Solutionnaire du chapitre 3

1. Le champ est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_{\oplus}}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,97\times10^{24}\,kg}{\left(6,47\times10^{6}\,m\right)^2} \\ &= 9,52\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

2. a) Le champ est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_{mars}}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 6,42\times10^{23}\,kg}{\left(3,4\times10^{6}\,m\right)^2} \\ &= 3,71\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

b) Le poids est

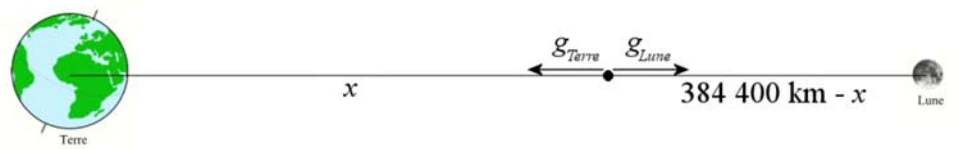
$$\begin{aligned} P &= mg \\ &= 70kg\cdot 3,71\tfrac{N}{kg} \\ &= 259N \end{aligned}$$

c) Le rapport des poids est

$$\frac{P_{\text{sur Mars}}}{P_{\text{sur Terre}}} = \frac{259N}{686N} = 0,378$$

Le poids sur Mars est donc 37,8 % du poids sur Terre.

3. Entre la Terre et la Lune, le champ est la somme des champs.



Si le champ est nul, c'est que le champ fait par la Terre est de même grandeur que celui de la Lune. On a donc

En posant que la position initiale de Richard était à x = 0, on a

$$g_{Terre} = g_{Lune}$$
$$\frac{GM_{Terre}}{r_{Terre}^2} = \frac{GM_{Lune}}{r_{Lune}^2}$$
$$\frac{5,97\times10^{24}kg}{x^2} = \frac{7,34\times10^{22}kg}{\left(3,844\times10^{8}m - x\right)^2}$$
$$\frac{81,33}{x^2} = \frac{1}{\left(3,844\times10^{8}m - x\right)^2}$$
$$81,33\cdot\left(3,844\times10^{8}m - x\right)^2 = x^2$$
$$81,33x^2 - 6,253\times10^{10}m\cdot x + 1,202\times10^{19} = x^2$$
$$80,33x^2 - 6,253\times10^{10}m\cdot x + 1,202\times10^{19} = 0$$

Les solutions de cette équation sont

x = 346 031 km et x = 432 339 km.

La deuxième solution correspond à un point qui n'est pas entre la Terre et la Lune et ce n'est donc pas une bonne solution. Il est vrai que les champs sont égaux à cet endroit, mais ils sont dans la même direction, ce qui fait que les champs s'additionnent et ne peuvent pas donner un champ nul. La bonne réponse est donc 346 031 km.

4. La force est

$$\begin{aligned} F &= \frac{GM_{Terre}M_{Lune}}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,97\times10^{24}kg\cdot 7,34\times10^{22}kg}{\left(3,844\times10^{8}m\right)^2} \\ &= 1,99\times10^{20}N \end{aligned}$$

5. La force est

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{GM_{Terre}M_{Lune}}{r^2} \\
&= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,97\times10^{24}\,kg\cdot 7,34\times10^{22}\,kg}{\left(3,844\times10^{8}\,m\right)^2} \\
&= 1,99\times10^{20}\,N
\end{aligned}
$$

6. a) L'excentricité est

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 \\
&= \frac{\left(70\,000\,\frac{m}{s}\right)^2\left(5\times10^{10}\,m\right)}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}\,kg} - 1 \\
&= 0,8460
\end{aligned}
$$

b) la distance est

$$
\begin{aligned}
r &= r_p\,\frac{1+e}{1+e\cos\theta} \\
&= 5\times10^{10}\,m\,\frac{1+0,8460}{1+0,8460\cdot\cos 90^\circ} \\
&= 9,230\times10^{10}\,m
\end{aligned}
$$

Ce qui est 92,30 millions de km.

