3 LES ÉTOILES DOUBLES

30 et 31 du Cygne tournent tous les deux autour de leur centre de masse avec une période de 3786 jours en suivant des orbites dont l'excentricité est de 0,224. Au maximum, la distance entre les deux étoiles est de 2,319 milliards de km. À ce moment, une des étoiles est 1,64 fois plus loin du centre de masse que l'autre étoile. Quelle est la masse des deux étoiles ?

asterisk.apod.com/viewtopic.php?t=30952

Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

Dans ce chapitre, nous allons examiner les effets de la gravitation quand deux corps célestes sont près l'une de l'autre. Parmi toutes les formules obtenues, il y en a quelques-unes qui nous permettront de connaitre la masse des étoiles.

3.1 LE CHAMP GRAVITATIONNEL

Définition du champ gravitationnel

Si on place un objet à un endroit et qu'il subit une force gravitationnelle, alors il y a un champ gravitationnel à cet endroit. Puisque n'importe quelle masse placée près de la Terre subit une force, on peut conclure qu'il y a un champ gravitationnel autour de la Terre.

On notera ce champ par g. Par définition, le champ a les caractéristiques suivantes :

1) Plus le champ est fort, plus la force est grande.
2) Plus on place une masse importante dans un champ, plus la force est grande.

La deuxième caractéristique se remarque facilement à la surface de la Terre. Si on place une petite roche à un endroit, elle subit une certaine force. Si on place une masse deux fois plus grande au même endroit, elle subit une force deux fois plus grande.

La valeur du champ peut varier d'un endroit à l'autre. C'est d'ailleurs pour ça qu'on dit que c'est un champ, car en mathématiques, un champ est une quantité dont la valeur peut varier d'un endroit à l'autre.

Selon les deux caractéristiques mentionnées précédemment, on peut résumer la définition du champ gravitationnel avec la formule suivante.

Force sur un objet de masse *m* dans un champ gravitationnel

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Comme la force est un vecteur, g doit aussi être un vecteur. Ce vecteur pointe dans la direction de la force que subira une masse si on la place à cet endroit. Le champ gravitationnel est donc un champ vectoriel.

L'unité du champ est le N/kg ou encore le m/s² (qui sont deux unités équivalentes).

Qu'est-ce qui fait le champ ?

On peut se demander d'où vient le champ s'il y a un champ à un endroit. La réponse n'est pas si compliquée. S'il y a un champ gravitationnel à un endroit, c'est qu'une masse va subir une force gravitationnelle si on la place à cet endroit. Or, si elle subit une force gravitationnelle, c'est qu'elle est attirée par d'autres corps. Donc s'il y a un champ à un endroit, c'est qu'il y a des masses dans le voisinage de cet endroit. Cela veut donc dire que

Les masses font un champ gravitationnel autour d'elles.

Par exemple, il y a un champ gravitationnel dans votre chambre parce qu'il y a un corps très important tout près de votre chambre qui fait un champ autour de lui : La Terre.

Champ gravitationnel d'une masse ponctuelle de masse *M*

Si les masses font un champ autour d'elles, on doit être en mesure de déterminer la grandeur de ce champ. Commençons par un cas simple. On va déterminer quel est le champ gravitationnel fait par une masse ponctuelle de masse M.

On sait que si on a deux masses ponctuelles (de masses M et m), la force entre les deux est

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

On peut aussi considérer qu'il y a une force sur la masse m parce qu'elle est dans le champ gravitationnel créé par la masse M. Dans ce cas, la force est

$$F = mg$$

Comme ces deux façons de voir la force gravitationnelle doivent donner le même résultat, on a

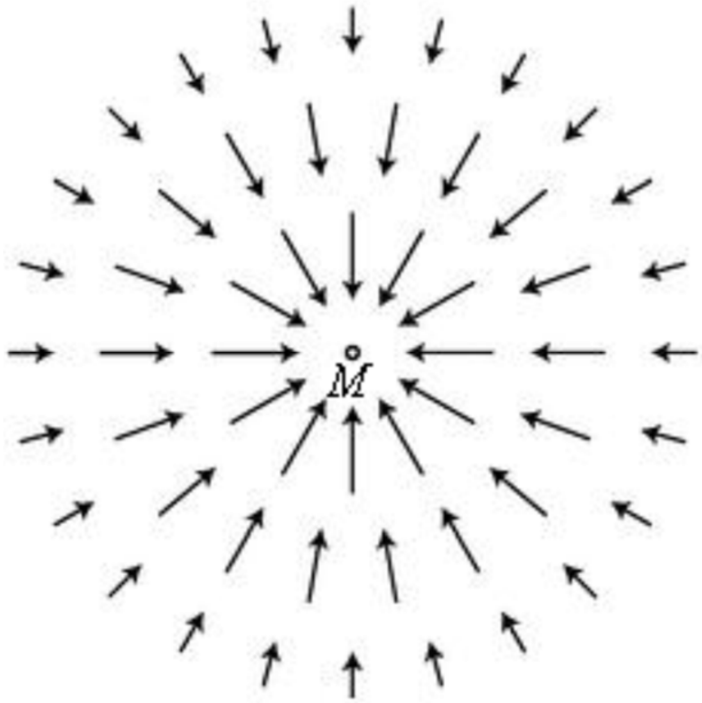
$$mg = G\frac{Mm}{r^2}$$

ce qui nous donne

Grandeur du champ gravitationnel d'une masse ponctuelle de masse *M*

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

On voit que le champ gravitationnel diminue rapidement à mesure qu'on s'éloigne de la masse. Aussi, plus la masse sera importante, plus le champ gravitationnel sera important autour de la masse. La direction du champ à différents endroits autour de la masse M est illustrée sur la figure.



www.vias.org/physics/bk4_06_03.html

Le champ pointe toujours vers la masse M, car c'est la direction de la force que fait la masse M sur les masses autour d'elle puisque la force gravitationnelle est toujours attractive.

