Solutionnaire du chapitre 3

1. La distance est

$$v = \frac{2d}{t}$$

$$3\times 10^8 \tfrac{m}{s} = \frac{2d}{2,56s}$$

$$d = 3,84\times 10^8 m$$

2. La distance est

$$7,78\times 10^{11} m \cdot \frac{1UA}{1,496\times 10^{11} m} = 5,2UA$$

3. La distance est

$$D_{(a.l.)} = \frac{3,262al}{\theta_{(\text{sec})}} = \frac{3,262al}{0,0394} = 82,8al$$

$$D_{(pc)} = \frac{1pc}{\theta_{(\text{sec})}} = \frac{1pc}{0,0394} = 25,4pc$$

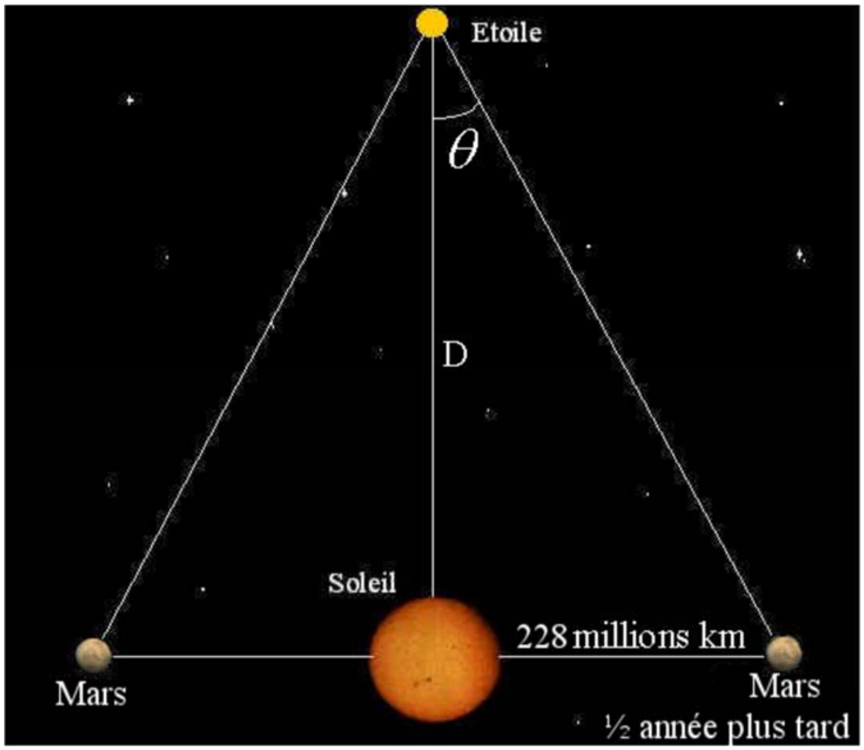
4. La parallaxe est

$$D_{(a.l.)} = \frac{3,262al}{\theta_{(\text{sec})}}$$

$$240al = \frac{3,262al}{\theta_{(\text{sec})}}$$

$$\theta_{(\text{sec})} = 0,0136''$$

5. La triangulation se ferait alors avec l'orbite de Mars. On aurait alors la situation suivante



www.astrosurf.com/voyager3/astro/unites.htm

On aurait alors

$$\tan\theta = \frac{2,28\times 10^{11} m}{D}$$

En général, l'angle est très petit (le plus grand dépasse à peine 0,0002°). On peut donc utiliser l'approximation des petits angles

$$\tan\theta \approx \theta$$

où l'angle est en radian. On a donc

$$\theta_{(rad)} = \frac{2,28\times 10^{11} m}{D}$$

$$D = \frac{2,28\times 10^{11} m}{\theta_{(rad)}}$$

Généralement, on mesure l'angle en seconde d'arc, qui vaut 1/3600 degré (chaque degré est divisé en 60 minutes d'arc et chaque minute d'arc est divisé en 60 secondes d'arc). Aussi, on veut obtenir une réponse en année-lumière. On va donc transformer cette équation pour qu'on puisse utiliser les angles en secondes pour obtenir une distance en année-lumière.

Le lien entre l'angle en seconde et l'angle en radian est

$$\theta_{(rad)} = \theta_{(\sec)} \times \frac{1}{3600}\tfrac{\deg}{\sec} \times \frac{\pi}{180}\tfrac{rad}{\deg}$$

On divise l'angle en seconde par 3600 pour obtenir les degrés, puis on transforme les degrés en radian avec la fraction de droite dans l'équation.