7. a) La période est

$$
\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{Terre}}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{\left(3,844\times10^{8}\,m\right)^3}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,97\times10^{24}\,kg}} \\
&= 2,37\times10^{6}\,s \\
&= 27,5\,jours
\end{aligned}
$$

b) La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM_{Terre}}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,97\times10^{24}\,kg}{3,844\times10^{8}\,m}} \\ &= 1018\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

8. On trouve la masse avec la formule suivante

$$\begin{aligned} M_{tot} &= \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2\left(2,2\times10^{11}\,m\right)^3}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\left(159,5\times24\times60\times60s\right)^2} \\ &= 3,32\times10^{31}\,kg \end{aligned}$$

En masse solaire, cette masse est

$$3,32\times10^{31}\,kg\cdot\frac{1M_\odot}{1,9885\times10^{30}\,kg} = 16,7M_\odot$$

9. L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2r} \\ &= -\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}\,kg\cdot 5,97\times10^{24}\,kg}{2\cdot 1,496\times10^{11}\,m} \\ &= -2,65\times10^{33}\,J \end{aligned}$$

10. L'énergie mécanique initiale est

$$E_{mec} = -\frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2r}$$

Si on amène la Terre à une autre distance (appelons la *r*'), l'énergie sera

$$E'_{mec} = -\frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2r'}$$

La variation d'énergie est donc

$$\begin{aligned}\Delta E_{mec} &= E'_{mec} - E_{mec} \\ &= -\frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2r'} - \frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2r} \\ &= \frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \\ &= \frac{6,674\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}kg\cdot 5,97\times 10^{24}kg}{2}\left(\frac{1}{1,496\times 10^{11}m} - \frac{1}{1,596\times 10^{11}m}\right) \\ &= 1,66\times 10^{32}J\end{aligned}$$

11. La distance est

$$\begin{aligned}r_p &= a(1-e) \\ &= 1,523\,679UA(1-0,093\,315) \\ &= 1,381\,497UA\end{aligned}$$

12. La distance est

$$\begin{aligned}r_a &= a(1+e) \\ &= 1,523\,679UA(1+0,093\,315) \\ &= 1,665\,861UA\end{aligned}$$

13. La vitesse est donnée par la formule suivante.

$$\begin{aligned}v_P^2 &= \frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e} \\ &= \frac{6,674\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}kg}{1,523\,679\times 1,496\times 10^{11}m}\frac{1+0,093\,315}{1-0,093\,315} \\ &= 7,0206\times 10^{8}\tfrac{m^2}{s^2} \\ v_p &= 26\,496\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

14. La vitesse est donnée par la formule suivante.

$$\begin{aligned} v_a^2 &= \frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e} \\ &= \frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg}{1,523\,679\times 1,496\times 10^{11}\,m}\frac{1-0,093\,315}{1+0,093\,315} \\ &= 4,8283\times 10^{8}\,\frac{m^2}{s^2} \\ v_a &= 21\,973\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

15. La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(1,523\,679\times 1,496\times 10^{11}\,m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg}} \\ &= 5,93556\times 10^{7}\,s \\ &= 686,99\,j \end{aligned}$$

16. L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GM_c m}{2a} \\ &= -\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg\cdot 6,4185\times 10^{23}\,kg}{2\cdot 1,523\,679\times 1,496\times 10^{11}\,m} \\ &= -1,868\times 10^{32}\,J \end{aligned}$$

17. Le moment cinétique est

$$L = mvr\sin\psi$$

On va calculer cette valeur quand la planète est au périhélie. On a alors

$$\begin{aligned} L &= mvr\sin\psi \\ &= mv_a r_a \sin 90° \\ &= 6,42\times10^{23}kg\cdot 26\,496\tfrac{m}{s}\cdot\left(1,381\,497\cdot 1,496\times10^{11}m\right) \\ &= 3,516\times10^{39}\tfrac{kgm}{s} \end{aligned}$$

