Solutionnaire du chapitre 5

1. Si on obtient 15 x 10^6 J avec 5 kg, la quantité d'énergie qu'on peut obtenir avec 1,9885 x 10^{30} kg est

$$\begin{aligned} E &= \frac{15\times 10^6 J}{5kg}\cdot 1,9885\times 10^{30} kg \\ &= 5,9655\times 10^{36} J \end{aligned}$$

La durée de vie du Soleil serait alors de

$$\begin{aligned} t &= \frac{E}{L} \\ &= \frac{5,9655\times 10^{36} J}{3,828\times 10^{26} W} \\ &= 1,558\times 10^{10} s \\ &= 493,8 ans \end{aligned}$$

2. Calculons l'énergie libérée par cette contraction. L'énergie gravitationnelle initiale est

$$U_g = -\frac{3}{2}\frac{GM^2}{R}$$

Alors que l'énergie finale est

$$U_g' = -\frac{3}{2}\frac{GM^2}{R'}$$

La variation d'énergie de l'étoile est donc

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}\left(U_g' - U_g\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\frac{GM^2}{R'} - -\frac{3}{2}\frac{GM^2}{R}\right)\\ &= \frac{3}{4}GM^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\\ &= \frac{3}{4}6,674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(2\cdot1,9885\times10^{30}kg\right)^2\left(\frac{1}{30\cdot1,496\times10^{11}m} - \frac{1}{0,1\cdot1,496\times10^{11}m}\right)\\ &= -5,27\times10^{40}J\end{aligned}$$

Si l'énergie gravitationnelle de l'étoile a baissé de 5,27 x 10^{40} J, c'est que l'étoile a rayonné 5,27 x 10^{40} J. La puissance rayonnée est donc de

$$\begin{aligned}P &= \frac{E}{t}\\ &= \frac{5,27\times10^{22}J}{100\,000\times365,25\times24\times60\times60}\\ &= 1,671\times10^{28}W\\ &= 43,7L_\odot\end{aligned}$$

3. L'énergie gravitationnelle est

$$U_g = -\frac{3}{2}\frac{GM^2}{R}$$

Puisque la puissance est le rythme à lequel cette énergie change, on a

$$\begin{aligned}P &= \frac{dU_g}{dt}\\ &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{2}\frac{GM^2}{R}\right)\\ &= \frac{d}{dR}\left(-\frac{3}{2}\frac{GM^2}{R}\right)\frac{dR}{dt}\\ &= \frac{3}{2}\frac{GM^2}{R^2}\frac{dR}{dt}\end{aligned}$$

Selon le théorème du viriel, seulement la moitié de l'énergie est rayonnée. Cela veut dire que la puissance obtenue est de

$$P = 2 \cdot 3,828 \times 10^{26} W$$
$$= 7,656 \times 10^{26} W$$

On a donc

$$7,656 \times 10^{26} W = \frac{3}{2} \frac{GM^2}{R^2} \frac{dR}{dt}$$

$$7,656 \times 10^{26} W = \frac{3}{2} \frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \left(1,9885 \times 10^{30} kg\right)^2}{\left(6,957 \times 10^8 m\right)^2} \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = 9,361 \times 10^{-7} \tfrac{m}{s}$$

Si on change les unités pour avoir de km par siècle, on arrive à

$$\frac{dR}{dt} = 9,361 \times 10^{-7} \tfrac{m}{s} \cdot \frac{1km}{1000m} \cdot \frac{100 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{1 \text{ siècle}}$$
$$= 2,95 \tfrac{km}{siecle}$$

4. Trouvons premièrement le nombre de désintégrations par seconde dans le Soleil. Comme il y a 1,9885 x 10^{33} g dans le Soleil et qu'il y a 12 400 désintégrations par seconde dans un gramme, le nombre total de désintégrations par seconde est

$$N = 1,9885 \times 10^{33} g \cdot 12400 \tfrac{des}{g\,s}$$
$$= 2,466 \times 10^{37} \tfrac{des}{s}$$

Comme chaque désintégration donne 4,27 MeV, l'énergie libérée par seconde, qui est la luminosité, est

$$L = 2,466 \times 10^{37} \tfrac{des}{s} \cdot 4,27 \tfrac{MeV}{des}$$
$$= 1,053 \times 10^{38} MeV$$
$$= 1,697 \times 10^{25} W$$

Ceci représente 4,4 % de sa luminosité actuelle.

