Solutionnaire du chapitre 4

1. La fréquence est

$$\begin{aligned} f &= \frac{c}{\lambda} \\ &= \frac{3\times 10^{8}\,\frac{m}{s}}{540\times 10^{-9}\,m} \\ &= 5,556\times 10^{14}\,Hz \end{aligned}$$

La période est donc

$$T = \frac{1}{f} = 1,8\times 10^{-15}\,s$$

2. La longueur d’onde est

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c}{f} \\ &= \frac{3\times 10^{8}\,\frac{m}{s}}{200\times 10^{9}\,Hz} \\ &= 1,5mm \end{aligned}$$

Cette longueur d’onde correspond à une onde dans les micro-ondes.

3. La fréquence est

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-18}\,s} = 10^{18}\,Hz$$

La longueur d’onde est donc

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{c}{f} \\ &= \frac{3\times 10^{8}\ \frac{m}{s}}{10^{18}\,Hz} \\ &= 3\times 10^{-10}\,m \\ &= 0,3nm\end{aligned}$$

Avec une telle longueur d'onde, cette onde fait partie des rayons X

4. La vitesse est

$$\begin{aligned}\delta &= 1+\frac{v_r}{c} \\ 0,999985 &= 1+\frac{v_r}{3\times 10^{8}\ \frac{m}{s}} \\ v_r &= -4500\,\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

L'étoile s'approche donc de nous à 4500 m/s

5. Le changement de longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda' - \lambda \\ &= 501,657nm - 501,567nm \\ &= 0,09nm\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}z &= \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{0,09nm}{501,567nm} \\ &= 1,794\times 10^{-4}\end{aligned}$$

La vitesse est donc

$$z = \frac{v_r}{c}$$

$$1,794 \times 10^{-4} = \frac{v_r}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}}$$

$$v_r = 53\,831 \tfrac{m}{s} = 53,83 \tfrac{km}{s}$$

L'étoile s'éloigne donc de nous à 53,83 km/s

6. On a donc

$$\begin{aligned} z &= \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{0,040nm}{588,995nm} \\ &= 6,791 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

La vitesse est donc

$$z = \frac{v_r}{c}$$

$$6,791 \times 10^{-5} = \frac{v_r}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}}$$

$$v_r = 20\,374 \tfrac{m}{s} = 20,37 \tfrac{km}{s}$$

L'étoile s'éloigne donc de nous à 20,37 km/s

7. On a donc

$$\begin{aligned} z &= \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{-0,044nm}{616,956nm} \\ &= -7,132 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

La vitesse est donc

$$z = \frac{v_r}{c}$$

$$-7{,}132 \times 10^{-5} = \frac{v_r}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}}$$

$$v_r = -21\,395 \tfrac{m}{s} = 21{,}40 \tfrac{km}{s}$$

L'étoile s'approche donc de nous à 21,40 km/s.

8. a) Le changement de longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda' - \lambda \\ &= 656{,}044nm - 656{,}281nm \\ &= -0{,}237nm\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}z &= \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{-0{,}237nm}{656{,}281nm} \\ &= -3{,}611 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

La vitesse est donc

$$z = \frac{v_r}{c}$$

$$-3{,}611 \times 10^{-4} = \frac{v_r}{3 \times 10^8 \frac{m}{s}}$$

$$v_r = -108\,338 \tfrac{m}{s} = -108{,}34 \tfrac{km}{s}$$

b) La vitesse angulaire est

$$\omega = 10{,}369\text{"}/\,an$$

En radian par seconde, cette vitesse est

$$\omega = \left(\frac{10,369}{3600}\right)^\circ / an \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} \cdot \frac{1an}{365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}$$
$$= 1,593 \times 10^{-12} \tfrac{rad}{s}$$

Pour trouver la vitesse, il nous faudra la distance de l'étoile, qu'on peut trouver avec la parallaxe.

$$D_{(a.l.)} = \frac{3,262al}{\theta_{(\sec)}}$$
$$= \frac{3,262al}{0,5454}$$
$$= 5,98al$$