On a donc

$$\begin{aligned} D &= \frac{2,28\times 10^{11} m}{\theta_{(rad)}} \\ &= \frac{2,28\times 10^{11} m}{\theta_{(\sec)} \times \frac{1}{3600}\tfrac{\deg}{\sec} \times \frac{\pi}{180}\tfrac{rad}{\deg}} \\ &= \frac{1}{\theta_{(\sec)}} \times \frac{2,28\times 10^{11} m}{\frac{1}{3600}\tfrac{\deg}{\sec} \times \frac{\pi}{180}\tfrac{rad}{\deg}} \end{aligned}$$

En calculant la valeur du terme de droite, on obtient

$$D = \frac{4,7028\times 10^{16} m}{\theta_{(\sec)}}$$

Le parsec aurait donc une longueur de $4,7028 \times 10^{16}$ m.

La distance faite par la lumière pendant une année sur Mars est

$$\begin{aligned} D &= ct \\ &= 3\times 10^{8} \tfrac{m}{s} \cdot \left(686,971 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s\right) \\ &= 1,7806\times 10^{16} m \end{aligned}$$

Le nombre de parsecs par année-lumière est

$$\frac{4,7028\times 10^{16} m}{1,7806\times 10^{16} m} = 2,641$$

On aurait donc

1 pc = 2,641 al

au lieu de 1 pc = 3,262 al

6. On trouve la luminosité avec la formule suivante

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}$$
$$1,29\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2} = \frac{L}{4\pi\left(16,7\times9,46\times10^{15}\,m\right)^2}$$
$$L = 4,046\times10^{27}W$$

En luminosité solaire, cette luminosité est

$$4,046\times10^{27}W\cdot\frac{1L_\odot}{3,828\times10^{26}W} = 10,6L_\odot$$

7. On trouve premièrement que l'intensité lumineuse est de

$$\begin{aligned} I &= 2,52\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\,10^{-0,4m} \\ &= 2,52\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\,10^{-0,4\cdot-0,90} \\ &= 5,77\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

On trouve la luminosité avec la formule suivante

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}$$
$$5,77\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2} = \frac{L}{4\pi\left(863\times9,46\times10^{15}\,m\right)^2}$$
$$L = 4,835\times10^{31}W$$

En luminosité solaire, cette luminosité est

$$4,835\times10^{31}W\cdot\frac{1L_\odot}{3,828\times10^{26}W} = 126\,311L_\odot$$

8. On trouve premièrement que l'intensité lumineuse est de

$$\begin{aligned} I &= 2,52\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\,10^{-0,4m} \\ &= 2,52\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\,10^{-0,4\cdot -0,58} \\ &= 4,20\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

On trouve ensuite la distance de l'étoile

$$\begin{aligned} D_{(a.l.)} &= \frac{3,262al}{\theta_{(\text{sec})}} \\ &= \frac{3,262al}{0,089} \\ &= 36,65al \end{aligned}$$

On trouve ensuite la luminosité avec la formule suivante

$$\begin{aligned} I &= \frac{L}{4\pi D^2} \\ 4,20\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2} &= \frac{L}{4\pi\left(36,65\times9,46\times10^{15}m\right)^2} \\ L &= 6,495\times10^{28}W \end{aligned}$$

En luminosité solaire, cette luminosité est

$$6,495\times10^{28}W\cdot\frac{1L_\odot}{3,828\times10^{26}W} = 170L_\odot$$

9. La magnitude absolue est

$$\begin{aligned} M &= 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right) \\ &= 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{6,93L_\odot}\right) \\ &= 2,64 \end{aligned}$$

10. On a

$$\begin{aligned} M &= 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right) \\ -2,04 &= 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right) \\ L &= 516L_\odot \end{aligned}$$

11. On a

$$\begin{aligned} M &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ 4,7 &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{326,2al}\right) \\ m &= 9,7 \end{aligned}$$

12. a) On a

$$\begin{aligned} M &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ &= -0,851 + 5\log\left(\frac{32,62al}{139al}\right) \\ &= -4,0 \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned} M &= 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right) \\ -4,0 &= 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right) \\ L &= 3133L_\odot \end{aligned}$$

13. L'intensité minimale est

$$\begin{aligned} I &= 2,52\times 10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\,10^{-0,4m} \\ &= 2,52\times 10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\,10^{-0,4\cdot 6} \\ &= 1,00\times 10^{-10}\,\tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{L}{4\pi D^2} \\ 1,00\times 10^{-10}\,\tfrac{W}{m^2} &= \frac{10^{11}\times 3,828\times 10^{26}W}{4\pi d^2} \\ d &= 1,742\times 10^{23}m \end{aligned}$$

