta &= 1,2490 \end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned}\text{Ln } z &= \ln r + i\theta \\ \text{Ln}\left(1+3i\right) &= \ln\left(\sqrt{10}\right) + 1,2490i\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\left(1+3i\right)^{i} &= e^{i\,\text{Ln}\left(1+3i\right)} \\ &= e^{i\left(\ln\sqrt{10}+1,2490i\right)} \\ &= e^{i\ln\sqrt{10}-1,2490} \\ &= e^{-1,2490+\left(\ln\sqrt{10}\right)i}\end{aligned}$$

On peut alors simplement calculer la valeur.

$$\begin{aligned}\left(1+3i\right)^{i} &= e^{-1,2490+\left(\ln\sqrt{10}\right)i} \\ &= e^{-1,2490}e^{\left(\ln\sqrt{10}\right)i} \\ &= e^{-1,2490}\left(\cos\ln\sqrt{10} + i\sin\ln\sqrt{10}\right) \\ &= 0,1168 + 0,2619i\end{aligned}$$

6.24. On doit calculer

$$\left(1+i\right)^{1-i} = e^{(1-i)\,\text{Ln}\left(1+i\right)}$$

On doit donc commencer par calculer le logarithme. Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned}r &= \left|z\right| \\ &= \left|1+i\right| \\ &= \sqrt{1^2+1^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{1}{1}$$
$$\theta = \tfrac{\pi}{4}$$

Le logarithme est donc

$$\text{Ln}\, z = \ln r + i\theta$$
$$\text{Ln}(1+i) = \ln\left(\sqrt{2}\right) + \tfrac{\pi}{4} i$$

On a donc

$$\begin{aligned}(1+i)^{1-i} &= e^{(1-i)\text{Ln}(1+i)} \\ &= e^{(1-i)\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i\right)} \\ &= e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i-i\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}} \\ &= e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)i}\end{aligned}$$

On peut alors simplement calculer la valeur.

$$\begin{aligned}(1+i)^{1-i} &= e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)i} \\ &= e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)}e^{\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)i} \\ &= e^{\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right) \\ &= 2,8079+1,3179i\end{aligned}$$

6.25. On doit calculer

$$3^{4-i} = e^{(4-i)\text{Ln}\,3}$$

On doit donc commencer par calculer le logarithme. Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |3| \\ &= \sqrt{3^2 + 0^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{0}{3} \\ \theta &= 0 \end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned} \text{Ln}\, z &= \ln r + i\theta \\ \text{Ln}(3) &= \ln(3) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 3^{4-i} &= e^{(4-i)\text{Ln}(3)} \\ &= e^{(4-i)(\ln 3)} \\ &= e^{4\ln 3 - i\ln 3} \end{aligned}$$

On peut alors simplement calculer la valeur.

$$\begin{aligned} (3)^{4-i} &= e^{4\ln 3 - i\ln 3} \\ &= e^{4\ln 3} e^{-i\ln 3} \\ &= e^{\ln 81} e^{-i\ln 3} \\ &= 81\left(\cos(-\ln 3) + i\sin(-\ln 3)\right) \\ &= 36{,}8414 - 72{,}1367i \end{aligned}$$

6.26. On doit calculer

$$(3+4i)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\text{Ln}(3+4i)}$$

On doit donc commencer par calculer le logarithme. Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |3+4i| \\ &= \sqrt{3^2+4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{4}{3} \\ \theta &= 0,9273 \end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned} \text{Ln } z &= \ln r + i\theta \\ \text{Ln}(3+4i) &= \ln(5) + 0,9273i \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} (3+4i)^{\frac{1}{3}} &= e^{\frac{1}{3}\text{Ln}(3+4i)} \\ &= e^{\frac{1}{3}(\ln 5+0,9273i)} \\ &= e^{\frac{1}{3}\ln 5+0,3091i} \end{aligned}$$

On peut alors simplement calculer la valeur.

$$\begin{aligned} (3+4i)^{\frac{1}{3}} &= e^{\frac{1}{3}\ln 5+0,3091i} \\ &= e^{\frac{1}{3}\ln 5}\left(\cos(0,3091)+i\sin(0,3091)\right) \\ &= 1,6289+0,5202i \end{aligned}$$

6.27. On doit calculer

$$(-5)^{2-4i} = e^{(2-4i)\text{Ln}(-5)}$$

On doit donc commencer par calculer le logarithme. Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |-5| \\ &= \sqrt{(-5)^2 + 0^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{0}{-5} \\ \theta &= \pi \end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned} \text{Ln}\, z &= \ln r + i\theta \\ \text{Ln}(-5) &= \ln(5) + \pi i \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} (-5)^{2-4i} &= e^{(2-4i)\text{Ln}(-5)} \\ &= e^{(2-4i)(\ln(5)+\pi i)} \\ &= e^{(2\ln 5+4\pi)+(-4\ln 5+2\pi)i} \end{aligned}$$

On peut alors simplement calculer la valeur.

$$\begin{aligned} (-5)^{2-4i} &= e^{(2\ln 5+4\pi)+(-4\ln 5+2\pi)i} \\ &= e^{(2\ln 5+4\pi)}\left(\cos(-4\ln 5+2\pi) + i\sin(-4\ln 5+2\pi)\right) \\ &= 7\,083\,319 - 1\,103\,646i \end{aligned}$$

