Solutionnaire du chapitre 8

1. On trouve le rayon minimal avec

$$\begin{aligned} R &> \sqrt{\frac{3S}{2\pi G\rho^2}} \\ &= \sqrt{\frac{3\cdot 2\times 10^8 Pa}{2\pi \cdot 6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\left(2750\frac{kg}{m^3}\right)^2}} \\ &= 435km \end{aligned}$$

2. Pour avoir une planète sphérique en roche, on doit avoir

$$\begin{aligned} R &> \sqrt{\frac{3S}{2\pi G\rho^2}} \\ &= \sqrt{\frac{3\cdot 2\times 10^8 Pa}{2\pi \cdot 6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\left(2300\frac{kg}{m^3}\right)^2}} \\ &= 520km \end{aligned}$$

Est-ce qu'on atteint ce rayon avec 10^{21} kg. Si on frome une boule avec cette quantité de roche, on a

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{masse}{volume} \\ 2300\frac{kg}{m^3} &= \frac{10^{21} kg}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\ R &= 470km \end{aligned}$$

La planète n'est donc pas sphérique.

3. On trouve le rayon maximal avec

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt[3]{\frac{M_c}{2M_{pert}}}\, r \\
&= \sqrt[3]{\frac{3,302\times 10^{23}kg}{2\cdot 1,9885\times 10^{30}kg}}\, 4,6\times 10^{10}m \\
&= 2\times 10^{6}m \\
&= 200\,000\; km
\end{aligned}$$

4. a) La densité est de

$$\rho = \frac{M}{volume}$$

La masse est formée de deux parties : le noyau et le manteau. La masse du noyau est égal à sa densité multipliée par son volume. Disons que le volume du noyau est de V'. On a donc

$$M_1 = \rho_1 V'$$

La masse du manteau est aussi égale à la masse multipliée par le volume. Dans ce cas, le volume est celui d'une sphère de volume V dans laquelle il y a une cavité de rayon V'. La masse est donc

$$M_2 = \rho_2 \left(V - V'\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{M_1 + M_2}{V} \\
&= \frac{\rho_1 V' + \rho_2 \left(V - V'\right)}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\
&= \frac{\rho_1 V' + \rho_2 \left(V - V'\right)}{V} \\
&= \rho_1 \left(\frac{V'}{V}\right) + \rho_2 \left(1 - \left(\frac{V'}{V}\right)\right) \\
&= \rho_2 + \left(\rho_1 - \rho_2\right)\left(\frac{V'}{V}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant les valeurs pour la Terre, on a

$$\rho = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$4400\tfrac{kg}{m^3} = 3000\tfrac{kg}{m^3} + \left(12000\tfrac{kg}{m^3} - 3000\tfrac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$1400 = 9000\left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$\frac{V'}{V} = 0,156$$

(Ce n'est pas très loin de la véritable valeur de 0,17)

b) En utilisant les valeurs pour Mercure, on a

$$\rho = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$5300\tfrac{kg}{m^3} = 3000\tfrac{kg}{m^3} + \left(12000\tfrac{kg}{m^3} - 3000\tfrac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$2300 = 9000\left(\frac{V'}{V}\right)$$

$$\frac{V'}{V} = 0,256$$

(C'est quand même assez loin de la véritable valeur de 0,42 ☹.)

5. a) La température est

$$\begin{aligned} T &= \sqrt[4]{\frac{L_{étoile}(1-A)}{16\pi\sigma D^2}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{3,828\times10^{26}W(1-0,90)}{16\pi\cdot5,67\times10^{-8}\tfrac{W}{m^2K^4}\left(1,082\times10^{11}m\right)^2}} \\ &= 184K \\ &= -89°C \end{aligned}$$

b) Puisque la température est de 462 °C et qu'elle devrait être de -89,1 °C, l'effet de serre fait augmenter la température de 551 °C

6. Le champ gravitationnel sur Mars est

$$
\begin{aligned}
g &= \frac{GM_{\male}}{R_{\male}^2} \\
&= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 6,4185\times10^{23}\,kg}{\left(3,386\times10^{6}\,m\right)^2} \\
&= 3,736\,\tfrac{N}{kg}
\end{aligned}
$$

a) On trouve la durée de chute avec

$$
\begin{aligned}
y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \\
7000m &= \frac{1}{2}3,736\,\tfrac{N}{kg}\,t^2 \\
t &= 61,21s
\end{aligned}
$$

b) On peut trouver la vitesse avec

$$
\begin{aligned}
v_y &= v_{0y} + at \\
&= 3,736\,\tfrac{N}{kg}\cdot 61,21s \\
&= 228,7\,\tfrac{m}{s}
\end{aligned}
$$

7. Au plus près, la distance entre Mars et la Terre est de 0,52 UA. Ainsi, l'angle entre la Terre et la Lune à cette distance est

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{3,844\times10^{8}\,m}{0,52\cdot 1,496\times10^{11}\,m} \\
&= 0,00494\,rad \\
&= 0,283^\circ \\
&= 17,0'
\end{aligned}
$$

On peut donc voir la Terre et la Lune séparément.