3.2 LA FORCE DE GRAVITATION ENTRE 2 PLANÈTES

On sait que la force de gravitation entre deux masses ponctuelles est donnée par

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

À partir de cette loi, nous allons déterminer la force de gravitation entre deux astres sphériques.

Dans ce cas, le calcul se fait en deux parties. Dans la première partie, on détermine le champ gravitationnel fait par un astre 1. On trouve cela en séparant l'astre 1 en petits morceaux infinitésimaux. Chacun de ces morceaux fait un champ gravitationnel dont la grandeur est

$$dg = G\frac{dm_1}{r^2}$$

On additionne ensuite le champ de tous ces morceaux pour trouver le champ gravitationnel total. Cette somme est en fait une intégrale.

Puis dans la deuxième partie, on calcule la force faite sur l'astre 2 placé dans le champ fait par l'astre 1. On trouve cela en séparant l'astre 2 en petits morceaux infinitésimaux. Chacun de ces morceaux subit une force gravitationnelle dont la grandeur est

$$dF = gdm_2$$

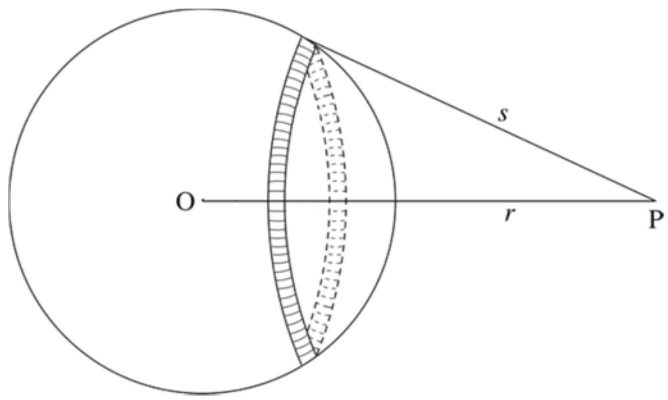
Champ fait par un astre sphérique

Pour commencer, on va prendre une mince coquille sphérique. On va calculer le champ gravitationnel à une distance r du centre de la coquille, à l'extérieur de la coquille.

On va séparer la sphère en anneau, puis on sépare l'anneau en petites tranches.

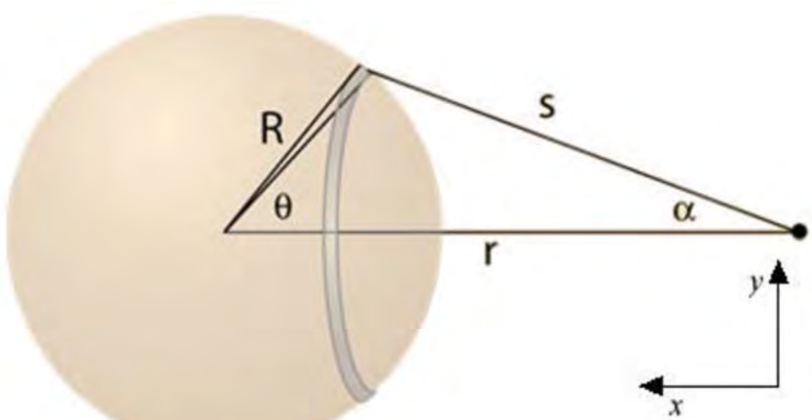
La grandeur du champ fait par une petite tranche de l'anneau (de masse dm)

$$dg = G\frac{dm}{s^2}$$



www.physics.brocku.ca/PPLATO/h-flap/phys3_2.html

Ce champ se sépare en composante x, y et z. Par symétrie, les composantes y et z vont s'annuler quand on va sommer les champs de tous les morceaux de l'anneau. Par contre, les composantes en x vont s'additionner.



hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Mechanics/sphshell.html

Les composantes en x sont

$$dg_x = G\frac{dm}{s^2}\cos\alpha$$

En sommant, les *dm* s'additionnent pour donner la masse de l'anneau, qu'on va noter *dm'*. Le champ fait par un anneau au complet est donc

$$dg_x = G\frac{dm'}{s^2}\cos\alpha$$

Trouvons maintenant la masse de l'anneau. La largeur angulaire de l'anneau est $d\theta$. Cet angle en radian correspond à la largeur de l'anneau divisé par le rayon de la sphère

$$d\theta = \frac{d\ell}{R}$$

La surface de l'anneau sur la coquille est donc

$$\begin{aligned} dA &= 2\pi r d\ell \\ &= 2\pi\left(R\sin\theta\right)Rd\theta \\ &= 2\pi R^2\sin\theta d\theta \end{aligned}$$

et la masse de l'anneau est

$$\begin{aligned} dm' &= \sigma dA \\ &= \sigma 2\pi R^2\sin\theta d\theta \end{aligned}$$

où σ est la masse surfacique de la coquille (en kg/m²).

Le champ fait par un anneau et donc

$$\begin{aligned} dg_x &= G\frac{dm'}{s^2}\cos\alpha \\ &= G\frac{\sigma 2\pi R^2\sin\theta d\theta}{s^2}\cos\alpha \end{aligned}$$

Reste à sommer les champs faits par tous les anneaux.

$$\begin{aligned} g_x &= \int_0^\pi G\frac{\sigma 2\pi R^2\sin\theta\cos\alpha}{s^2}d\theta \\ &= G\sigma 2\pi R^2\int_0^\pi \frac{\sin\theta\cos\alpha}{s^2}d\theta \end{aligned}$$

Pour y arriver, il ne doit rester qu'une seule variable d'intégration. Pour l'instant, s, θ et α changent selon l'anneau choisi. On doit donc trouver le lien entre toutes ces variables.