La vitesse tangentielle est donc de

$$v_t = \omega D$$
$$= 1,593 \times 10^{-12} \tfrac{rad}{s} \cdot \left(5,98 \cdot 9,46 \times 10^{15} m\right)$$
$$= 90,18 \tfrac{km}{s}$$

c) La vitesse est

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}$$
$$= \sqrt{\left(108,34 \tfrac{km}{s}\right)^2 + \left(90,18 \tfrac{km}{s}\right)^2}$$
$$= 140,96 \tfrac{km}{s}$$

9. La température est

$$\lambda_{pic} = \frac{2,898 \times 10^{-3} mK}{T}$$
$$443,8 \times 10^{-9} m = \frac{2,898 \times 10^{-3} mK}{T}$$
$$T = 6530K$$

10. La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda_{pic} &= \frac{2,898\times10^{-3}mK}{T} \\ &= \frac{2,898\times10^{-3}mK}{5773K} \\ &= 502nm\end{aligned}$$

11. On a B - V = 0,31 – 0,48 = - 0,17. Puisque l'indice est négatif, on a

$$\begin{aligned}\log T &= 3,9791 - 0,6545\cdot IC + 1,7407\cdot IC^2 - 4,6088\cdot IC^3 \\ &\qquad + 6,7926\cdot IC^4 - 5,3969\cdot IC^5 + 2,1930\cdot IC^6 - 0,3595\cdot IC^7 \\ &= 3,9791 - 0,6545\cdot -0,17 + 1,7407\cdot(-0,17)^2 - 4,6088\cdot(-0,17)^3 \\ &\qquad + 6,7926\cdot(-0,17)^4 - 5,3969\cdot(-0,17)^5 \\ &\qquad + 2,1930\cdot(-0,17)^6 - 0,3595\cdot(-0,17)^7 \\ &= 4,1698\end{aligned}$$

La température est donc

$$\begin{aligned}\log T &= 4,1698 \\ T &= 14785K\end{aligned}$$

12. Le rapport des intensités est

$$\begin{aligned}\frac{I_A}{I_B} &= \frac{\sigma 4\pi R_A^2 T_A^4}{\sigma 4\pi R_B^2 T_B^4} \\ &= \frac{R_A^2 T_A^4}{R_B^2 T_B^4} \\ &= \frac{(1,73R_\odot)^2(9940K)^4}{(0,0084R_\odot)^2(25\,200K)^4} \\ &= \frac{(1,73)^2(9940)^4}{(0,0084)^2(25\,200)^4} \\ &= 1026,78\end{aligned}$$

On peut ensuite trouver la différence de magnitude avec la formule suivante

$$\frac{I_A}{I_B} = 10^{0,4(m_B - m_A)}$$

On a donc

$$1026,78 = 10^{0,4(m_B - m_A)}$$
$$m_B - m_A = 7,53$$

13. Le rayon de l'étoile se trouve avec la formule suivante

$$L = \sigma 4\pi R^2 T^4$$
$$78,5 \cdot 3,828 \times 10^{26} W = 5,67 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2 K^4} 4\pi R^2 \cdot (4940K)^4$$
$$R = 8,415 \times 10^9 m = 12,1 R_\odot$$

14. Avec un pic d'émission à 415 nm, la température de surface de l'étoile est

$$\lambda_{pic} = \frac{2,898 \times 10^{-3} mK}{T}$$
$$415 \times 10^{-9} m = \frac{2,898 \times 10^{-3} mK}{T}$$
$$T = 6983K$$

Avec une magnitude absolue de 2,21, la luminosité de l'étoile est

$$M = 2,5 \log\left(\frac{3,015 \times 10^{28} W}{L}\right)$$
$$2,21 = 2,5 \log\left(\frac{3,015 \times 10^{28} W}{L}\right)$$
$$L = 3,938 \times 10^{27} W$$

À partir de là, on peut trouver le rayon avec la formule suivante

$$L = \sigma 4\pi R^2 T^4$$
$$3,938\times10^{27}W = 5,67\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2K^4}\,4\pi R^2\cdot(6983K)^4$$
$$R = 1,524\times10^9 m = 2,19R_\odot$$