En année-lumière, cette distance est 18,42 millions d'années-lumière

14. a) On a

$$\begin{aligned} L &= 347L_\odot P^{0,972} \\ &= 347L_\odot \cdot 48^{0,972} \\ &= 14\,950L_\odot \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned} M &= -2,43\log(P)-1,61 \\ &= -2,43\log(48)-1,61 \\ &= -5,70 \end{aligned}$$

15. La magnitude absolue est

$$\begin{aligned} M &= -2,43\log(P)-1,61 \\ &= -2,43\log(8)-1,61 \\ &= -3,80 \end{aligned}$$

Avec la magnitude, on trouve ensuite la distance

$$\begin{aligned} M &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ -3,8 &= 2,7 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ D &= 652al \end{aligned}$$

16. On trouve la masse avec la formule suivante

$$\begin{aligned} M_{tot} &= \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2\left(1,8\cdot 1,496\times 10^{11}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\left(200\times 26\times 60\times 60\right)^2} \\ &= 3,868\times 10^{31}kg \end{aligned}$$

C'est la masse de l'étoile et de la planète, mais la masse des planètes est toujours négligeable par rapport à la masse des étoiles. Cette masse est donc la masse de l'étoile. En masse solaire, cette masse est

$$3,868\times 10^{31}kg\cdot\frac{1M_\odot}{1,9885\times 10^{30}kg} = 19,45M_\odot$$

17. On trouve la masse avec la formule suivante

$$\begin{aligned} M_{tot} &= \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2\left(15\cdot 1,496\times 10^{11}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\left(32\times 365,25\times 24\times 60\times 60\right)^2} \\ &= 6,555\times 10^{30}kg \end{aligned}$$

C'est la masse de l'étoile et de la planète, mais la masse des planètes est toujours négligeable par rapport à la masse des étoiles. Cette masse est donc la masse de l'étoile. En masse solaire, cette masse est

$$6,555\times 10^{30}kg\cdot\frac{1M_\odot}{1,9885\times 10^{30}kg} = 3,30M_\odot$$

18. On trouve la distance avec

$$\theta_{(rad)} = \frac{r}{D}$$

$$\left(\frac{12}{3600}\right)^{\circ} \times \frac{2\pi rad}{360^{\circ}} = \frac{r}{5\,pc \times 3,262 \times 9,46 \times 10^{15}\,\frac{m}{al}}$$

$$r = 8,976 \times 10^{12}\,m$$

En unité astronomique, cette distance est

$$8,976 \times 10^{12}\,m \cdot \frac{1UA}{1,496 \times 10^{11}\,m} = 60UA$$

19. 1) On trouve la distance avec

$$\theta_{(rad)} = \frac{r}{D}$$

$$\left(\frac{17,6}{3600}\right)^{\circ} \times \frac{2\pi rad}{360^{\circ}} = \frac{r}{4,36al \times 9,46 \times 10^{15}\,\frac{m}{al}}$$

$$r = 3,519 \times 10^{12}\,m$$

2) La masse totale est donc

$$\begin{aligned} M_{tot} &= \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2 \left(3,519 \times 10^{12}\,m\right)^3}{6,674 \times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\left(79,9 \times 365,25 \times 24 \times 60 \times 60\right)^2} \\ &= 4,055 \times 10^{30}\,kg \end{aligned}$$

En masse solaire, cette masse est

$$4,055 \times 10^{30}\,kg \cdot \frac{1M_{\odot}}{1,9885 \times 10^{30}\,kg} = 2,04M_{\odot}$$

Notre première équation est donc

$$M_A + M_B = 2,04M_{\odot}$$

3) Avec l'équation du centre de masse, on a

$$M_A r_A = M_B r_B$$
$$M_A \theta_{A(rad)} D = M_B \theta_{B(rad)} D$$
$$M_A \theta_{A(rad)} = M_B \theta_{B(rad)}$$
$$M_A \left(\frac{\theta_{A('')}}{3600} \right) \frac{2\pi rad}{360°} = M_B \left(\frac{\theta_{B('')}}{3600} \right) \frac{2\pi rad}{360°}$$
$$M_A \theta_{A('')} = M_B \theta_{B('')}$$

On a donc

$$M_A \theta_{A('')} = M_B \theta_{B('')}$$
$$M_A \cdot 7,9 = M_B \cdot 9,7$$
$$M_A = M_B \cdot 1,2278$$