Premièrement, la loi des cosinus nous donne

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$$

Si on fait la différentielle de cette équation (sachant que r et R sont des constantes), on obtient

$$2sds = 2rR\sin\theta d\theta$$
$$\sin\theta d\theta = \frac{sds}{rR}$$

On peut alors utiliser ce résultat pour changer notre variable d'intégration.

$$\begin{aligned} g_x &= G\sigma 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta\cos\alpha}{s^2} d\theta \\ &= G\sigma 2\pi R \int_{r-R}^{r+R} \frac{s\cos\alpha}{rs^2} ds \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise encore une fois la loi des cosinus pour trouver le cosinus de l'angle α.

$$R^2 = s^2 + r^2 - 2rs\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2rs}$$

L'intégrale devient alors

$$\begin{aligned} g_x &= G\sigma 2\pi R \int_{r-R}^{r+R} \frac{s\cos\alpha}{rs^2} ds \\ &= G\sigma 2\pi R \int_{r-R}^{r+R} \frac{s}{rs^2} \frac{r^2 + s^2 - R^2}{2rs} ds \\ &= \frac{G\sigma\pi R}{r^2} \int_{r-R}^{r+R} \frac{1}{s^2}\left(r^2 + s^2 - R^2\right) ds \\ &= \frac{G\sigma\pi R}{r^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2}\right) ds \end{aligned}$$

La solution est

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{G\sigma\pi R}{r^2}\left[s - \frac{r^2 - R^2}{s}\right]_{r-R}^{r+R} \\ &= \frac{G\sigma\pi R}{r^2}\left[(r+R) - \frac{r^2 - R^2}{r+R} - (r-R) + \frac{r^2 - R^2}{r-R}\right] \end{aligned}$$

Comme $r^2 - R^2 = (r+R)(r-R)$, on arrive à

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{G\sigma\pi R}{r^2}\left[(r+R) - \frac{(r+R)(r-R)}{r+R} - (r-R) + \frac{(r+R)(r-R)}{r-R}\right] \\ &= \frac{G\sigma\pi R}{r^2}\left[(r+R) - (r-R) - (r-R) + (r+R)\right] \\ &= \frac{G\sigma\pi R}{r^2}\left[4R\right] \\ &= \frac{G\sigma 4\pi R^2}{r^2} \end{aligned}$$

Comme la masse surfacique est

$$\sigma = \frac{masse}{surface} = \frac{M}{4\pi R^2}$$

On arrive à

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{G\sigma 4\pi R^2}{r^2} \\ &= \frac{GM\,4\pi R^2}{r^2\,4\pi R^2} \\ &= \frac{GM}{r^2} \end{aligned}$$

Un astre est une somme de coquille sphérique. Comme G et r sont des constantes, on ne fait que sommer les masses des coquilles, ce qui donnera la masse totale de l'astre. Le champ gravitationnel fait par l'astre est donc

Champ gravitationnel fait par un astre

$$g = \frac{GM}{r^2} \text{ dirigé vers le centre de l'astre.}$$

Ainsi, l'astre 1 fait le même champ qu'une masse ponctuelle ayant la même masse située au centre de l'astre. Incroyable n'est-ce pas ? (C'est en fait assez incroyable et cela se produit uniquement si la force de gravitation diminue au carré de la distance. Par exemple, si le champ fait par une masse ponctuelle diminuait avec $1/r^3$, le champ fait par un astre ne serait pas simplement GM/r^3.)

Il n'y a qu'une seule restriction concernant ce résultat : la masse surfacique des coquilles doit être uniforme. Il faut donc que l'astre soit identique dans toutes les directions à partir du centre (ce qu'on appelle la symétrie sphérique). Comme les astres ont pratiquement une symétrie sphérique (les variations sont mineures), on respecte automatiquement cette restriction.

Notez toutefois que la densité d'une coquille à l'autre peut varier sans affecter le résultat final. Cela veut dire que la densité de l'astre peut changer, pourvu qu'elle ne dépende que de la distance à partir du centre de l'astre.

La force sur un astre dans le champ fait par un autre astre

Maintenant qu'on sait que le champ fait par un astre est identique à celui fait par une masse ponctuelle, il faut déterminer la force qu'un tel champ fera sur un autre astre à proximité.

Pour le trouver, il faudrait séparer l'astre 2 en petites masses et calculer la force faite par le champ (dont la grandeur diminue si on est plus loin de la masse ponctuelle) sur chacune de ces petites masses. Ensuite, on sommerait ces forces pour avoir la force totale sur la sphère avec une intégrale. Ça semble bien plaisant, mais ce n'est pas nécessaire.

On sait, par la troisième loi de Newton, que la force faite par la masse ponctuelle sur l'astre de droite à la même grandeur que la force faite par l'astre de droite sur la masse ponctuelle. Or, la force sur la masse ponctuelle est facile à trouver. Le champ fait par l'astre de droite est simplement

$$g = \frac{Gm_2}{r^2}$$

La force sur la masse ponctuelle est alors

$$F = m_1 g = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$$

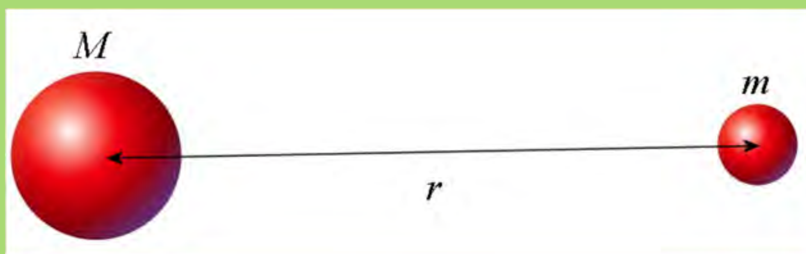
Ainsi, la force sur l'astre de droite est aussi

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

On arrive donc à la conclusion que la force entre deux astres ayant une symétrie sphérique est

Force entre deux astres

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$



où r est la distance entre les centres des sphères.

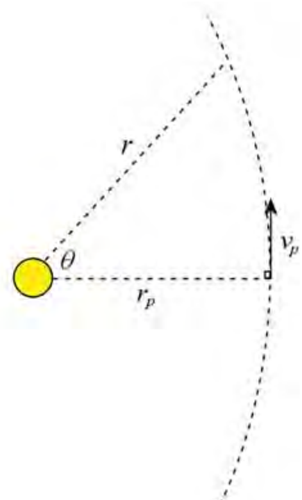
3.3 LES TRAJECTOIRES PRÈS D'UN OBJET MASSIF

Sachant que les astres s'attirent par la force de gravitation selon

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

on va déterminer comment un astre très massif comme une étoile modifie la trajectoire des objets beaucoup moins massifs qui passent près de lui.

