Factorisation en nombre premier

Comment factoriser

Tout nombre peut être factorisé en nombre premier

$$n = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} p_3^{\gamma} p_4^{\delta} \dots$$

où les *p* sont des nombres premiers.

Par exemple, si on factorise les nombres 12 et 60, on obtient

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Pour factoriser un nombre, on doit savoir si ce nombre est divisible par quel nombre premier. On a vu que l'on peut le savoir grâce à l'arithmétique modulaire. Prenons un exemple : trouvons donc les facteurs de 7965.

Ce nombre n'est pas divisible par 2. Il est divisible par 3, car 7+9+6+5=27, qui est divisible par 3. Si on divise par 3, on obtient 2655. Ce nombre est encore une fois divisible par 3, car 2+6+5+5 = 18. Si on divise par 3 on a 885, qui est encore divisible par 3, car 8+8+5 = 21. Si on divise par 3 on a 295 qui n'est plus divisible par 3. 295 est évidemment divisible par 5, ce qui donne 59. Ceci termine la factorisation puisque 59 est un nombre premier.

La factorisation est donc

$$7965 = 3^3 \cdot 5 \cdot 59$$

(On a divisé trois fois par 3, une fois par 5 et une fois par 59.)

Il n'était peut-être pas évident que 59 est un nombre premier, mais c'est assez facile de la savoir. Ce nombre n'est pas divisible par 2, ni 3, ni 5, ni 7. Inutile d'aller plus loin que 7, car $\sqrt{59} = 7,68$

Exemple AMQ 2006 : Une factorisation un peu compliquée

Factorisez le nombre 12345654321

Ce nombre est 111111^2

111111 est divisible par 11. Il reste 10101

10101 est divisible par 3. Il reste 3367

3367 est divisible 7. Il reste 481

481 est divisible par 13. Il reste 37 qui est un nombre premier

La factorisation est donc

$$\begin{aligned}12345654321 &= (111111)^2 \\ &= (3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37)^2 \\ &= 3^2\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 13^2\cdot 37^2\end{aligned}$$

Ce qu'on peut connaitre à partir de la factorisation

1) Nombre de diviseurs d'un nombre

Tous les diviseurs d'un nombre peuvent se trouver à partir de la factorisation. Par exemple, 60 = 2^2 * 3 *5 a les diviseurs

1 = 1

2 = 2

3 = 3

$4 = 2^2$

$5 = 5$

$6 = 2 * 3$

$10 = 2 * 5$

$12 = 2^2 * 3$

$15 = 3 * 5$

$20 = 2^2 * 5$

$30 = 2 * 3 * 5$

$60 = 2^2 * 3 * 5$

On voit qu'il faut faire toutes les combinaisons possibles des facteurs. Pour les 2^2, on peut ne pas le prendre, prendre 2 ou prendre 2^2. Pour 3 on peut ne pas le prendre ou le prendre. Pour 5, on peut ne pas le prendre ou le prendre. Le nombre de possibilités pour chaque facteur va donc de 0 à la valeur de l'exposant, ce qui nous donne un nombre de possibilités égal à l'exposant +1.

En combinant pour tous les facteurs, on a

$$\text{Nombre de diviseurs} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)....$$

Exemple   Combien de diviseurs a le nombre 123420

Puisque $123420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 17$

Le nombre de diviseurs est $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$

On pourrait connaître tous les diviseurs en faisant toutes les possibilités

2) Plus grand facteur commun de 2 nombres

Si on veut connaître le plus grand facteur commun de deux nombres, il faut les factoriser les deux nombres et chercher le plus grand facteur qui se retrouve dans les deux factorisations. Cela revient à prendre l'exposant le plus petit pour chaque facteur

Exemple Quel est le plus grand facteur commun de 84 et 112

puisque $84 = 2^2 * 3 * 7$ et que $112 = 2^4 * 7$, alors le plus grand facteur commun est $2^2 * 7 = 28$

On peut aussi trouver le nombre de facteurs communs aux deux nombres en trouvant le nombre de diviseurs de facteur le plus grand. Cela veut dire que 84 et 112 ont 3*2=6 facteurs communs

