

**Calcul avancé**  
**Examen 1**

Nombres complexes et fonctions hyperboliques  
25 % de la note finale

Hiver 2019

Nom \_\_\_\_\_

---

1. (40 Points)

Calculez la valeur des expressions suivantes, sous forme cartésienne.

a)  $\left| (6+8i) - \overline{(1+4i)} \right|$

b)  $i^{10}$

c)  $\frac{23+i}{2+7i}$

d)  $\text{Ln}(-12+5i)$

e)  $\sqrt{e^{i\pi/3}}$

f)  $\arccos i$

g)  $\sqrt[3]{-i}$

h)  $(i)^{2+i}$

**2.** (12 points)

Sachant que  $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$ , démontrez que

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x)$$

**3.** (12 points)

Montrez que

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3)$$

**4.** (12 points)

Montrez que

$$\sinh(x+y)\sinh(x-y) = \sinh^2 x - \sinh^2 y$$

5. (12 Points)

Trouvez la valeur minimale de  $y$  si  $y$  est donnée par

$$y = 5 \cosh x + 4 \sinh x$$

(Rappel : la valeur d'une fonction est minimale si la dérivée est nulle et si la deuxième dérivée est positive.)

6. (12 Points)

Calculez

$$\int_0^1 \frac{14dx}{160 - 12x - x^2}$$

Réponses.

1. a) 13    b) -1    c)  $1 - 3i$     d)  $2,5649 + 2,7468i$     e)  $\pm \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$   
f)  $\frac{\pi}{2} - 0,8813i + 2\pi n$     g)  $\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$     h)  $-e^{-\pi/2} \approx -0,20787$

5. 3

6.  $\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{artanh}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 0,09116$