Forme de la trajectoire



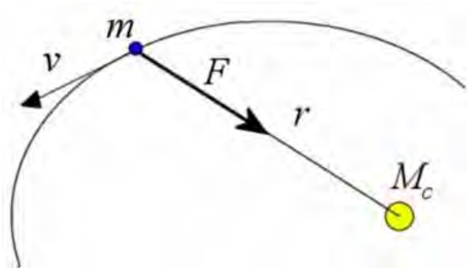
Considérons un objet qui suit une trajectoire près d'un astre.

Dans sa trajectoire, l'objet va, à un moment donné, passer à sa position la plus de l'astre central. La distance à ce moment entre l'objet et la masse centrale sera notée r_p et la vitesse à ce point sera notée v_p. Notez également que la vitesse à cet endroit est perpendiculaire à la distance. Cette position sera notre point de référence pour l'angle θ utilisé pour donner la position.

On veut savoir la forme de la trajectoire, ce qui signifie qu'on veut savoir r en fonction de θ.

La conservation du moment angulaire

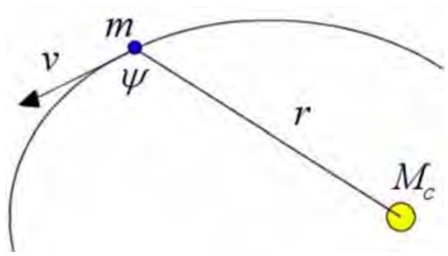
On se rappelle qu'il y a conservation du moment cinétique si la somme des moments de force externes est nulle. Sur la trajectoire, il n'y a qu'une seule force, la gravitation, qui agit sur le corps. Le moment de force, calculé à partir de la masse centrale, est



$$\tau = Fr\sin\phi$$

où ϕ est l'angle entre la force et une ligne allant de la masse centrale à l'objet en orbite (ligne r sur la figure). Ce moment de force est nul, car la force est dirigée directement vers le corps central, donc dans la même direction que le rayon. L'angle ϕ est donc nul et la somme des moments de force est nulle.

Cela signifie que le moment cinétique, calculé à partir du corps central, est constant. On a donc



$$L = mrv\sin\psi = \text{constante}$$

On peut facilement trouver cette constante en calculant ce qu'elle vaut au point quand l'objet est au point le plus près de la masse centrale (quand la distance entre les deux masses est r_p). À ce point, on a

$$L = mrv\sin\psi = mr_pv_p\sin 90°$$
$$L = mr_pv_p$$

Aussi, $v\sin\psi$ est la composante de la vitesse perpendiculaire au rayon, donc

$$v\sin\psi = v_\perp$$

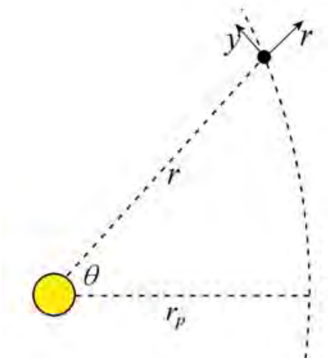
Or, puisque

$$v_\perp = \omega r$$

Le moment cinétique est aussi

$$L = mr\omega r = m\omega r^2$$

L'équation des forces sur l'objet



Dans son mouvement, la seule force qui agit sur le corps est la force de gravitation. On a donc

$$-\frac{GM_c m}{r^2}\vec{i} = m\vec{a}$$

(On utilise les axes montrés sur la figure. Ici, on utilise $\vec{i}$ pour le vecteur unitaire dans la direction de l'axe *r*.)

Pour la composante radiale (dans le sens de l'axe des *r*), cela donne

$$-\frac{GM_c m}{r^2} = ma_r$$
$$-\frac{GM_c}{r^2} = a_r$$

Une partie de la force va servir à faire l'accélération centripète pour garder le corps à la même distance de la masse centrale. S'il y a plus ou moins de force que la force centripète nécessaire, cet excès ou ce manque de force fera changer la distance *r*. On peut donc écrire l'accélération comme étant

$$a_r = a_c + \frac{d^2r}{dt^2}$$

On a donc

$$-\frac{GM_c}{r^2} = a_c + \frac{d^2r}{dt^2}$$

Puisque l'accélération centripète est $-\omega^2 r$, on a

$$-\frac{GM_c}{r^2} = -\omega^2 r + \frac{d^2r}{dt^2}$$

En utilisant le moment cinétique $L = m\omega r^2$, on peut écrire cette formule sous la forme

$$-\frac{GM_c}{r^2} = -\frac{L^2}{m^2r^4}r + \frac{d^2r}{dt^2}$$
$$-\frac{GM_c}{r^2} = -\frac{L^2}{m^2r^3} + \frac{d^2r}{dt^2}$$

L'équation pour la forme de la trajectoire

Pour obtenir la forme de la trajectoire, on va tenter d'obtenir une équation de *r* en fonction de θ. Pour y arriver, on a

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{dr}{d\theta}\omega \\ &= \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2}\end{aligned}$$

En dérivant une autre fois, on arrive a

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{L}{mr^2} + \frac{dr}{d\theta}\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{mr^2}\right) \\ &= \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{L}{mr^2} + \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ &= \omega\frac{d^2r}{d\theta^2}\frac{L}{mr^2} + \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{m}\left(\frac{-2}{r^3}\right)\frac{dr}{dt} \\ &= \frac{L}{mr^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\frac{L}{mr^2} + \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{m}\left(\frac{-2}{r^3}\right)\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{d^2r}{d\theta^2}\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{L}{m}\left(\frac{-2}{r^3}\right)\omega \\ &= \frac{d^2r}{d\theta^2}\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{L}{m}\left(\frac{-2}{r^3}\right)\frac{L}{mr^2} \\ &= \left(\frac{L}{mr}\right)^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2} + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left(\frac{-2}{r^3}\right)\right)\end{aligned}$$

(Ce n'est pas rassurant tout ça! ☹)

L'équation des forces

$$-\frac{GM_c}{r^2} = -\frac{L^2}{m^2r^3} + \frac{d^2r}{dt^2}$$

devient donc

$$-\frac{GM_c}{r^2}=-\frac{L^2}{m^2r^3}+\left(\frac{L}{mr}\right)^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left(\frac{-2}{r^3}\right)\right)$$

C'est une équation différentielle qu'on doit résoudre pour obtenir la forme de la trajectoire.