18. a) La distance est

$$\begin{aligned} r &= \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta} \\ &= \frac{1,523\,679UA\left(1-\left(0,093\,315\right)^2\right)}{1+0,093\,315\cdot\cos 90°} \\ &= 1,510\,411UA \end{aligned}$$

b) La vitesse est

$$\begin{aligned} v^2 &= GM_c\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \\ &= 6,674\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}kg \\ &\qquad\times\left(\frac{2}{1,510\,411\times1,496\times10^{11}m}-\frac{1}{1,523\,679\times1,496\times10^{11}m}\right) \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}kg}{1,496\times10^{11}m}\left(\frac{2}{1,510\,411}-\frac{1}{1,523\,679}\right) \\ &= 5,9245\times10^{8}\tfrac{m^2}{s^2} \\ v &= 24,34\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

c) Avec le moment cinétique (que l'on a calculé à l'exercice 10), on a

$$\begin{aligned} L &= mvr\sin\theta \\ 3,516\times10^{39}\tfrac{kgm}{s} &= 6,42\times10^{23}kg\cdot 24\,340\tfrac{m}{s}\cdot 1,510411\times1,496\times10^{11}m\cdot\sin\psi \\ \sin\psi &= 0,99567 \\ \psi &= 84,7°\text{ ou }95,3° \end{aligned}$$

Avec la figure, il est clair que c'est l'angle supérieur à 90° qui est bon.

d) On trouve le temps avec la deuxième loi de Kepler.

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2} \Delta t$$

Pour l'aire entre θ = 0° et θ = 90°, on a

$$\begin{aligned} E &= 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-0,093\,315}{1+0,093\,315}}\tan\frac{90°}{2}\right) \\ &= 1,477 rad \end{aligned}$$

L'aire est donc

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1-e^2} \left(E - e\sin E\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1,523679 \cdot 1,496 \times 10^{11} m\right)^2 \sqrt{1-\left(0,093\,315\right)^2} \left(1,4773 - 0,093\,315 \cdot \sin 1,4773\right) \\ &= 3,581 \times 10^{22} m^2 \end{aligned}$$

Le temps est donc

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2} \Delta t$$

$$3,581 \times 10^{22} m^2 = \frac{\sqrt{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} m \cdot \left(1,381497 \cdot 1,496 \times 10^{11} m\right)\left(1+0,093\,315\right)}}{2} \Delta t$$

$$3,581 \times 10^{22} m^2 = 2,738 \times 10^{15} \tfrac{m^2}{s} \Delta t$$

$$\Delta t = 1,3078 \times 10^7 s$$

$$\Delta t = 151,4 j$$

e) On trouve le temps avec la deuxième loi de Kepler.

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2} \Delta t$$

Pour l'aire entre θ = 0° et θ = 120°, on a

$$\begin{aligned}E &= 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\\ &= 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-0,093\,315}{1+0,093\,315}}\tan\frac{120°}{2}\right)\\ &= 2,012 rad\end{aligned}$$

L'aire est donc

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\left(E-e\sin E\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1,523679\cdot 1,496\times 10^{11}m\right)^2\sqrt{1-\left(0,093\,315\right)^2}\left(2,0115-0,093\,315\cdot\sin 2,0115\right)\\ &= 4,9846\times 10^{22}m^2\end{aligned}$$