En utilisant ce résultat dans notre autre équation, on a

$$M_A + M_B = 2,04 M_\odot$$
$$1,2278 M_B + M_B = 2,04 M_\odot$$
$$2,2278 M_B = 2,04 M_\odot$$
$$M_B = 0,92 M_\odot$$

Ainsi, la masse de l'autre étoile est

$$M_A + M_B = 2,04 M_\odot$$
$$M_A + 0,92 M_\odot = 2,04 M_\odot$$
$$M_A = 1,12 M_\odot$$

$$M_c = 3 \cdot 2 \times 10^{30} kg = 6 \times 10^{30} kg$$

20. a) Quand les étoiles sont au plus près l'une de l'autre, elles sont toutes les deux à leur périapside, de chaque côté du centre de masse.

La distance entre le centre de masse et Sirius A est alors

$$\begin{aligned} r_{pA} &= a(1-e) \\ &= 6,433UA(1-0,5923) \\ &= 2,623UA \end{aligned}$$

La distance entre le centre de masse et Sirius B est alors

$$\begin{aligned} r_{pB} &= a(1-e) \\ &= 13,268UA(1-0,5923) \\ &= 5,409UA \end{aligned}$$

La distance entre les deux étoiles est alors la somme de ces deux distances. Elle est donc de 8,032 UA

b) Quand les étoiles sont au plus loin l'une de l'autre, elles sont toutes les deux à leur apoapside, de chaque côté du centre de masse.

La distance entre le centre de masse et Sirius A est alors

$$\begin{aligned} r_{aA} &= a(1+e) \\ &= 6,433UA(1-0,5923) \\ &= 10,243UA \end{aligned}$$

La distance entre le centre de masse et Sirius B est alors

$$\begin{aligned} r_{aB} &= a(1-e) \\ &= 13,268UA(1+0,5923) \\ &= 21,127UA \end{aligned}$$

La distance entre les deux étoiles est alors la somme de ces deux distances. Elle est donc de 31,37 UA.

c) On trouve la masse totale des étoiles avec la formule de la période. La valeur de a dans cette formule est la somme des deux demis grands axes, soit 19,701 UA.

On a donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$

$$50,09 \times 365,25 \times 24 \times 60 \times 60 = 2\pi\sqrt{\frac{\left(19,701 \cdot 1,496 \times 10^{11} m\right)^3}{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot M_{tot}}}$$

$$M_{tot} = 6,061 \times 10^{30} kg$$

$$M_{tot} = 3,048 M_\odot$$

On peut ensuite utiliser

$$M_A a_A = M_B a_B$$

$$M_A \cdot 6,433 = M_B \cdot 13,268$$

$$M_A = M_B \cdot 2,062$$

En utilisant ce résultat dans notre autre équation, on a

$$M_A + M_B = 3,048 M_\odot$$

$$2,062 M_B + M_B = 3,048 M_\odot$$

$$3,062 M_B = 3,048 M_\odot$$

$$M_B = 0,995 M_\odot$$

Ainsi, la masse de l'autre étoile est

$$M_A + M_B = 3,048 M_\odot$$

$$M_A + 0,995 M_\odot = 3,048 M_\odot$$

$$M_A = 2,053 M_\odot$$

d) On a alors

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 6,061 \times 10^{30} kg}{\left(19,701 \cdot 1,496 \times 10^{11} m\right)} \frac{1-0,5923}{1+0,5923}} \\ &= 5928 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse de l'étoile de Sirius A

$$\begin{aligned} v_{aA} &= \frac{m_B}{M_{tot}} v_a \\ &= \frac{0,995 M_\odot}{3,048 M_\odot} 5928 \tfrac{m}{s} \\ &= 1935 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

et la vitesse de Sirius B est

$$\begin{aligned} v_{aB} &= \frac{m_A}{M_{tot}} v_a \\ &= \frac{2,053 M_\odot}{3,048 M_\odot} 5928 \tfrac{m}{s} \\ &= 3993 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

e) Quelle est l'énergie mécanique de ce système?

La masse réduite est

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{0,995 M_\odot \cdot 2,053 M_\odot}{3,048 M_\odot} \\ &= 0,6701 M_\odot \\ &= 1,333 \times 10^{30} kg \end{aligned}$$

L'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned} E &= -\frac{G M_c \mu}{2a} \\ &= -\frac{6,674 \times 10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2} \cdot 6,061 \times 10^{30} kg \cdot 1,333 \times 10^{30} kg}{2 \cdot \left(19,701 \cdot 1,496 \times 10^{11} m\right)} \\ &= -9,148 \times 10^{37} J \end{aligned}$$