Solution de l'équation différentielle

En fait, l'équation devient beaucoup plus simple si on pose

$$w=\frac{1}{r}$$

Alors

$$\frac{dw}{d\theta}=\frac{dw}{dr}\frac{dr}{d\theta}=\frac{-1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{d\theta^2}&=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{-1}{r^2}\right)\frac{dr}{d\theta}+\frac{-1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\\&=\frac{2}{r^3}\frac{dr}{d\theta}\frac{dr}{d\theta}+\frac{-1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\\&=\frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{-1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\end{aligned}$$

Or, ce terme est exactement ce qu'on retrouve dans la dernière parenthèse de notre équation des forces (mais le signe est inversé).

$$-\frac{GM_c}{r^2}=-\frac{L^2}{m^2r^3}+\left(\frac{L}{mr}\right)^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left(\frac{-2}{r^3}\right)\right)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}-w^2GM_c&=-\frac{L^2}{m^2}w^3-\left(\frac{Lw}{m}\right)^2\frac{d^2w}{d\theta^2}\\GM_c&=\frac{L^2}{m^2}w+\left(\frac{L}{m}\right)^2\frac{d^2w}{d\theta^2}\\\frac{GM_cm^2}{L^2}&=w+\frac{d^2w}{d\theta^2}\end{aligned}$$

C'est une équation différentielle assez facile à résoudre pour quelqu'un qui connait un peu les techniques de résolution de ce type d'équation. (Ceux qui feront le cours de calcul différentiel pourront facilement résoudre cette équation.) La solution est

$$w = A\cos\theta + \frac{GM_c m^2}{L^2}$$

(Vous pouvez vérifier assez facilement que c'est la solution en remplaçant cette solution dans l'équation différentielle.)

Puisque $w = 1/r$ et $L = mr_p v_p$, on peut écrire

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + \frac{GM_c m^2}{m^2 r_p^2 v_p^2}$$
$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + \frac{GM_c}{r_p^2 v_p^2}$$

De plus, puisqu'on doit avoir $r = r_p$ à $\theta = 0$, on a

$$\frac{1}{r_p} = A + \frac{GM_c}{r_p^2 v_p^2}$$
$$A = \frac{1}{r_p} - \frac{GM_c}{r_p^2 v_p^2}$$

On arrive donc a

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_p} - \frac{GM_c}{r_p^2 v_p^2}\right)\cos\theta + \frac{GM_c}{r_p^2 v_p^2}$$
$$\frac{1}{r} = \frac{GM_c}{r_p^2 v_p^2}\left[\left(\frac{r_p v_p^2}{GM_c} - 1\right)\cos\theta + 1\right]$$

Simplification de la formule

Si on pose que

$$e = \frac{r_p v_p^2}{GM_c} - 1$$

On arrive à

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_p}\frac{1}{e+1}\left(e\cos\theta+1\right)$$

et donc à

Forme de la trajectoire pour un objet près d'une masse centrale

$$r=r_p\frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

où *e* est un facteur appelé *excentricité* qui vaut

Excentricité

$$e=\frac{v_p^2 r_p}{GM_c}-1$$

La forme exacte de la trajectoire dépend de la valeur de *e*. Nous examinerons différentes possibilités dans les sections suivantes.

Énergie mécanique de l'objet en orbite

L'énergie mécanique de l'objet qui suit la trajectoire est (on la calcule quand la distance est r_p)

$$E_{mec}=\frac{1}{2}mv_p^2+\frac{-GM_c m}{r_p}$$

Selon la formule de l'excentricité, on a

$$e=\frac{v_p^2 r_p}{GM_c}-1$$

$$v_p^2=\frac{GM_c\left(1+e\right)}{r_p}$$

L'énergie devient alors

$$\begin{aligned}E_{mec} &= \frac{1}{2}mv_p^2 + \frac{-GM_cm}{r_p}\\ &= \frac{1}{2}m\frac{GM_c(1+e)}{r_p} + \frac{-GM_cm}{r_p}\\ &= \left(\frac{1+e}{2}-1\right)\frac{GM_cm}{r_p}\\ &= \left(\frac{1+e-2}{2}\right)\frac{GM_cm}{r_p}\\ &= \left(\frac{-1+e}{2}\right)\frac{GM_cm}{r_p}\end{aligned}$$

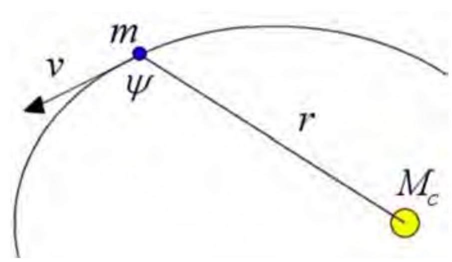
Ce qui nous donne

Énergie mécanique

$$E_{mec} = -\frac{GM_cm(1-e)}{2r_p}$$

Le moment cinétique

On a vu que le moment cinétique, calculé à partir du corps central, est constant. On avait alors trouvé que le moment cinétique valait



$$L = mrv\sin\psi = mv_pr_p$$

Ce qui donne

Conservation du moment cinétique

$$rv\sin\psi = r_pv_p$$

On peut aussi obtenir une version qui dépend de r_p et de l'excentricité.

