

Calcul avancé
Examen 4

Chapitre 6 : Les équations différentielles
25 % de la note finale

Hiver 2020

Nom _____

1. (10 points)

Trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$xy' = x^6 + 5y$$

2. (10 points)

Trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$y^2 + t^2 + (e^{2y} + 2ty) y' = 0$$

3. (15 points)

Résoudre

$$y'' = y' + x(y')^3$$

et trouvez la solution particulière pour $y = 0$ et $y' = \sqrt{2}$ quand $x = 0$.

4. (15 points)

Trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$y'' - 4y = e^x \sin x$$

5. (10 points)

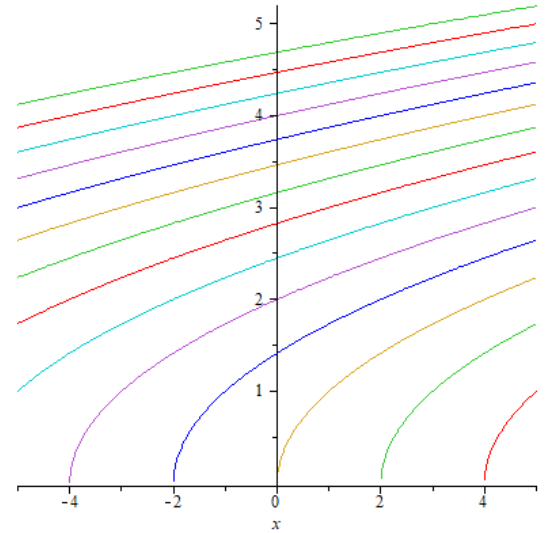
Trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$(y')^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)y' + 1 = 0$$

6. (10 points)

Trouvez la famille de fonctions orthogonales à la famille suivante (montrée sur la figure).

$$y^2 = x + C$$



7. (15 points)

Trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$y' = \frac{y^3 + 2xy^2}{x^3}$$

8. (15 points)

Quand on place un objet initialement à 50 °C dans une pièce à 20 °C (température constante), il atteint une température de 40 °C en 2 h.

On place maintenant ce même objet (toujours initialement à 50 °C) dans une pièce dans laquelle la température ambiante varie selon la formule suivante.

$$T_0 = 20^{\circ}\text{C} + 2\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{h}} \cdot t$$

On place donc notre objet dans la pièce à 9 h (qui est notre $t = 0$). On va supposer que la loi du refroidissement de Newton est valide quand l'objet se refroidit ou se réchauffe.

- Quelle sera sa température à midi ?
- Quelle sera la température minimale atteinte et à quelle heure l'objet atteint-il cette température minimale ?

Réponses

1. $y = x^6 + Cx^5$

2. $y^2t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}e^{2y} + C = 0$

3. $(y + \sqrt{2})^2 = 2 - 4x$

4. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - e^x \left(\frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \sin x \right)$

5. $y^2 = -2x + C$ et $y = Ce^{-x}$

6. $y = Ce^{-2x}$

7. $\frac{x}{y-x} = \ln \left(\frac{Cxy}{y-x} \right)$

8. a) 37,83 °C b) 33,77 °C à 15 h 53