3) Plus petit multiple commun

Si on veut connaître le plus petit multiple commun de deux nombres, il faut les factoriser les deux nombres et chercher le plus petit multiple que l'on peut faire avec les deux factorisations. Cela revient à prendre l'exposant le plus grand pour chaque facteur

Exemple Quel est le plus petit multiple commun de 84 et 112

puisque $84 = 2^2 * 3 * 7$ et que $112 = 2^4 * 7$, alors le plus petit multiple commun est $2^4 * 3 * 7 = 336$

4) Somme des facteurs

La somme des facteurs de 12 est 28 puisque les facteurs de $12 = 2^2 * 3$ sont

1, 2, 3, 4, 6 et 12 et que 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28.

(En passant, si la somme des facteurs d'un nombre (à l'exception du nombre lui-même) est égale au nombre, il s'agit d'un nombre parfait. C'est le cas de 6 puisque les facteurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6 et que 1 + 2 + 3 = 6. Si la somme est inférieure au nombre, c'est un nombre déficient et si la somme est supérieure au nombre, c'est un nombre abondant)

La somme est

$$S = \sum p_1^{f_1} p_2^{f_2} p_3^{f_3} p_4^{f_4} p_5^{f_5} p_6^{f_6} \ldots$$

où on fait la somme de toutes les possibilités des exposants *f*. Les valeurs de *f* vont de 0 jusqu'à la valeur de l'exposant de la factorisation. Pour 12 on a

$$\begin{aligned} S &= 2^0 3^0 + 2^0 3^1 + 2^1 3^0 + 2^1 3^1 + 2^2 3^0 + 2^2 3^1 \\ &= 1 + 3 + 2 + 6 + 4 + 12 = 28 \end{aligned}$$

Cette somme est plus facile à faire si on l'écrit sous la forme

$$S = \left(1 + p_1 + p_1^2 + p_1^3 + \ldots + p_1^{\alpha}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + p_2^3 + \ldots + p_2^{\beta}\right)\left(1 + p_3 + p_3^2 + p_3^3 + \ldots + p_3^{\gamma}\right)\ldots$$

Par exemple, pour 12 on obtient

$$S = \left(1 + 2 + 2^2\right)\left(1 + 3\right) = 28$$

Exemple Quelle est la somme des diviseurs de 240

Puisque 240 = 2^5 * 3 * 5

on a

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5\right)\left(1 + 3\right)\left(1 + 5\right) \\ &= 63 * 4 * 6 = 1512 \end{aligned}$$

On sait donc que la somme des 24 facteurs de 240 est 1512.

5) Nombre de 0 à la fin d'un nombre

S'il y a un zéro à la fin d'un nombre, c'est que 10 est un facteur de ce nombre. Comme 10 = 2 * 5, cela signifie que 2 et 5 doivent être des facteurs du nombre. Le nombre de fois que 2 et 5 sont des facteurs du nombre correspond au nombre de zéro à la fin d'un nombre. Ainsi, le nombre représenté par la factorisation

$$2^5 3^2 5^3 7$$

a 3 zéros à la fin parce qu'on peut aller chercher 3 fois les facteurs 2 et 5. En fait, le nombre de zéro correspond simplement au plus bas exposant entre les exposants de 2 et de 5.

Exemple Combien y a-t-il de zéros à la fin de 100! ?

Premièrement on a

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$$

Dans cette multiplication, il y a beaucoup plus de facteurs 2 (à tous les deux nombres) que de facteur 5 (à tous les 5 nombres). Le nombre de zéro va donc correspondre au nombre de facteurs de 5 puisque ce sera ce facteur qui aura l'exposant le plus petit.

Les termes qui contribuent a ajouté des facteurs 5 sont

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100

Il y a 20 termes, mais cela ne veut pas dire qu'il y a 20 zéros parce qu'il y a 4 termes qui ont deux facteurs de 5 puisque le facteur 5 est au carré : $25 = 5^2$, $50 = 2 * 5^2$, $75 = 3 * 5^2$ et $100 = 4*5^2$.

Il y a donc 24 zéros à la fin de 100!