6.28. On doit calculer

$$\left(5-2i\right)^{3+\pi i}=e^{(3+\pi i)\mathrm{Ln}(5-2i)}$$

On doit donc commencer par calculer le logarithme. Le module du nombre dans le logarithme est

$$\begin{aligned}r&=|z|\\&=|5-2i|\\&=\sqrt{5^2+(-2)^2}\\&=\sqrt{29}\end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{y}{x}\\ \tan\theta&=\frac{-2}{5}\\ \theta&=-0,3805\end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\,z&=\ln r+i\theta\\ \mathrm{Ln}(5-2i)&=\ln\left(\sqrt{29}\right)-0,3805i\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\left(5-2i\right)^{3+\pi i}&=e^{(3+\pi i)\mathrm{Ln}(5-2i)}\\&=e^{(3+\pi i)\left(\ln\sqrt{29}-0,3805i\right)}\\&=e^{\left(3\ln\sqrt{29}+1,1954\right)+\left(\pi\ln\sqrt{29}-1,1416\right)i}\end{aligned}$$

On peut alors simplement calculer la valeur.

$$\begin{aligned}\left(5+2i\right)^{3+\pi i}&=e^{\left(3\ln\sqrt{29}+1,1954\right)+\left(\pi\ln\sqrt{29}-1,1416\right)i}\\&=e^{3\ln\sqrt{29}+1,1954}\left(\cos\left(\pi\ln\sqrt{29}-1,1416\right)+i\sin\left(\pi\ln\sqrt{29}-1,1416\right)\right)\\&=-276,15-436,03i\end{aligned}$$

7.1. Comme c'est un nombre réel, on calcule simplement la valeur avec la calculatrice.

$$\cos 2 = -0,4161$$

7.2.

$$\begin{aligned}
\cos(3+2i) &= \frac{e^{(3+2i)i} + e^{-(3+2i)i}}{2} \\
&= \frac{e^{-2}e^{3i} + e^{2}e^{-3i}}{2} \\
&= \frac{e^{-2}\left(\cos 3 + i\sin 3\right) + e^{2}\left(\cos(-3) + i\sin(-3)\right)}{2} \\
&= \frac{e^{-2}\cos 3 + e^{2}\cos(-3)}{2} + \frac{e^{-2}\sin 3 + e^{2}\sin(-3)}{2}i \\
&= -3,7245 - 0,5118i
\end{aligned}$$

7.3.

$$\begin{aligned}
\sin(3+2i) &= \frac{e^{(3+2i)i} - e^{-(3+2i)i}}{2i} \\
&= \frac{e^{-2}e^{3i} - e^{2}e^{-3i}}{2i} \\
&= (-i)\frac{e^{-2}\left(\cos 3 + i\sin 3\right) - e^{2}\left(\cos(-3) + i\sin(-3)\right)}{2} \\
&= \frac{e^{-2}\sin 3 - e^{2}\sin(-3)}{2} + \frac{-e^{-2}\cos 3 + e^{2}\cos(-3)}{2}i \\
&= 0,5309 - 3,5905i
\end{aligned}$$

7.4.

$$\begin{aligned}\sin(3\pi i) &= \frac{e^{(3\pi i)i} - e^{-(3\pi i)i}}{2i} \\ &= \frac{e^{-3\pi} - e^{3\pi}}{2i} \\ &= (-i)\frac{e^{-3\pi} - e^{3\pi}}{2} \\ &= 6195,8i\end{aligned}$$

7.5.

$$\begin{aligned}\cos(\pi + \pi i) &= \frac{e^{(\pi+\pi i)i} + e^{-(\pi+\pi i)i}}{2} \\ &= \frac{e^{-\pi}e^{\pi i} + e^{\pi}e^{-\pi i}}{2} \\ &= \frac{e^{-\pi}(\cos\pi + i\sin\pi) + e^{\pi}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))}{2} \\ &= \frac{e^{-\pi}(-1) + e^{\pi}(-1)}{2} \\ &= -\frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} \\ &= -11,5920\end{aligned}$$

7.6.

$$\begin{aligned}\cos(i) &= \frac{e^{(i)i} + e^{-(i)i}}{2} \\ &= \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} \\ &= 1,5431\end{aligned}$$

7.7.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\sqrt{2}-4i\right) &= \frac{e^{\left(\sqrt{2}-4i\right)i}-e^{-\left(\sqrt{2}-4i\right)i}}{2i}\\
&= \frac{e^{4}e^{\sqrt{2}i}-e^{-4}e^{-\sqrt{2}i}}{2i}\\
&= (-i)\frac{e^{4}\left(\cos\sqrt{2}+i\sin\sqrt{2}\right)-e^{-4}\left(\cos\left(-\sqrt{2}\right)+i\sin\left(-\sqrt{2}\right)\right)}{2}\\
&= \frac{e^{4}\sin\sqrt{2}-e^{-4}\sin\left(-\sqrt{2}\right)}{2}+\frac{-e^{4}\cos\sqrt{2}+e^{-4}\cos\left(-\sqrt{2}\right)}{2}i\\
&= 26{,}974-4{,}256i
\end{aligned}$$