8. a) La variation d'énergie thermique est

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_f - E_i \\ &= MCT_f - MCT_i \\ &= MC\left(T_f - T_i\right) \\ &= MC\Delta T\end{aligned}$$

On doit donc trouver la masse de cette planète. Puisque le rayon est de 10 000 km et que la densité est de 7800 kg/m³, la masse est

$$\begin{aligned}M &= \rho \cdot volume \\ &= \rho \cdot \tfrac{4}{3}\pi R^3 \\ &= 7800 \tfrac{kg}{m^3} \cdot \tfrac{4}{3}\pi\left(10^7 m\right)^3 \\ &= 3,267 \times 10^{25} kg\end{aligned}$$

La variation d'énergie thermique est donc

$$\begin{aligned}\Delta E &= MC\Delta T \\ &= 3,267 \times 10^{28} g \cdot 0,444 \tfrac{J}{g°C} \cdot -200°C \\ &= -2,9 \times 10^{30} J\end{aligned}$$

Il y aura donc $2,9 \times 10^{30}$ J d'émise.

b) Le changement de rayon est

$$\frac{\Delta R}{R} = \alpha \Delta T$$

$$\frac{\Delta R}{10^7 m} = 1,17 \times 10^{-5} °C^{-1} \cdot -200°C$$

$$\Delta R = -23\,400 m$$

Le rayon diminue donc de 23 400 m.

c) La variation d'énergie gravitationnelle est

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_f - E_i \\ &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_f} - -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_i} \\ &= -\frac{3GM^2}{5}\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_1}\right) \\ &= -\frac{3\cdot 6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\left(3,267\times10^{25}\,kg\right)^2}{5}\left(\frac{1}{9976600m} - \frac{1}{10^7\,m}\right) \\ &= -1\times10^{31}\,J\end{aligned}$$

L'énergie émise par contraction gravitationnelle est donc de 10^{31} J.

d) la proportion est

$$\begin{aligned}\frac{E_g}{E_g + E_t} &= \frac{10^{31}\,J}{10^{31}\,J + 2,9\times10^{30}\,J} \\ &= 77,6\%\end{aligned}$$

9. La vitesse de libération est

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2\times6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\times1,48\times10^{23}\,kg}{2,634\times10^6\,m}} = 2739\,\tfrac{m}{s}$$

La vitesse des molécules est

$$v_{azote} = \sqrt{\frac{3\times1,38\times10^{-23}\,\frac{J}{K}\times110K}{28\times1,66\times10^{-27}\,kg}} = 313\,\tfrac{m}{s}$$

On a donc

$$\frac{v_{lib}}{v_{molécules}} = \frac{2739\,\frac{m}{s}}{313\,\frac{m}{s}} = 8,75$$

Ganymède pourrait donc garder une atmosphère d'azote.

10. La force de marée faite par la Lune sur la Terre est

$$F_{☽} = \frac{2GM_{☽} m R_{\oplus}}{r_{\oplus ☽}^{3}}$$

Alors que la force de marée faite par Jupiter sur Io est

$$F_{♃} = \frac{2GM_{♃} m R_{io}}{r_{♃\text{-io}}^{3}}$$

Le rapport est donc

$$\begin{aligned}
\frac{F_{♃}}{F_{☽}} &= \frac{\left(\dfrac{2GM_{♃} m R_{io}}{r_{♃\text{-io}}^{3}}\right)}{\left(\dfrac{2GM_{☽} m R_{\oplus}}{r_{\oplus ☽}^{3}}\right)} \\
&= \frac{r_{\oplus ☽}^{3} M_{♃} R_{io}}{r_{♃\text{-io}}^{3} M_{☽} R_{\oplus}} \\
&= \frac{\left(3,844\times 10^{8} m\right)^{3}\cdot 1,8986\times 10^{27} kg\cdot 1,822\times 10^{6} m}{\left(4,217\times 10^{8} m\right)^{3}\cdot 7,44\times 10^{22} kg\cdot 6,378\times 10^{6} m} \\
&= 5\,522
\end{aligned}$$

11. Pour la partie la plus près de l'anneau, la période est

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^{3}}{GM_{\text{h}}}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{\left(6,69\times 10^{7} m\right)^{3}}{6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,6846\times 10^{26} kg}} \\
&= 17\,651 s \\
&= 4,90 h
\end{aligned}$$

Pour la partie la plus éloignée de l'anneau, la période est

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{\text{h}}}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{\left(1,2\times10^8 m\right)^3}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,6846\times10^{26}\,kg}} \\
&= 42\,404 s \\
&= 11,78 h
\end{aligned}$$

Comme la partie la plus près tourne plus rapidement autour de Saturne que la planète sur elle-même, on verrait les particules de celle partie de l'anneau se lever à l'ouest et se coucher à l'est. Comme la partie la plus éloignée tourne moins rapidement autour de Saturne que la planète sur elle-même, on verrait les particules de celle partie de l'anneau se lever à l'est et se coucher à l'ouest.