15. Puisque

$$L = \sigma 4\pi R^2 T^4$$

le rayon d'une étoile est

$$R = \sqrt{\frac{L}{\sigma 4\pi T^4}}$$

Le rapport des rayons est donc

$$\frac{R_{Bételgeuse}}{R_{Proxima}} = \frac{\sqrt{\frac{L_{Bételgeuse}}{\sigma 4\pi T^4}}}{\sqrt{\frac{L_{Proxima}}{\sigma 4\pi T^4}}}$$

Puisque les pics d'émission sont identiques, les températures sont identiques et il ne reste que

$$\begin{aligned}\frac{R_{Bételgeuse}}{R_{Proxima}} &= \sqrt{\frac{L_{Bételgeuse}}{L_{Proxima}}}\\ &= \sqrt{\frac{84900L_\odot}{0,0017L_\odot}}\\ &= 7067\end{aligned}$$

16. La masse totale est

$$\begin{aligned}M_{tot} &= \frac{(v_A+v_B)^3\,T}{2\pi G}\\ &= \frac{\left(60\,000\,\tfrac{m}{s}+20\,000\,\tfrac{m}{s}\right)^3(280\cdot24\cdot60\cdot60s)}{2\pi\cdot6,674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}}\\ &= 2,954\times10^{30}kg\\ &= 14,85M_\odot\end{aligned}$$

De plus, on a

$$M_A \cdot 60\,\tfrac{km}{s} = M_B \cdot 20\,\tfrac{km}{s}$$
$$3M_A = M_B$$

On a donc

$$M_a + M_b = 14,85M_\odot$$
$$M_a + 3M_a = 14,85M_\odot$$
$$4M_a = 14,85M_\odot$$
$$M_a = 3,71M_\odot$$

Et

$$M_a + M_b = 14,85M_\odot$$
$$3,71M_\odot + M_b = 14,85M_\odot$$
$$M_b = 11,14M_\odot$$

17. a) Trouvons premièrement la vitesse de chaque étoile. Le décalage de l'étoile A est

$$z_A = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{656,343nm - 656,279nm}{656,279nm} = 9,752\times 10^{-9}$$

Ce qui donne une vitesse de

$$z_A = \frac{v_A}{c}$$
$$9,752\times 10^{-9} = \frac{v}{3\times 10^8\,\frac{m}{s}}$$
$$v_A = 29\,256\,\tfrac{m}{s}$$

Pour l'étoile B, le décalage est

$$z_B = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{656,302nm - 656,279nm}{656,279nm} = 3,505\times 10^{-9}$$

ce qui donne une vitesse de

$$z_B = \frac{v_B}{c}$$
$$3,505\times10^{-9} = \frac{v_B}{3\times10^8 \frac{m}{s}}$$
$$v_B = 10\,514 \tfrac{m}{s}$$

b) La masse totale est

$$\begin{aligned}
M_{tot} &= \frac{(v_A + v_B)^3 T}{2\pi G} \\
&= \frac{\left(29\,256 \frac{m}{s} + 10\,514 \frac{m}{s}\right)^3 (380\cdot24\cdot60\cdot60s)}{2\pi\cdot6,674\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}} \\
&= 4,925\times10^{30} kg \\
&= 2,4767 M_\odot
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
M_A\cdot 29\,256 \tfrac{m}{s} &= M_B\cdot 10\,514 \tfrac{m}{s} \\
2,783 M_A &= M_B
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
M_a + M_b &= 2,4767 M_\odot \\
M_a + 2,783 M_a &= 2,4767 M_\odot \\
3,783 M_a &= 2,4767 M_\odot \\
M_a &= 0,6548 M_\odot
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
M_a + M_b &= 2,4767 M_\odot \\
0,6548 M_\odot + M_b &= 2,4767 M_\odot \\
M_b &= 1,8219 M_\odot
\end{aligned}$$

c) On trouve la distance avec

$$M_{tot} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

$$4,925 \times 10^{30} kg = \frac{4\pi^2 r^3}{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \left(380 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60s\right)^2}$$

$$r = 2,0781 \times 10^{11} m = 1,39UA$$