7.8.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-z\right) &= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}}{2}\\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-iz}+e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{iz}}{2}\\
&= \frac{\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)e^{-iz}+\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)e^{iz}}{2}\\
&= \frac{ie^{-iz}-ie^{iz}}{2}\\
&= -i\frac{-e^{-iz}+e^{iz}}{2}\\
&= -i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}\\
&= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\\
&= \sin z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-z\right) &= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}}{2i} \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-iz}-e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{iz}}{2i} \\
&= \frac{\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)e^{-iz}-\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)e^{iz}}{2i} \\
&= \frac{ie^{-iz}+ie^{iz}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\
&= \cos z
\end{aligned}$$

7.9.

$$\begin{aligned}
\cos(\pi-z) &= \frac{e^{i(\pi-z)}+e^{-i(\pi-z)}}{2} \\
&= \frac{e^{i\pi}e^{-iz}+e^{-i\pi}e^{iz}}{2} \\
&= \frac{(\cos\pi+i\sin\pi)e^{-iz}+(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))e^{iz}}{2} \\
&= \frac{-e^{-iz}-e^{iz}}{2} \\
&= -\frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} \\
&= -\cos z
\end{aligned}$$

7.10.

$$\begin{aligned}
\arccos 2 &= -i\ln\left(2+\sqrt{2^2-1}\right) \\
&= -i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

Première réponse (avec la valeur positive de $\sqrt{3}$)

Faisons le logarithme, le module du nombre est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \left|2+\sqrt{3}\right| \\ &= \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} \\ &= 2+\sqrt{3} \end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ \tan\theta &= \frac{0}{2+\sqrt{3}} \\ \theta &= 0 \end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln r + i\theta + 2\pi n i \\ \ln\left(2+\sqrt{3}\right) &= \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 2\pi n i \\ \ln\left(2+\sqrt{3}\right) &= 1,3170 + 2\pi n i \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \arccos 2 &= -i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \\ &= -i\left[1,3170 + 2\pi n i\right] \\ &= -i1,3170 + 2\pi n \\ &= -1,3170i + 2\pi n \end{aligned}$$

Deuxième réponse (avec la valeur négative de $\sqrt{3}$)

Faisons le logarithme, le module du nombre est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \left|2-\sqrt{3}\right| \\ &= \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} \\ &= 2-\sqrt{3} \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{0}{2-\sqrt{3}}$$
$$\theta = 0$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln r + i\theta + 2\pi n i\\ \ln\left(2-\sqrt{3}\right) &= \ln\left(2-\sqrt{3}\right) + 2\pi n i\\ \ln\left(2-\sqrt{3}\right) &= -1,3170 + 2\pi n i\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\arccos 2 &= -i\ln\left(2-\sqrt{3}\right)\\ &= -i\left[-1,3170 + 2\pi n i\right]\\ &= i1,3170 + 2\pi n\\ &= 1,3170i + 2\pi n\end{aligned}$$

Les deux réponses sont donc

$$1,3170i + 2\pi n \quad \text{et} \quad -1,3170i + 2\pi n$$

7.11.

$$\begin{aligned}\arcsin i &= -i\ln\left(i\cdot i + \sqrt{1-i^2}\right)\\ &= -i\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

Première réponse (avec la valeur positive de $\sqrt{2}$)

Faisons le logarithme, le module du nombre est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \left|-1+\sqrt{2}\right| \\ &= \sqrt{\left(-1+\sqrt{2}\right)^2 + 0^2} \\ &= -1+\sqrt{2} \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{0}{-1+\sqrt{2}}$$
$$\theta = 0$$

Le logarithme est donc

$$\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ni$$
$$\ln\left(-1+\sqrt{2}\right) = \ln\left(-1+\sqrt{2}\right) + 2\pi ni$$
$$\ln\left(-1+\sqrt{2}\right) = -0,8814 + 2\pi ni$$

On a donc

$$\begin{aligned} \arcsin i &= -i\ln\left(-1+\sqrt{2}\right) \\ &= -i\left[-0,8814 + 2\pi ni\right] \\ &= i0,8814 + 2\pi n \\ &= 0,8814i + 2\pi n \end{aligned}$$

Deuxième réponse (avec la valeur positive de $\sqrt{2}$)

Faisons le logarithme, le module du nombre est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \left|-1-\sqrt{2}\right| \\ &= \sqrt{\left(-1-\sqrt{2}\right)^2 + 0^2} \\ &= 1+\sqrt{2} \end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{y}{x}\\ \tan\theta &= \frac{0}{-1-\sqrt{2}}\\ \theta &= \pi\end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln r + i\theta + 2\pi ni\\ \ln\left(-1-\sqrt{2}\right) &= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + i\pi + 2\pi ni\\ \ln\left(-1+\sqrt{2}\right) &= 0,8814 + i\pi + 2\pi ni\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\arcsin i &= -i\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\\ &= -i\left[0,8814 + \pi i + 2\pi ni\right]\\ &= -i0,8814 + \pi + 2\pi n\\ &= \pi - 0,8814i + 2\pi n\\ &= 3,1416 - 0,8814i + 2\pi n\end{aligned}$$