Le temps pour arriver à θ = 120° est donc

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p\left(1+e\right)}}{2}\Delta t$$

$$4,9846\times 10^{22}m^2 = 2,738\times 10^{15}\,\tfrac{m^2}{s}\,\Delta t$$

$$\Delta t = 1,8205\times 10^7 s$$

$$\Delta t = 210,7\,j$$

Puisqu'il faut 151,4 jours pour passer de 0° à 90° et 210,7 jours pour passer de 0° à 120°, le temps pour passer de 90° à 120° est

$$\Delta t = 210,7\,j - 151,4\,j = 59,3\,j$$

19. On trouve la distance avec

$$\theta_{(rad)} = \frac{r}{D}$$

$$\left(\frac{12}{3600}\right)^{\circ}\times\frac{2\pi rad}{360°} = \frac{r}{5\,pc\times 3,262\times 9,46\times 10^{15}\,\frac{m}{al}}$$

$$r = 8,976\times 10^{12}m$$

En unité astronomique, cette distance est

$$8,976\times 10^{12}m\cdot\frac{1UA}{1,496\times 10^{11}m}=60UA$$

20. a) La période est

$$\begin{aligned}T&=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{tot}}}\\&=2\pi\sqrt{\frac{\left(9\cdot 1,496\times 10^{11}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(2,7\cdot 1,9885\times 10^{30}kg\right)}}\\&=5,1854\times 10^8 s\\&=16,43ans\end{aligned}$$

b) Les rayons des orbites se trouvent avec ces deux équations.

$$r=r_1+r_2$$
$$M_1r_1=M_2r_2$$

On a donc

$$9UA=r_1+r_2$$
$$9UA=r_1+\frac{M_1r_1}{M_2}$$
$$9UA=r_1\left(1+\frac{M_1}{M_2}\right)$$
$$9UA=r_1\left(1+\frac{1,8}{0,9}\right)$$
$$9UA=3r_1$$
$$r_1=3UA$$

De là, on trouve que

$$r_2=6UA$$

c) La vitesse de l'étoile de 1,8 $M_\odot$ est

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{M_2}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}} \\ &= \frac{0,9}{2,7}\sqrt{\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{kgm^2}{s^2}\cdot\left(2,7\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg\right)}{9\cdot 1,496\times 10^{11}\,m}} \\ &= 5438\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse de l'étoile de 0,9 $M_\odot$ est

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{M_2}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}} \\ &= \frac{1,8}{2,7}\sqrt{\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{kgm^2}{s^2}\cdot\left(2,7\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg\right)}{9\cdot 1,496\times 10^{11}\,m}} \\ &= 10\,876\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

N.B. On aurait pu aussi trouver ces vitesse avec

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T} = \frac{2\pi\left(3\cdot 1,496\times 10^{11}\right)}{5,1854\times 10^{8}\,s} = 5438\,\tfrac{m}{s}$$

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T} = \frac{2\pi\left(6\cdot 1,496\times 10^{11}\right)}{5,1854\times 10^{8}\,s} = 10\,876\,\tfrac{m}{s}$$

d) L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GM_1M_2}{2r} \\ &= -\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{kgm^2}{s^2}\cdot\left(0,9\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg\right)\left(1,8\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg\right)}{2\cdot\left(9\cdot 1,496\times 10^{11}\,m\right)} \\ &= -1,588\times 10^{38}\,J \end{aligned}$$

21. On trouve la masse avec la formule suivante

$$
\begin{aligned}
M_{tot} &= \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \\
&= \frac{4\pi^2 \left(15\cdot 1,496\times 10^{11} m\right)^3}{6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\left(32\times 365,25\times 24\times 60\times 60\right)^2} \\
&= 6,555\times 10^{30} kg
\end{aligned}
$$

C'est la masse de l'étoile et de la planète, mais la masse des planètes est toujours négligeable par rapport à la masse des étoiles. Cette masse est donc la masse de l'étoile. En masse solaire, cette masse est

$$6,555\times 10^{30} kg \cdot \frac{1M_\odot}{1,9885\times 10^{30} kg} = 3,30 M_\odot$$

22. 1) On trouve la distance avec

$$
\begin{aligned}
\theta_{(rad)} &= \frac{r}{D} \\
\left(\frac{17,6}{3600}\right)^\circ \times \frac{2\pi rad}{360^\circ} &= \frac{r}{4,36 al \times 9,46\times 10^{15} \frac{m}{al}} \\
r &= 3,519\times 10^{12} m
\end{aligned}
$$