12. a) l'intensité est

$$\begin{aligned}
I &= \frac{L}{4\pi D^2} \\
&= \frac{3,828\times10^{26} W}{4\pi\left(18,28\cdot 1,496\times10^{11} m\right)^2} \\
&= 4,073\,\frac{W}{m^2}
\end{aligned}$$

b) l'énergie captée est de

$$\begin{aligned}
E &= I\cdot A_{capteur} \\
&= I\pi R^2 \\
&= 3,696\,\frac{W}{m^2}\cdot\pi\cdot\left(2,5362\times10^7 m\right)^2 \\
&= 8,231\times10^{15} W
\end{aligned}$$

c) La puissance émise vers la Terre est

$$\begin{aligned}
L &= 0,51\cdot 8,231\times10^{15} W \\
&= 4,198\times10^{15} W
\end{aligned}$$

d) L'intensité reçue est

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{L}{4\pi D^2} \\
&= \frac{4{,}198\times 10^{15} W}{2\pi\left(17{,}26\cdot 1{,}496\times 10^{11} m\right)^2} \\
&= 1{,}002\times 10^{-10} \tfrac{W}{m^2}
\end{aligned}
$$

e) On trouve la magnitude bolométrique avec

$$
\begin{gathered}
I = 2{,}52\times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2}\cdot 10^{-0{,}4 m_{bol}} \\
1{,}002\times 10^{-10} \tfrac{W}{m^2} = 2{,}52\times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2}\cdot 10^{-0{,}4 m_{bol}} \\
0{,}00325 = 10^{-0{,}4 m_{bol}} \\
m_{bol} = 6{,}0
\end{gathered}
$$

La véritable valeur est de 5,32, ce qui veut dire que notre intensité calculée est presque exactement 2 fois trop petite.

Voici mon hypothèse ; 5,32 est la magnitude visuelle alors que 6 est la magnitude bolométrique. Si on suppose que l'énergie totale est uniquement dans le visible et qu'Uranus a absorbé toutes les autres longueurs d'onde, alors notre valeur de l'intensité serait l'intensité visuelle. La magnitude visuelle serait alors de

$$
\begin{gathered}
I_V = 0{,}306\times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2}\cdot 10^{-0{,}4 m} \\
1{,}002\times 10^{-10} \tfrac{W}{m^2} = 0{,}306\times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2}\cdot 10^{-0{,}4 m} \\
m = 3{,}71
\end{gathered}
$$

Si on suppose que seulement une partie de la lumière réfléchie est dans la partie visible du spectre, on peut arriver à 5,32.

Si quelqu'un a une autre idée pour expliquer la différence de magnitude, dites-la-moi!

13. a) La température est

$$
\begin{aligned}
T &= \sqrt[4]{\frac{L_{étoile}\left(1-A\right)}{16\pi\sigma D^2}} \\
&= \sqrt[4]{\frac{3{,}828\times 10^{26} W\left(1-0{,}29\right)}{16\pi\cdot 5{,}67\times 10^{-8} \frac{W}{m^2K^4}\left(30{,}07\cdot 1{,}496\times 10^{11} m\right)^2}} \\
&= 46{,}6 K
\end{aligned}
$$

b) On a

$$P_{recue} = P_{émise}$$

$$1,5 \cdot \frac{L_{étoile} R^2_{planète} \left(1-A\right)}{4D^2} = \sigma 4\pi R^2_{planète} T^4$$

$$1,5 \cdot \frac{L_{étoile} \left(1-A\right)}{4D^2} = \sigma 4\pi T^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{1,5 \cdot L_{étoile} \left(1-A\right)}{16\pi\sigma D^2}}$$

Avec les valeurs, on obtient

$$\begin{aligned} T &= \sqrt[4]{\frac{1,5 \cdot L_{étoile} \left(1-A\right)}{16\pi\sigma D^2}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{1,5 \cdot 3,828\times 10^{26} W \left(1-0,29\right)}{16\pi \cdot 5,67\times 10^{-8} \frac{W}{m^2K^4} \left(30,07 \cdot 1,496\times 10^{11} m\right)^2}} \\ &= 51,6K \end{aligned}$$