Les deux réponses sont donc

$$0,8814i + 2\pi n \quad \text{et} \quad 3,1416 - 0,8814i + 2\pi n$$

7.12. Si on a $z = \tan w$, alors

$$\begin{aligned}z &= \tan w\\ &= \frac{\sin w}{\cos w}\\ &= \frac{\left(e^{iw} - e^{-iw}\right)/2i}{\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)/2}\\ &= -i\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}\end{aligned}$$

Par définition, on a alors w = arctan z. On trouve donc la formule d'arctangente en isolant w dans notre formule. On a alors

$$\begin{aligned}
z &= -i\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}} \\
ze^{iw}+ze^{-iw} &= -ie^{iw}+ie^{-iw} \\
z\left(e^{iw}\right)^2+z &= -i\left(e^{iw}\right)^2+i \\
z\left(e^{iw}\right)^2+i\left(e^{iw}\right)^2 &= i-z \\
\left(e^{iw}\right)^2(z+i) &= i-z \\
\left(e^{iw}\right)^2 &= \frac{i-z}{i+z} \\
e^{iw} &= \sqrt{\frac{i-z}{i+z}} \\
iw &= \ln\sqrt{\frac{i-z}{i+z}} \\
w &= -i\ln\sqrt{\frac{i-z}{i+z}}
\end{aligned}$$

On peut alors utiliser quelques propriétés des log pour éliminer la racine

$$\begin{aligned}
w &= -i\ln\sqrt{\frac{i-z}{i+z}} \\
w &= -i\ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^{\frac{1}{2}} \\
w &= \frac{-i}{2}\ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right)
\end{aligned}$$

On peut finalement utiliser quelques propriétés des log pour éliminer le signe négatif

$$\begin{aligned}
w &= \frac{-i}{2}\ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right) \\
w &= \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^{-1} \\
w &= \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)
\end{aligned}$$

Puisque w = arctan z, on a

$$\arctan z = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

7.13.

$$\begin{aligned}\arctan 2i &= \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+2i}{i-2i}\right)\\ &= \frac{i}{2}\ln\left(\frac{3i}{-i}\right)\\ &= \frac{i}{2}\ln(-3)\end{aligned}$$

Faisons le logarithme, le module du nombre est

$$\begin{aligned}r &= |z|\\ &= |-3|\\ &= \sqrt{(-3)^2+0^2}\\ &= 3\end{aligned}$$

L'argument est

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{y}{x}\\ \tan\theta &= \frac{0}{-3}\\ \theta &= \pi\end{aligned}$$

Le logarithme est donc

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln r + i\theta + 2\pi ni\\ \ln(-3) &= \ln(3) + i\pi + 2\pi ni\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\arctan 2i &= \frac{i}{2}\ln(-3)\\ &= \frac{i}{2}\left(\ln(3)+i\pi+2\pi in\right)\\ &= \frac{-\pi}{2}+\frac{\ln 3}{2}i-\pi n\\ &= -1{,}5708+0{,}5493i-\pi n\end{aligned}$$

Notez qu'on pourrait aussi écrire

$$\arctan 2i = -1{,}5708+0{,}5493i+\pi n$$

puisque n peut prendre n'importe quelle valeur entière positive ou négative. Qu'il y ait un signe positif ou négatif, on ajoute ou enlève des π tant qu'on veut.

Notez qu'on pourrait aussi écrire

$$\arctan 2i = 1{,}5708+0{,}5493i+\pi n$$

puisque l'écart entre cette réponse et la précédente est π et que le dernier terme nous dit qu'on peut enlever ou ajouter des π tant qu'on veut.

7.14. Si on isole z, on a

$$\begin{aligned}\cos z &= 0\\ z &= \arccos 0\end{aligned}$$

Calculons cet arccosinus

$$\begin{aligned}\arccos 0 &= -i\ln\left(0+\sqrt{0^2-1}\right)\\ &= -i\ln\left(\sqrt{-1}\right)\\ &= -i\ln(\pm i)\end{aligned}$$

Première réponse (avec la valeur positive)

Faisons le logarithme, le module du nombre est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |i| \\ &= \sqrt{0^2+1^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{0}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Le logarithme est donc

$$\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ni$$

$$\ln(i) = \ln(1) + \frac{\pi}{2}i + 2\pi ni$$

$$\ln(i) = \frac{\pi}{2}i + 2\pi ni$$

On a donc

$$\begin{aligned} \arccos 0 &= -i\ln(i) \\ &= -i\left[\frac{\pi}{2}i + 2\pi ni\right] \\ &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{aligned}$$

Deuxième réponse (avec la valeur négative)

Faisons le logarithme, le module du nombre est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |-i| \\ &= \sqrt{0^2+(-1)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{-1}{0}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

Le logarithme est donc

$$\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ni$$
$$\ln(-i) = -\frac{\pi}{2}i + 2\pi ni$$

On a donc

$$\begin{aligned} \arccos 2 &= -i\ln(-i) \\ &= -i\left[-\frac{\pi}{2}i + 2\pi ni\right] \\ &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{aligned}$$

Les deux réponses sont donc

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

(Qui sont, en passant, les réponses d'arccos(0) que vous connaissiez déjà.)