5. L'énergie libérée lors de la première étape est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(2\cdot 1,007\ 825\ 032u - 2,014\ 101\ 778u\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(0,001\,548\,286u\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= 1,442MeV\end{aligned}$$

L'énergie libérée lors de la deuxième étape est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(1,007\ 825\ 032u + 2,014\ 101\ 778u - 3,016\ 029\ 319u\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(0,005\,897\,491u\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= 5,494MeV\end{aligned}$$

L'énergie libérée lors de la troisième étape est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(2\cdot 3,016\ 029\ 319u - 4,002\ 603\ 254u - 2\cdot 1,007\ 825\ 032u\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(0,013\,805\,532u\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= 12,860MeV\end{aligned}$$

6. a) L'énergie libérée est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(3\cdot 4,002\,603\,254u - 12,000\,000\,000u\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(0,007\,809\,762u\right)\times 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= 7,275MeV\end{aligned}$$

b) Le rendement est

$$\begin{aligned}R &= \frac{E}{M_{initiale}}\\ &= \frac{7,275\times 10^{6}\cdot 1,602\times 10^{-19}J}{3\cdot 4,002\,603\,254\cdot 1,660\ 559\times 10^{-27}kg}\\ &= 5,845\times 10^{13}\tfrac{J}{kg}\end{aligned}$$

c) Comme le Soleil est composé à 27,1 % d'hélium, la masse d'hélium dans le Soleil est

$$\begin{aligned} m_{He} &= 0,271 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg \\ &= 5,389 \times 10^{29} kg \end{aligned}$$

L'énergie est donc

$$\begin{aligned} E &= R \cdot M \\ &= 5,845 \times 10^{13} \tfrac{J}{kg} \cdot 5,389 \times 10^{29} kg \\ &= 3,15 \times 10^{43} J \end{aligned}$$

d) La durée de vie est

$$\begin{aligned} E &= Pt \\ 3,15 \times 10^{43} J &= 3,828 \times 10^{26} W \cdot t \\ t &= 8,228 \times 10^{16} s \\ t &= 2,61 \times 10^{9} ans \end{aligned}$$

Ce qui est 2,61 milliards d'années.

7. À 15 millions de kelvins, on a

$$\begin{aligned} kT &= 1,38065 \times 10^{-23} \tfrac{J}{K} \cdot 15\,000\,000 K \\ &= 2,071 \times 10^{-16} J \\ &= 1,293 keV \end{aligned}$$

Avec cette valeur, l'intégrale

$$N = (1,084 keV)^{3/2} N_{tot} \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sqrt{E}}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} dE$$

devient

$$N = (1,084keV)^{3/2} N_{tot} \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sqrt{E}}{(1,293keV)^{3/2}} e^{-\frac{E}{1,293keV}} dE$$
$$= 0,7676 N_{tot} \int_{E_1}^{E_2} \sqrt{E} \cdot e^{-\frac{E}{1,293keV}} dE$$

Avec les bornes, on obtient

$$N = 0,7676 N_{tot} \int_{3}^{11} \sqrt{E} \cdot e^{-\frac{E}{1,293keV}} dE$$

Le code pour cette intégrale sur wolfram est

integrate (x^0.5*exp(-x/1.293)) from 3 to 11

Cette intégrale vaut 0,2598.

On a donc

$$N = 0,7676 N_{tot} \cdot 0,2598$$
$$= 0,1994 N_{tot}$$

Donc, 19,9 % des particules ont une énergie entre 3 et 11 keV.

8. a) La pression au centre est

$$P_{centre} = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$$
$$= \frac{3 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot (10 \times 10^{30} kg)^2}{8\pi (2,324 \times 10^9 m)^4}$$
$$= 2,73 \times 10^{13} Pa$$

b) Le Soleil à densité constante a une pression centrale de 1,36 x 10^{14} Pa. Donc la pression par rapport à celle du Soleil est

$$\frac{2,73 \times 10^{13} Pa}{1,36 \times 10^{14} Pa} = 0,201$$

C'est donc 20,1% de la pression au centre du Soleil à densité constante.

c) La densité est

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\ &= \frac{10\times 10^{30}\,kg}{\frac{4}{3}\pi\left(2,324\times 10^{9}\,m\right)^3} \\ &= 190,2\,\tfrac{kg}{m^3}\end{aligned}$$

d) Le Soleil à densité constante a une densité de 1418 kg/m³. Donc la densité par rapport à celle du Soleil est

$$\frac{190,2\,\frac{kg}{m^3}}{1418\,\frac{kg}{m^3}} = 0,134$$

C'est donc 13,4% de la densité au centre du Soleil à densité constante.

e) Pour trouver la température, il nous faut la densité de moles *n/V*.