À partir de la formule de l'excentricité,

$$e = \frac{v_p^2r_p}{GM_c} - 1$$

on peut obtenir la vitesse

$$v_p^2 = \frac{GM_c\left(1+e\right)}{r_p}$$

Si on utilise cette valeur dans la loi de conservation, on arrive à

$$\begin{aligned} rv\sin\psi &= r_p\sqrt{\frac{GM_c\left(1+e\right)}{r_p}} \\ &= \sqrt{GM_c r_p\left(1+e\right)} \end{aligned}$$

Conservation du moment cinétique

$$rv\sin\psi = \sqrt{GM_c r_p\left(1+e\right)}$$

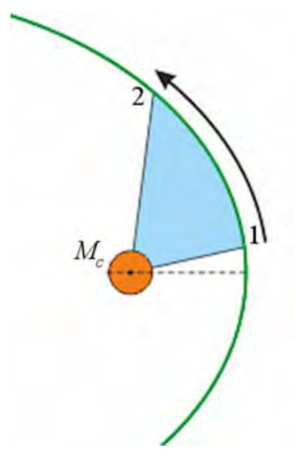
Ces équations de conservation du moment cinétique sont deux formulations équivalentes à ce qu'on appelle *la deuxième loi de Kepler*.

Les aires balayées

La deuxième loi de Kepler fut formulée très différemment par Kepler lorsqu'il la découvrit en 1608. La formulation de Kepler était

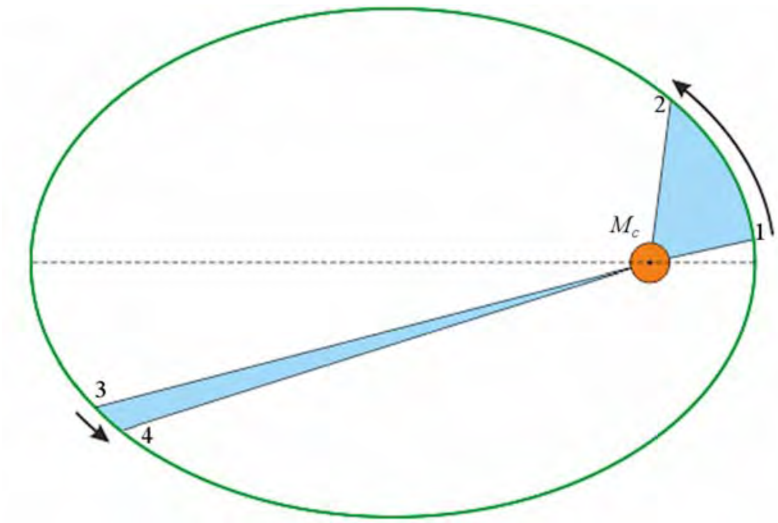
Un segment de droite joignant une planète et le Soleil balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

Voyons ce qu'« aire balayée » signifie. Si l'objet passe d'une position 1 à une position 2, l'aire balayée est l'aire de la région délimitée par la trajectoire, une ligne qui va de la masse centrale à la position 1 et une autre ligne qui va de la masse centrale à la position 2 (figure).



La loi de Kepler spécifie que cette aire est toujours la même si le temps entre les positions 1 et 2 est le même.

Prenons un exemple pour illustrer. Une des formes possibles d'orbite est une ellipse, telle qu'illustrée sur la figure suivante.

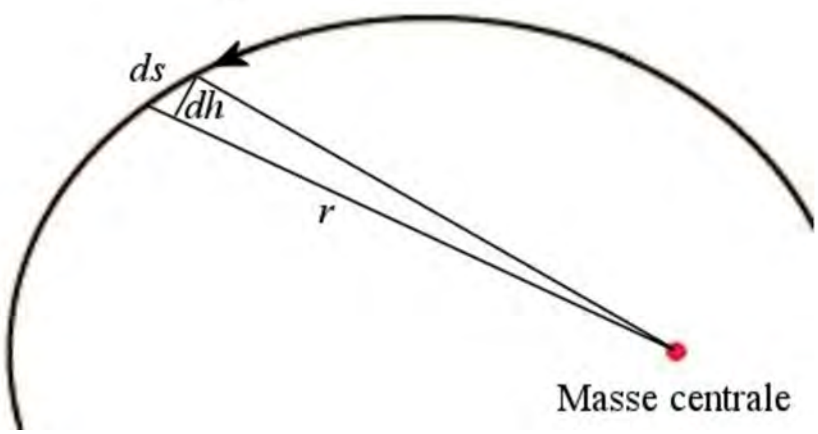


serge.bertorello.free.fr/astrophy/kepnew/kepnew.html

La 2^e loi de Kepler spécifie alors que l'aire des deux régions montrées sur la figure est la même, à condition que le temps qu'il faut à l'objet pour passer de la position 1 à la position 2 soit le même qu'il lui faut pour passer de la position 3 à la position 4.

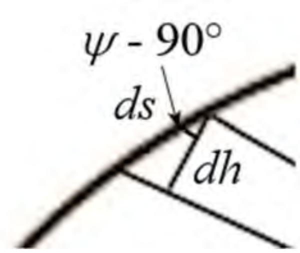
Pour prouver cette loi, et montrer le lien avec la conservation du moment cinétique, calculons l'aire balayée entre deux positions très près l'une de l'autre. On va en fait prendre deux points sur la trajectoire qui sont à une distance *ds* l'un de l'autre.

L'aire balayée est alors un triangle dont la hauteur est *dh*.



Comme ψ est l'angle entre la vitesse (la trajectoire) et la distance *r*, la hauteur de ce triangle est

$$\begin{aligned} dh &= ds \cdot \cos(\psi - 90°) \\ &= ds \cdot \sin(\psi) \end{aligned}$$



L'aire du triangle alors

$$\begin{aligned} dA &= \frac{base \cdot hauteur}{2} \\ &= \frac{rdh}{2} \\ &= \frac{rds\sin\psi}{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{rds\sin\psi}{2dt} \\ &= \frac{rv\sin\psi}{2} \end{aligned}$$

puisque $ds/dt = v$.