7.15. Si on isole z, on a

$$\cos z = 3i$$
$$z = \arccos 3i$$

Calculons cet arccosinus

$$\arccos 0 = -i\ln\left(3i+\sqrt{(3i)^2-1}\right)$$

$$\begin{aligned}\arccos 0 &= -i\ln\left(3i+\sqrt{-9-1}\right)\\ &= -i\ln\left(3i+\sqrt{-10}\right)\\ &= -i\ln\left(3i\pm i\sqrt{10}\right)\\ &= -i\ln\left(\left(3\pm\sqrt{10}\right)i\right)\end{aligned}$$

Première réponse (avec la valeur positive)

Faisons le logarithme, le module du nombre est

$$\begin{aligned}r &= |z|\\ &= \left|\left(3+\sqrt{10}\right)i\right|\\ &= \sqrt{0^2+\left(3+\sqrt{10}\right)^2}\\ &= 3+\sqrt{10}\end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{3+\sqrt{10}}{0}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Le logarithme est donc

$$\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ni$$

$$\ln\left(\left(3+\sqrt{10}\right)i\right) = \ln\left(3+\sqrt{10}\right)+\frac{\pi}{2}i+2\pi ni$$

$$\ln\left(\left(3+\sqrt{10}\right)i\right) = 1,8184+\frac{\pi}{2}i+2\pi ni$$

On a donc

$$\begin{aligned}\arccos 3i &= -i\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\\ &= -i\left[1{,}8184+\frac{\pi}{2}i+2\pi ni\right]\\ &= \frac{\pi}{2}-1{,}8184i+2\pi n\end{aligned}$$

Deuxième réponse (avec la valeur négative)

Faisons le logarithme, le module du nombre est

$$\begin{aligned}r &= |z|\\ &= \left|\left(3-\sqrt{10}\right)i\right|\\ &= \sqrt{0^2+\left(3-\sqrt{10}\right)^2}\\ &= -3+\sqrt{10}\end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{3-\sqrt{10}}{0}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

Le logarithme est donc

$$\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ni$$
$$\ln\left(\left(3-\sqrt{10}\right)i\right) = \ln\left(-3+\sqrt{10}\right)-\frac{\pi}{2}i+2\pi ni$$
$$\ln\left(\left(3-\sqrt{10}\right)i\right) = -1{,}8184+\frac{\pi}{2}i+2\pi ni$$

On a donc

$$\begin{aligned}\arccos 3i &= -i\ln\left(\left(3-\sqrt{10}\right)i\right)\\ &= -i\left[-1,8184-\frac{\pi}{2}i+2\pi ni\right]\\ &= -\frac{\pi}{2}+1,8184i+2\pi n\end{aligned}$$

Les deux réponses sont donc

$$\frac{\pi}{2}-1,8184i+2\pi n \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2}+1,8184i+2\pi n$$

7.16. On va commencer par calculer la valeur de cos 2*i*.

$$\begin{aligned}\cos 2i &= \frac{e^{i(2i)}+e^{-i(2i)}}{2}\\ &= \frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\\ &= 3,7622\end{aligned}$$

L'équation est donc

$$\sin z = 3,7622$$

Si on isole z, on a

$$z = \arcsin 3,7622$$

Calculons cet arcsinus

$$\begin{aligned}\arcsin 3,7622 &= -i\ln\left(3,7622i+\sqrt{1-3,7622^2}\right)\\ &= -i\ln\left(3,7622i\pm 3,6269i\right)\\ &= -i\ln\left(\left(3,7622\pm 3,6269\right)i\right)\end{aligned}$$

Première réponse (avec la valeur positive)

$$\arcsin 3,7622 = -i\ln\left(\left(3,7622 \pm 3,6269\right)i\right)$$
$$\arcsin 3,7622 = -i\ln\left(7,3891i\right)$$

Faisons le logarithme, le module du nombre est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |7,3891i| \\ &= \sqrt{0^2 + \left(7,3891\right)^2} \\ &= 7,3891 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{7,3891}{0}$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Le logarithme est donc

$$\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi n i$$
$$\ln\left(7,3891i\right) = \ln\left(7,3891\right) + \frac{\pi}{2}i + 2\pi n i$$
$$\ln\left(7,3891i\right) = 2 + \frac{\pi}{2}i + 2\pi n i$$

On a donc

$$\begin{aligned} \arcsin 3,7622 &= -i\ln\left(7,3891i\right) \\ &= -i\left[2 + \frac{\pi}{2}i + 2\pi n i\right] \\ &= \frac{\pi}{2} - 2i + 2\pi n \end{aligned}$$

Deuxième réponse (avec la valeur négative)

$$\arcsin 3,7622 = -i\ln\left(\left(3,7622 \pm 3,6269\right)i\right)$$
$$\arcsin 3,7622 = -i\ln\left(0,1353i\right)$$

Faisons le logarithme, le module du nombre est

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= |0{,}1353i| \\ &= \sqrt{0^2 + (0{,}1353)^2} \\ &= 0{,}1353 \end{aligned}$$