Avec une densité de 190,2 kg/m³, on a

$$\begin{aligned}\frac{n}{V} &= 1625\,\tfrac{mol}{kg}\cdot\rho \\ &= 1625\,\tfrac{mol}{kg}\cdot 190,2\,\tfrac{kg}{m^3} \\ &= 3,09075\times 10^{5}\,\tfrac{mol}{m^3}\end{aligned}$$

Ainsi, la température au centre de cette étoile de densité constante serait de

$$\begin{aligned}P &= \left(\frac{n}{V}\right)RT \\ 2,73\times 10^{13}\,Pa &= 3,09075\times 10^{5}\,\tfrac{mol}{m^3}\cdot 8,31\,\tfrac{J}{Kmol}\,T \\ T &= 10,6\times 10^{6}\,K\end{aligned}$$

f) Le Soleil à densité constante a une température de 7,10 x 10^6 K. Donc la température par rapport à celle du Soleil est

$$\frac{7,10\times 10^{6}\,K}{10,6\times 10^{6}\,K} = 1,50$$

La température est donc 1,5 fois plus grande.

9. Le nombre de mole d'hydrogène dans 50% de la densité est

$$\frac{n_H}{V} = \frac{0,5 \cdot \rho}{0,001\frac{kg}{mol}} = 500\frac{mol}{kg}\rho$$

Le nombre de mole d'hélium dans 40% de la densité est

$$\frac{n_{He}}{V} = \frac{0,4 \cdot \rho}{0,004\frac{kg}{mol}} = 100\frac{mol}{kg}\rho$$

Le nombre de mole de carbone dans 10% de la densité est

$$\frac{n_{He}}{V} = \frac{0,1 \cdot \rho}{0,012\frac{kg}{mol}} = \frac{25}{3}\frac{mol}{kg}\rho$$

Le nombre de mole d'électrons libres est donc

$$\frac{n_{é}}{V} = 1 \cdot 500\frac{mol}{kg}\rho + 2 \cdot 100\frac{mol}{kg}\rho + 6 \cdot \frac{25}{3}\frac{mol}{kg}\rho = 750\frac{mol}{kg}\rho$$

Le nombre total de mole par unité de volume est donc de

$$\begin{aligned}\frac{n}{V} &= 500\frac{mol}{kg}\rho + 100\frac{mol}{kg}\rho + \frac{25}{3}\frac{mol}{kg}\rho + 750\frac{mol}{kg}\rho \\ &= 1358,3\frac{mol}{kg}\rho\end{aligned}$$

10. a) L'intensité est

$$\begin{aligned}I &= I_0 e^{-k\rho x} \\ &= 1\frac{W}{m^2} \cdot e^{-0,05\frac{m^2}{kg}\cdot 2\frac{kg}{m^3}\cdot 50m} \\ &= 6,74\times 10^{-3}\frac{W}{m^2}\end{aligned}$$

b) Le libre parcours moyen est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{k\rho} \\ &= \frac{1}{0,05\frac{m^2}{kg}\cdot 2\frac{kg}{m^3}} \\ &= 10m\end{aligned}$$

11. On a

$$
\begin{aligned}
I &= I_0 e^{-k\rho x} \\
0,5I_0 &= I_0 e^{-k\cdot 1,3\frac{kg}{m^3}\cdot 1000m} \\
0,5 &= e^{-k\cdot 1,3\frac{kg}{m^3}\cdot 1000m} \\
\ln(0,5) &= -k\cdot 1,3\tfrac{kg}{m^3}\cdot 1000m \\
k &= 5,33\times 10^{-4}\tfrac{m^2}{kg}
\end{aligned}
$$

12. a) *n/V* est

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{V} &= 1625\tfrac{mol}{kg}\cdot\rho \\
&= 1625\tfrac{mol}{kg}\cdot 152900\tfrac{kg}{m^3} \\
&= 2,485\times 10^{8}\tfrac{mol}{m^3}
\end{aligned}
$$

La pression est donc

$$
\begin{aligned}
P &= \left(\frac{n}{V}\right)RT \\
&= 2,485\times 10^{8}\tfrac{mol}{m^3}\cdot 8,31\tfrac{J}{Kmol}\cdot 15,67\times 10^{6}K \\
&= 3,24\times 10^{16}Pa
\end{aligned}
$$

b) La pression calculée est 1,34 fois plus grande que la pression selon le modèle. C'est qu'à de telles densités, on ne peut plus considérer que le gaz est parfait et il faudrait faire des corrections à la formule. En fait, la formule des gaz parfaits donnent de bons résultats pour $r > 0,2R_\odot$ (pression aux alentours de 4×10^{15} Pa). Puis à mesure qu'on s'approche du centre, les valeurs divergent de plus en plus de ce que donne la loi des gaz parfaits.