Or, selon la conservation du moment cinétique, on a

$$rv\sin\psi = \sqrt{GM_c r_p (1+e)}$$

Ce qui permet d'obtenir

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2}$$

Le terme de droite est une constante. Quand le rythme de variation est constant, on peut remplacer dA/dt par $\Delta A/\Delta t$, pour finalement obtenir

Deuxième loi de Kepler

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2}\Delta t$$

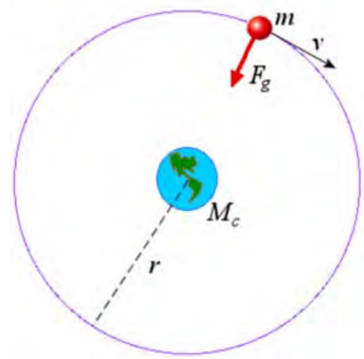
Ce résultat montre clairement que l'aire balayée est toujours la même si le temps est le même.

3.4 LES ORBITES CIRCULAIRES (e = 0)

Si l'excentricité est nulle, alors la formule de la trajectoire devient

$$r = r_p$$

Cela nous indique que r ne varie pas avec l'angle et que r est une constante. Avec un rayon constant, on a une orbite circulaire.



www.ux1.eiu.edu/~addavis/3050/Ch09Gravity/Sat.html

Pour obtenir une telle excentricité nulle, on doit avoir

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

$$0 = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

$$v_p = \sqrt{\frac{GM_c}{r_p}}$$

L'indice p est bien inutile ici puisqu'avec une orbite circulaire, la distance la plus près de la masse centrale est toujours la même et est égale au rayon de l'orbite. On peut donc écrire.

La vitesse pour une orbite circulaire

$$v = \sqrt{\frac{GM_c}{r}}$$

Avec une excentricité nulle, l'énergie mécanique de l'objet en orbite est

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

$$= -\frac{GM_c m}{2r_p}$$

Puisque $r = r_p$ avec l'orbite circulaire, l'énergie est

Énergie mécanique pour une orbite circulaire

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2r}$$

Finalement, on trouve le temps de révolution en divisant la circonférence de l'orbite par la vitesse de l'objet en orbite.

La période pour une orbite circulaire (3e loi de Kepler)

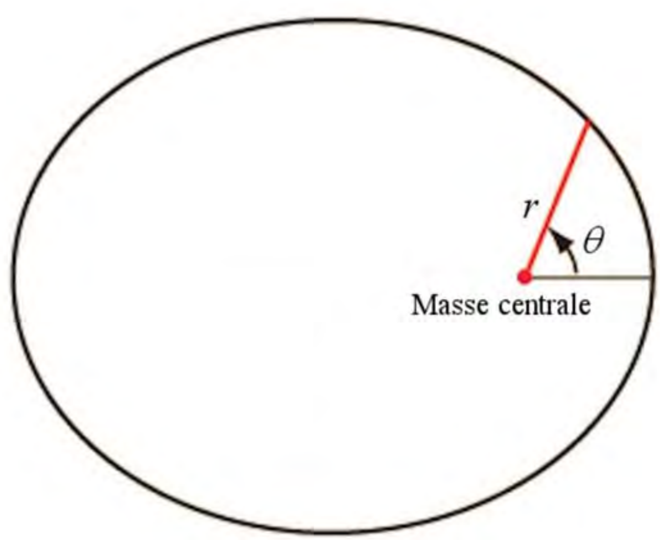
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_c}}$$

3.5 LES ORBITES ELLIPTIQUES (0 < *e* < 1)

Quand l'excentricité est entre 0 et 1, la valeur de r change avec l'angle.

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

La trajectoire est alors une ellipse.



hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/math/ellipse.html

Pour obtenir une telle ellipse, la vitesse au point P doit se situer entre deux valeurs. La valeur minimale se trouve avec l'excentricité minimale.

$$e > 0$$
$$\frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 > 0$$
$$v_p > \sqrt{\frac{GM_c}{r_p}}$$

La valeur maximale se trouve avec l'excentricité maximale.

$$e < 1$$
$$\frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 < 1$$
$$v_p < \sqrt{\frac{2GM_c}{r_p}}$$

La première loi de Kepler

La forme elliptique des orbites fut découverte en 1608 par Johannes Kepler. En 1600, il se lança dans une étude très approfondie de l'orbite de Mars en utilisant les données d'observations de Tycho Brahe, les meilleures faites avant 1600.

Après 8 ans d'études, Kepler arriva à une conclusion révolutionnaire. Alors qu'on pensait depuis près de 20 siècles que les orbites des planètes devaient être des cercles parfaits, sous prétexte que les cieux devaient être parfaits pour refléter la perfection des dieux (ou du Dieu), Kepler montra que les orbites avaient une forme elliptique. C'était une véritable révolution en astronomie, mais il fallut près d'un siècle avant que tous soient convaincus de la véracité de cette loi.

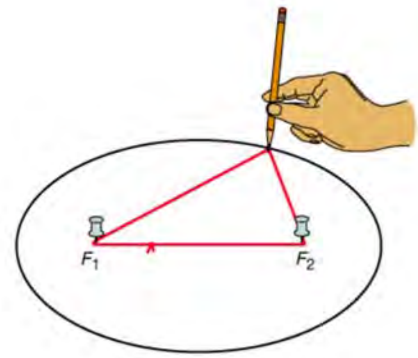
Première loi de Kepler

Les orbites sont des ellipses. La masse centrale occupe un des foyers.

L'ellipse

L'ellipse ressemble à un ovale, mais elle est particulière. Pour tracer une ellipse, il suffit de tenir un anneau de corde avec deux punaises plantées dans une planche. On prend alors un crayon et on trace alors la figure délimitée par la corde comme sur la figure.