L'argument est

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{0{,}1353}{0}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Le logarithme est donc

$$\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ni$$

$$\ln(0{,}1353i) = \ln(0{,}1353) + \frac{\pi}{2}i + 2\pi ni$$

$$\ln(0{,}1353i) = -2 + \frac{\pi}{2}i + 2\pi ni$$

On a donc

$$\begin{aligned} \arcsin 3{,}7622 &= -i\ln(0{,}1353i) \\ &= -i\left[-2 + \frac{\pi}{2}i + 2\pi ni\right] \\ &= \frac{\pi}{2} + 2i + 2\pi n \end{aligned}$$

Les deux réponses sont donc

$$\frac{\pi}{2} - 2i + 2\pi n \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} + 2i + 2\pi n$$

Autre version

On peut aussi utiliser le fait que $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. On a alors

$$\begin{aligned} \sin z &= \cos 2i \\ \sin z &= \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - 2i\right) \\ z &= \tfrac{\pi}{2} - 2i \end{aligned}$$

Toutefois, il n'est pas évident de trouver toutes les solutions dans ce cas. On les trouverait en se disant qu'on peut ajouter des 2p dans un sinus et qu'on peut changer le signe dans un cosinus sans rien changer. On aurait alors

$$\begin{aligned} \sin\left(z + 2\pi n\right) &= \cos \pm 2i \\ \sin\left(z + 2\pi n\right) &= \sin\left(\tfrac{\pi}{2} \pm 2i\right) \\ z &= \tfrac{\pi}{2} \pm 2i + 2\pi n \end{aligned}$$

7.17. On a

$$\begin{aligned} |w - z|^2 &= (w - z)\overline{(w - z)} \\ &= (w - z)(\overline{w} - \overline{z}) \\ &= w\overline{w} - w\overline{z} - z\overline{w} + z\overline{z} \\ &= w\overline{w} + z\overline{z} - w\overline{z} - z\overline{w} \\ &= |w|^2 + |z|^2 - w\overline{z} - z\overline{w} \\ &= |w|^2 + |z|^2 - \left(w\overline{z} + z\overline{w}\right) \end{aligned}$$

Il reste à trouver ce que valent ces deux derniers termes

$$\begin{aligned} w\overline{z} &= |w| e^{i\theta_1} |z| e^{-i\theta_2} \\ &= |w| \cdot |z| e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

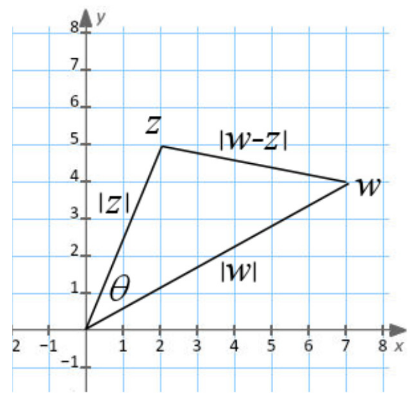
$$\begin{aligned} \overline{w}z &= |w| e^{-i\theta_1} |z| e^{i\theta_2} \\ &= |w| \cdot |z| e^{-i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
w\overline{z} + \overline{w}z &= |w|e^{i\theta_1}\,|z|e^{-i\theta_2} \\
&= |w|\cdot|z|e^{i(\theta_1-\theta_2)} + |w|\cdot|z|e^{-i(\theta_1-\theta_2)} \\
&= |w|\cdot|z|\left(e^{i(\theta_1-\theta_2)} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\right) \\
&= 2|w|\cdot|z|\left(\frac{e^{i(\theta_1-\theta_2)} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)}}{2}\right) \\
&= 2|w|\cdot|z|\cos(\theta_1-\theta_2)
\end{aligned}
$$

On a donc

$$|w-z|^2 = |w|^2 + |z|^2 - (w\overline{z} + z\overline{w})$$
$$|w-z|^2 = |w|^2 + |z|^2 - 2\cos(\theta_1-\theta_2)$$



Puisque $\theta_1 - \theta_2 = \theta$ sur la figure, on a

$$|w-z|^2 = |w|^2 + |z|^2 - 2\cos(\theta)$$

8.1. On a

$$
\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \mathrm{Re}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{2i\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2\right) \\
&= \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^2\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^2\theta + i\cos\theta\sin\theta + i\sin\theta\cos\theta + i^2\sin^2\theta\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta
\end{aligned}
$$

8.2. On a

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta &= \operatorname{Im}\left(\cos 2\theta + i\sin 2\theta\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{2i\theta}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^2\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\cos^2\theta + i\cos\theta\sin\theta + i\sin\theta\cos\theta + i^2\sin^2\theta\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= 2\cos\theta\sin\theta
\end{aligned}$$

8.3. On a

$$\begin{aligned}
\cos(A+B) &= \operatorname{Re}\left(\cos(A+B) + i\sin(A+B)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{i(A+B)}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{iA}e^{iB}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left((\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\cos A\cos B + i\cos A\sin B + i\sin A\cos B + i^2\sin A\sin B\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\cos A\cos B + i\cos A\sin B + i\sin A\cos B - \sin A\sin B\right) \\
&= \cos A\cos B - \sin A\sin B
\end{aligned}$$

8.4. On a

$$\begin{aligned}
\sin(A+B) &= \operatorname{Im}\left(\cos(A+B) + i\sin(A+B)\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i(A+B)}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{iA}e^{iB}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left((\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B)\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\cos A\cos B + i\cos A\sin B + i\sin A\cos B + i^2\sin A\sin B\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\cos A\cos B + i\cos A\sin B + i\sin A\cos B - \sin A\sin B\right) \\
&= \cos A\sin B + \sin A\cos B
\end{aligned}$$