13. La pression au centre est

$$
\begin{aligned}
P_{centre} &\approx 21\frac{GM^2}{R^4} \\
&\approx 21\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(10\times10^{30}\,kg\right)^2}{\left(2,324\times10^9\,m\right)^4} \\
&\approx 4,80\times10^{15}\,Pa
\end{aligned}
$$

b) Le Soleil a une pression centrale de 2,4 x 10^{16} Pa. Donc la pression par rapport à celle du Soleil est

$$\frac{4,8\times10^{15}\,Pa}{2,4\times10^{16}\,Pa} = 0,20$$

C'est donc 20 % de la pression au centre du Soleil.

c) La température est

$$
\begin{aligned}
T_{centre} &\approx 5,3\times10^{-15}\,\tfrac{Km}{kg}\frac{M}{R} \\
&\approx 5,3\times10^{-15}\,\tfrac{Km}{kg}\frac{10\times10^{30}\,kg}{2,324\times10^9\,m} \\
&\approx 2,34\times10^7\,K
\end{aligned}
$$

C'est 23,4 millions de K.

d) Le Soleil a une température de 15,67 x 10^6 K. Donc la température par rapport à celle du Soleil est

$$\frac{23\times10^6\,K}{15,67\times10^6\,K} = 1,50$$

La température est donc 1,5 fois plus grande.

e) On trouve *n/V* avec

$$P = \left(\frac{n}{V}\right) RT$$
$$4,8\times10^{15}\,Pa = \left(\frac{n}{V}\right)\cdot 8,31\,\tfrac{J}{Kmol}\cdot 2,34\times10^{7}\,K$$
$$\frac{n}{V} = 2,47\times10^{7}\,\tfrac{mol}{m^3}$$

Alors la densité est

$$\frac{n}{V} = 1625\,\tfrac{mol}{kg}\cdot\rho$$
$$2,47\times10^{7}\,\tfrac{mol}{m^3} = 1625\,\tfrac{mol}{kg}\cdot\rho$$
$$\rho = 15200\,\tfrac{kg}{m^3}$$

f) Le Soleil a une densité de 152 900 kg/m³. Donc la densité par rapport à celle du Soleil est

$$\frac{15200\,\tfrac{kg}{m^3}}{152\,900\,\tfrac{kg}{m^3}} = 0,0955$$

C'est donc 9,55 % de la densité au centre du Soleil.

14. a) On sait que le rythme sont

$$\text{Rythme de fusion}_{PP} = k_1 T^4$$
$$\text{Rythme de fusion}_{CNO} = k_2 T^{19,9}$$

De plus, on sait qu'il y a égalité à 18,5 millions de kelvins. On a donc

$$1 = \frac{k_2\left(1,85\times10^{7}\,K\right)^{19,9}}{k_1\left(1,85\times10^{7}\,K\right)^{4}}$$
$$\frac{k_2}{k_1} = \left(1,85\times10^{7}\,K\right)^{-15,9}$$

Pour avoir un rythme 2 fois plus grand, on doit avoir

$$2 = \frac{k_2 T^{19,9}}{k_1 T^4}$$

$$2 = \left(1,85 \times 10^7 K\right)^{-15,9} \frac{T^{19,9}}{T^4}$$

$$2 = \left(1,85 \times 10^7 K\right)^{-15,9} T^{15,9}$$

$$2 = \left(\frac{T}{1,85 \times 10^7 K}\right)^{15,9}$$

$$\frac{T}{1,85 \times 10^7 K} = \sqrt[15,9]{2}$$

$$T = 1,932 \times 10^7 K$$

C'est 19,32 millions de kelvins.

b) À 15 670 000 K, on a

$$\text{Rythme de fusion}_{PP} = k_1 T^4$$
$$\text{Rythme de fusion}_{CNO} = k_2 T^{19,9}$$

Le rythme de fusion totale est

$$\text{Rythme de fusion total} = k_1 T^4 + k_2 T^{19,9}$$

La proportion provenant de la réaction PP est donc

$$\frac{\text{Rythme de fusion}_{PP}}{\text{Rythme de fusion total}} = \frac{k_1 T^4}{k_1 T^4 + k_2 T^{19,9}}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{k_2}{k_1} T^{15,9}}$$

Avec les valeurs on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\text{Rythme de fusion}_{PP}}{\text{Rythme de fusion total}} &= \frac{1}{1+\frac{k_2}{k_1}T^{15,9}} \\ &= \frac{1}{1+\left(1,85\times 10^7 K\right)^{-15,9}\left(1,567\times 10^7 K\right)^{15,9}} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{1,567\times 10^7 K}{1,85\times 10^7 K}\right)^{15,9}} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{1,567}{1,85}\right)^{15,9}} \\ &= 0,933\end{aligned}$$

Ainsi, 93,3 % de l'énergie provient de la réaction PP. Il reste donc 6,7 % pour le cycle CNO.