2) La masse totale est donc

$$
\begin{aligned}
M_{tot} &= \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \\
&= \frac{4\pi^2 \left(3,519\times 10^{12} m\right)^3}{6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\left(79,9\times 365,25\times 24\times 60\times 60\right)^2} \\
&= 4,055\times 10^{30} kg
\end{aligned}
$$

En masse solaire, cette masse est

$$4,055\times 10^{30} kg \cdot \frac{1M_\odot}{1,9885\times 10^{30} kg} = 2,04 M_\odot$$

Notre première équation est donc

$$M_A + M_B = 2,04 M_\odot$$

3) Avec l'équation du centre de masse, on a

$$
\begin{aligned}
M_A r_A &= M_B r_B \\
M_A \theta_{A(rad)} D &= M_B \theta_{B(rad)} D \\
M_A \theta_{A(rad)} &= M_B \theta_{B(rad)} \\
M_A \left(\frac{\theta_{A(")}}{3600} \right) \frac{2\pi rad}{360°} &= M_B \left(\frac{\theta_{B(")}}{3600} \right) \frac{2\pi rad}{360°} \\
M_A \theta_{A(")} &= M_B \theta_{B(")}
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
M_A \theta_{A(")} &= M_B \theta_{B(")} \\
M_A \cdot 7,9 &= M_B \cdot 9,7 \\
M_A &= M_B \cdot 1,2278
\end{aligned}
$$

En utilisant ce résultat dans notre autre équation, on a

$$
\begin{aligned}
M_A + M_B &= 2,04 M_\odot \\
1,2278 M_B + M_B &= 2,04 M_\odot \\
2,2278 M_B &= 2,04 M_\odot \\
M_B &= 0,92 M_\odot
\end{aligned}
$$

Ainsi, la masse de l'autre étoile est

$$
\begin{aligned}
M_A + M_B &= 2,04 M_\odot \\
M_A + 0,92 M_\odot &= 2,04 M_\odot \\
M_A &= 1,12 M_\odot
\end{aligned}
$$

23. a) Quand les étoiles sont au plus près l'une de l'autre, elles sont toutes les deux à leur périapside, de chaque côté du centre de masse.

La distance entre le centre de masse et Sirius A est alors

$$
\begin{aligned}
r_{pA} &= a_A (1 - e) \\
&= 6,433 UA (1 - 0,5923) \\
&= 2,623 UA
\end{aligned}
$$

La distance entre le centre de masse et Sirius B est alors

$$\begin{aligned} r_{pB} &= a_B\left(1-e\right) \\ &= 13,268UA\left(1-0,5923\right) \\ &= 5,409UA \end{aligned}$$

La distance entre les deux étoiles est alors la somme de ces deux distances. Elle est donc de 8,032 UA

b) Quand les étoiles sont au plus loin l'une de l'autre, elles sont toutes les deux à leur apoapside, de chaque côté du centre de masse.

La distance entre le centre de masse et Sirius A est alors

$$\begin{aligned} r_{aA} &= a_A\left(1+e\right) \\ &= 6,433UA\left(1-0,5923\right) \\ &= 10,243UA \end{aligned}$$

La distance entre le centre de masse et Sirius B est alors

$$\begin{aligned} r_{aB} &= a_B\left(1-e\right) \\ &= 13,268UA\left(1+0,5923\right) \\ &= 21,127UA \end{aligned}$$

La distance entre les deux étoiles est alors la somme de ces deux distances. Elle est donc de 31,37 UA.

c) On trouve la masse totale des étoiles avec la formule de la période. La valeur de *a* dans cette formule est la somme des deux demis grands axes, soit 19,701 UA.