8.5. On va commencer par montrer que

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\sin^2\frac{A}{2} &= \left(\frac{e^{i\frac{A}{2}}-e^{-i\frac{A}{2}}}{2i}\right)^2\\
&= \frac{e^{i\frac{A}{2}}e^{i\frac{A}{2}}-e^{i\frac{A}{2}}e^{-i\frac{A}{2}}-e^{-i\frac{A}{2}}e^{i\frac{A}{2}}+e^{-i\frac{A}{2}}e^{-i\frac{A}{2}}}{-4}\\
&= \frac{e^{i\frac{A}{2}+i\frac{A}{2}}-e^{i\frac{A}{2}-i\frac{A}{2}}-e^{-i\frac{A}{2}+i\frac{A}{2}}+e^{-i\frac{A}{2}-i\frac{A}{2}}}{-4}\\
&= \frac{e^{iA}-e^{0}-e^{0}+e^{-iA}}{-4}\\
&= \frac{e^{iA}-1-1+e^{-iA}}{-4}\\
&= \frac{e^{iA}-2+e^{-iA}}{-4}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2-\left(e^{iA}+e^{-iA}\right)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}(1-\cos A)
\end{aligned}$$

Si on fait la racine de chaque côté, on a

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)}$$

8.6. On va commencer par montrer que

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{A}{2} &= \left(\frac{e^{i\frac{A}{2}}+e^{-i\frac{A}{2}}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{i\frac{A}{2}}e^{i\frac{A}{2}}+e^{i\frac{A}{2}}e^{-i\frac{A}{2}}+e^{-i\frac{A}{2}}e^{i\frac{A}{2}}+e^{-i\frac{A}{2}}e^{-i\frac{A}{2}}}{4} \\
&= \frac{e^{i\frac{A}{2}+i\frac{A}{2}}+e^{i\frac{A}{2}-i\frac{A}{2}}+e^{-i\frac{A}{2}+i\frac{A}{2}}+e^{-i\frac{A}{2}-i\frac{A}{2}}}{4} \\
&= \frac{e^{iA}+e^{0}+e^{0}+e^{-iA}}{4} \\
&= \frac{e^{iA}+1+1+e^{-iA}}{4} \\
&= \frac{e^{iA}+2+e^{-iA}}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2+\left(e^{iA}+e^{-iA}\right)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\cos A\right)
\end{aligned}$$

Si on fait la racine de chaque côté, on a

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos A\right)}$$

8.7. On a

$$\begin{aligned}
\sin 4\theta &= \mathrm{Im}\left(\cos 4\theta + i\sin 4\theta\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(e^{4i\theta}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^4\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta + 6i^2\cos^2\theta\sin^2\theta + 4i^3\cos\theta\sin^3\theta + i^4\sin^4\theta\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta\right) \\
&= 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta
\end{aligned}$$

8.8. On a

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= \mathrm{Re}\left(\cos 5\theta + i\sin 5\theta\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{5i\theta}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^5\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^5\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta + 10i^2\cos^3\theta\sin^2\theta\right.\\
&\qquad\left. + 10i^3\cos^2\theta\sin^3\theta + 5i^4\cos\theta\sin^4\theta + i^5\sin^5\theta\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta\right.\\
&\qquad\left. - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta\right)\\
&= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta
\end{aligned}$$

8.9. On a

$$\begin{aligned}
\sin 7\theta &= \mathrm{Im}\left(\cos 7\theta + i\sin 7\theta\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(e^{7i\theta}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left(e^{i\theta}\right)^7\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^7\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\cos^7\theta + 7i\cos^6\theta\sin\theta + 21i^2\cos^5\theta\sin^2\theta + 35i^3\cos^4\theta\sin^3\theta\right.\\
&\qquad\left. + 35i^4\cos^3\theta\sin^4\theta + 21i^5\cos^2\theta\sin^5\theta + 7i^6\cos\theta\sin^6\theta + i^7\sin^7\theta\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\cos^7\theta + 7i\cos^6\theta\sin\theta - 21\cos^5\theta\sin^2\theta - 35i\cos^4\theta\sin^3\theta\right.\\
&\qquad\left. + 35\cos^3\theta\sin^4\theta + 21i\cos^2\theta\sin^5\theta - 7\cos\theta\sin^6\theta - i\sin^7\theta\right)\\
&= 7\cos^6\theta\sin\theta - 35\cos^4\theta\sin^3\theta + 21\cos^2\theta\sin^5\theta - \sin^7\theta
\end{aligned}$$

8.10. On a

$$\begin{aligned}
\sin^4\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^4 - 4\left(e^{i\theta}\right)^3\left(e^{-i\theta}\right) + 6\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^2 - 4\left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)^3 + \left(e^{-i\theta}\right)^4}{16i^4} \\
&= \frac{e^{i4\theta} - 4e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta} - 4e^{i\theta}e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta}}{16} \\
&= \frac{e^{i4\theta} - 4e^{i2\theta} + 6 - 4e^{-i2\theta} + e^{-4i\theta}}{16} \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{i4\theta}+e^{-4i\theta}}{2} - 4\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2} + 3\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3\right) \\
&= \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

