

**Calcul avancé**

**Examen 4**

Chapitre 6 : les équations différentielles

25 % de la note finale

Hiver 2017

Nom : \_\_\_\_\_

---

1. Trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$y'' + 3y' - 10y = x$$

2. Résoudre

$$xy' = y + xe^{y/x}$$

et trouvez la solution particulière pour  $y(1) = 2$ .

3. Trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$(y + \cos x)dx + xdy = 0$$

4. Trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$xy' + y = x \sin x$$

5. Trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$(x + 2y)dx + (3x + 6y)dy = 0$$

6. Trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

7. Trouvez une famille de courbes orthogonales à la famille

$$y = x^2 + C$$

8. En 1974, Stephen Hawking a découvert que les trous noirs émettent une petite quantité de radiation, entraînant ainsi une lente évaporation du trou noir au fil du temps. Selon Hawking, la masse d'un trou noir varie selon l'équation différentielle suivante.

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1,26 \times 10^{23} \frac{\text{kg}^3}{\text{an}}}{M^2}$$

- a) Trouver la solution générale de cette équation.  
b) Après une supernova, il se forme un trou noir dont la masse initiale est  $6 \times 10^{31}$  kg. Combien de temps faudra-t-il pour que ce trou noir s'évapore complètement ? (Attendez-vous à un temps très long...)

Réponses

1)  $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{10}x - \frac{3}{100}$

2)  $y = x \ln\left(\frac{1}{e^{-2} - \ln x}\right)$

3)  $y = \frac{C - \sin x}{x}$

4)  $y = \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{C}{x}$

5)  $y = C - \frac{x}{3}$

6)  $y = C_2 e^{C_1 x}$

7)  $y = \ln\left(\frac{c}{\sqrt{x}}\right)$

8) a)  $M = \sqrt[3]{M_0^3 - 3,78 \times 10^{23} \frac{\text{kg}^3}{\text{an}} \cdot t}$

b)  $5,71 \times 10^{71}$  ans