On a donc

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{tot}}} \\ 50,09\times 365,25\times 24\times 60\times 60 &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(19,701\cdot 1,496\times 10^{11}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot M_{tot}}} \\ M_{tot} &= 6,061\times 10^{30}kg \\ M_{tot} &= 3,048M_{\odot} \end{aligned}$$

On peut ensuite utiliser

$$M_A a_A = M_B a_B$$
$$M_A \cdot 6,433 = M_B \cdot 13,268$$
$$M_A = M_B \cdot 2,062$$

En utilisant ce résultat dans notre autre équation, on a

$$M_A + M_B = 3,048 M_\odot$$
$$2,062 M_B + M_B = 3,048 M_\odot$$
$$3,062 M_B = 3,048 M_\odot$$
$$M_B = 0,995 M_\odot$$

Ainsi, la masse de l'étoile A est

$$M_A + M_B = 3,048 M_\odot$$
$$M_A + 0,995 M_\odot = 3,048 M_\odot$$
$$M_A = 2,053 M_\odot$$

d) On a

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1-e}{1+e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 6,061\times 10^{30}\,kg}{\left(19,701\cdot 1,496\times 10^{11}\,m\right)}\frac{1-0,5923}{1+0,5923}} \\ &= 5928\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse de l'étoile de Sirius A est

$$\begin{aligned} v_{aA} &= \frac{M_B}{M_{tot}} v_a \\ &= \frac{0,995 M_\odot}{3,048 M_\odot} 5928\,\tfrac{m}{s} \\ &= 1935\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

et la vitesse de Sirius B est

$$\begin{aligned} v_{aB} &= \frac{M_A}{M_{tot}} v_a \\ &= \frac{2{,}053 M_\odot}{3{,}048 M_\odot} 5928 \tfrac{m}{s} \\ &= 3993 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

e) L'énergie mécanique de ce système est

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GM_1M_2}{2a} \\ &= -\frac{6{,}674\times 10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2} \cdot \left(0{,}995 \cdot 1{,}9885\times 10^{30} kg\right) \cdot \left(2{,}053 \cdot 1{,}9885\times 10^{30} kg\right)}{2\cdot\left(19{,}701 \cdot 1{,}496\times 10^{11} m\right)} \\ &= -9{,}145\times 10^{37} J \end{aligned}$$

24. Quand les étoiles sont au plus près l'une de l'autre, elles sont toutes les deux à leur périapside, de chaque côté du centre de masse.

La distance entre le centre de masse et procyon A est alors

$$r_{pA} = a_A\left(1-e\right)$$

La distance entre le centre de masse et Procyon B est alors

$$r_{pB} = a_B\left(1-e\right)$$

La somme de ces distances est

$$\begin{aligned} r_p &= r_{pA} + r_{pB} \\ &= a_A\left(1-e\right) + a_B\left(1-e\right) \\ &= \left(a_A + a_B\right)\left(1-e\right) \\ &= a\left(1-e\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la valeur de a est

$$r_p = a(1-e)$$
$$9,004UA = a(1-0,407)$$
$$a = 15,184UA$$

On trouve la masse totale des étoiles avec la formule de la période. On a donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{tot}}}$$
$$40,82\times 365,25\times 24\times 60\times 60 = 2\pi\sqrt{\frac{\left(15,184\cdot 1,496\times 10^{11}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot M_{tot}}}$$
$$M_{tot} = 4,178\times 10^{30}kg$$
$$M_{tot} = 2,101M_\odot$$

Puisque le centre de masse est immobile, on doit avoir

$$M_A v_A = M_B v_B$$
$$M_A\cdot v_A = M_B\cdot 2,5v_A$$
$$M_A = M_B\cdot 2,5$$

En utilisant ce résultat dans notre autre équation, on a

$$M_A + M_B = 2,101M_\odot$$
$$2,5M_B + M_B = 2,101M_\odot$$
$$3,5M_B = 2,101M_\odot$$
$$M_B = 0,600M_\odot$$

Ainsi, la masse de l'étoile A est

$$M_A + M_B = 2,101M_\odot$$
$$M_A + 0,600M_\odot = 2,101M_\odot$$
$$M_A = 1,501M_\odot$$