8.11. On a

$$\begin{aligned}
\cos^6\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^6 \\
&= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^6 + 6\left(e^{i\theta}\right)^5\left(e^{-i\theta}\right) + 15\left(e^{i\theta}\right)^4\left(e^{-i\theta}\right)^2 + 20\left(e^{i\theta}\right)^3\left(e^{-i\theta}\right)^3 + 15\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^4 + 6\left(e^{i\theta}\right)\left(e^{-i\theta}\right)^5 + \left(e^{-i\theta}\right)^6}{64} \\
&= \frac{e^{i6\theta} + 6e^{i5\theta}e^{-i\theta} + 15e^{i4\theta}e^{-i2\theta} + 20e^{i3\theta}e^{-i3\theta} + 15e^{i2\theta}e^{-i4\theta} + 6e^{i\theta}e^{-i5\theta} + e^{-i6\theta}}{64} \\
&= \frac{e^{i6\theta} + 6e^{i4\theta} + 15e^{i2\theta} + 20 + 15e^{-i2\theta} + 6e^{-i4\theta} + e^{-i6\theta}}{64} \\
&= \frac{1}{32}\left(\frac{e^{i6\theta}+e^{-i6\theta}}{2} + 6\frac{e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}}{2} + 15\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2} + 10\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10\right) \\
&= \frac{1}{32}\cos 6\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta + \frac{15}{32}\cos 2\theta + \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

8.12. On a

$$\begin{aligned}
\sin A+\sin B &= \operatorname{Im}\left(\cos A+i\sin A+\cos B+i\sin B\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(e^{iA}+e^{iB}\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(e^{\frac{iA+iB}{2}+\frac{iA-iB}{2}}+e^{\frac{iA+iB}{2}-\frac{iA-iB}{2}}\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(e^{\frac{iA+iB}{2}}e^{\frac{iA-iB}{2}}+e^{\frac{iA+iB}{2}}e^{-\frac{iA-iB}{2}}\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(e^{\frac{iA+iB}{2}}\left(e^{\frac{iA-iB}{2}}+e^{-\frac{iA-iB}{2}}\right)\right)\\
&= 2\operatorname{Im}\left(e^{\frac{iA+iB}{2}}\left(\frac{e^{\frac{iA-iB}{2}}+e^{-\frac{iA-iB}{2}}}{2}\right)\right)\\
&= 2\operatorname{Im}\left(e^{\frac{iA+iB}{2}}\cos\frac{A-B}{2}\right)\\
&= 2\operatorname{Im}\left(\left(\cos\frac{A+B}{2}+i\sin\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}\right)\\
&= 2\operatorname{Im}\left(\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+i\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)\\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}
\end{aligned}$$

8.13. On a

$$\begin{aligned}
3\cos\left(\theta+\pi\right)+4\cos\left(\theta+\pi/2\right) &= \operatorname{Re}\left[3\left(\cos\left(\theta+\pi\right)+i\sin\left(\theta+\pi\right)\right)+4\left(\cos\left(\theta+\pi/2\right)+i\sin\left(\theta+\pi/2\right)\right)\right]\\
&= \operatorname{Re}\left[3e^{i(\theta+\pi)}+4e^{i(\theta+\pi/2)}\right]\\
&= \operatorname{Re}\left[3e^{i\theta}e^{i\pi}+4e^{i\theta}e^{i\pi/2}\right]\\
&= \operatorname{Re}\left[e^{i\theta}\left(3e^{i\pi}+4e^{i\pi/2}\right)\right]\\
&= \operatorname{Re}\left[e^{i\theta}\left(-3+4i\right)\right]\\
&= \operatorname{Re}\left[e^{i\theta}5e^{2,2143i}\right]\\
&= \operatorname{Re}\left[5e^{i(\theta+2,2143)}\right]\\
&= 5\cos\left(\theta+2,2143\right)
\end{aligned}$$

8.14. On a

$$\begin{aligned}
6\cos(\theta)+4\cos(\theta+\pi) &= \mathrm{Re}\left[6\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)+4\left(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\right)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[6e^{i(\theta)}+4e^{i(\theta+\pi)}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[6e^{i\theta}+4e^{i\theta}e^{i\pi}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\left(6+4e^{i\pi}\right)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\left(6-4\right)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}2\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[2e^{i(\theta)}\right] \\
&= 2\cos(\theta)
\end{aligned}$$

8.15. On a

$$\begin{aligned}
\cos\left(\theta+\tfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\tfrac{\pi}{2}\right) &= \mathrm{Re}\left[\left(\cos\left(\theta+\tfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta+\tfrac{\pi}{3}\right)\right)+\left(\cos\left(\theta+\tfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{2}}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i+i\right)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\left(\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)i\right)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\sqrt{2+\sqrt{3}}\,e^{\frac{5\pi}{12}i}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\sqrt{2+\sqrt{3}}\,e^{i\left(\theta+\frac{5\pi}{12}\right)}\right] \\
&= \sqrt{2+\sqrt{3}}\cos\left(\theta+\tfrac{5\pi}{12}\right) \\
&= 1{,}9318\cos\left(\theta+\tfrac{5\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$