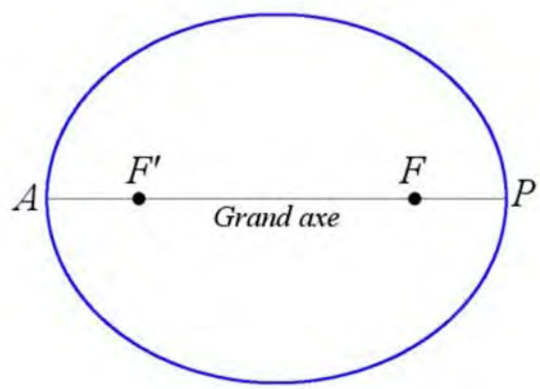
Les deux foyers F_1 et F_2 sont les deux endroits où on a planté les punaises.



members.shaw.ca/len92/astronomy.htm

Cela signifie que l'ellipse est l'ensemble des points dont la somme des distances du point jusqu'à chacun des foyers est constante. L'ellipse est plus ou moins allongée selon la distance entre les punaises et la longueur de la corde.

Les points F et F' sont les foyers. Ici, la masse centrale (l'étoile ou la planète autour de laquelle l'objet est en orbite) est située au foyer F. La ligne qui va d'un côté à l'autre de l'ellipse en passant par les foyers est le grand axe de l'ellipse. Les deux points où l'ellipse et le grand axe se croisent (points A et P) sont les apsides. (Le grand axe est aussi appelé la ligne des apsides ou la ligne apsidiale.) Le point A est le point de l'orbite le plus éloigné de la masse centrale, nommé en général apoapside (on utilise aussi les termes d'apside supérieure ou d'apoapse). Le point P est le point de l'orbite le plus près de la masse centrale et est nommé en général la périapside (on utilise aussi les termes d'apside inférieure ou de périapse).



Il existe en fait tout un vocabulaire pour nommer ces points selon la masse centrale. Si l'orbite se fait autour du Soleil, le point le plus près est le périhélie et le point le plus loin est l'aphélie. Si l'orbite se fait autour de la Terre, le point le plus près est le périgée et le point le plus loin est l'apogée. La table suivante vous montre (à titre de curiosité) le nom de ces points selon la masse centrale.

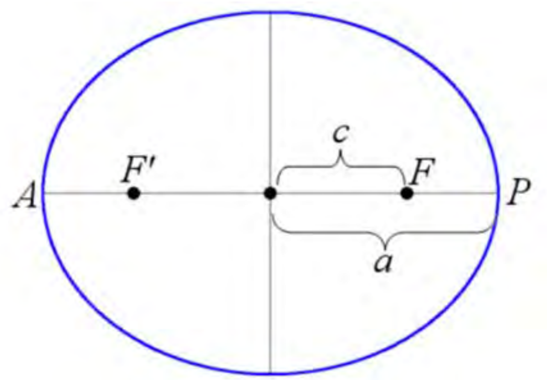
Masse centrale	Périapside	Apoapside
Galaxie	Périgalacticon	Apogalacticon
Trou noir	Périmélasme	Apomélasme
Étoile	Périastre	Apoastre
Soleil	Périhélie	Aphélie
Mercure	Périherme	Apherme
Vénus	Péricythère	Apocythère

Terre	Périgée	Apogée
Lune	Périsélène	Aposélène
Mars	Périarée	Apoarée
Jupiter	Périzène	Apozène
Saturne	Périkrone	Apokrone
Uranus	Périourane	Apourane
Neptune	Périposéide	Apoposéide
Pluton	Périhade	Aphade

L'excentricité

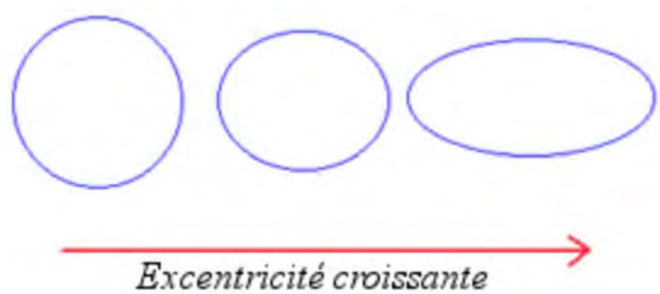
L'excentricité de l'ellipse est définie par le rapport

$$e = \frac{FF'}{AP} = \frac{c}{a}$$



où c la distance entre le centre de l'ellipse et un des foyers et a la distance entre le centre de l'ellipse et une des apsides (il s'agit du demi-grand axe).

Si les deux foyers sont au centre, alors l'excentricité est nulle et on obtient un cercle. Plus l'excentricité est élevée, plus les foyers sont distants l'un de l'autre et plus l'ellipse est allongée.



www.astro-tom.com/technical_data/elliptical_orbits.htm

La valeur de l'excentricité est nécessairement inférieure à 1 puisque, si c'était le cas, les foyers ne seraient pas à l'intérieur de l'ellipse.

Comme on peut le constater avec le tableau suivant, l'excentricité des orbites planétaires est en général peu élevée.

Planète	Excentricité de l'orbite
Mercure	0,206
Vénus	0,007
Terre	0,017
Mars	0,093
Jupiter	0,048
Saturne	0,056
Uranus	0,047
Neptune	0,009

À l'exception de Mercure, les orbites planétaires ne dévient que très peu d'une forme circulaire. L'excentricité de l'orbite de Mars est relativement élevée et c'est ce qui permit à Kepler, qui étudia le mouvement de Mars, de se rendre compte que les orbites sont elliptiques. Mais ces valeurs d'excentricité ne sont rien en comparaison de l'excentricité de l'orbite de certains objets ayant des orbites très allongées telles que des comètes. Par exemple, l'orbite de la comète la plus connue, la comète de Halley, a une excentricité de 0,970.

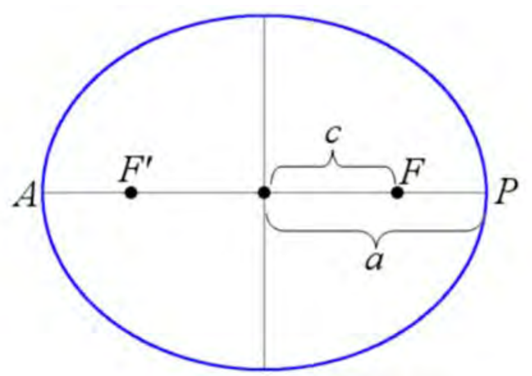
Les distances entre l'objet en orbite et la masse centrale

Les distances à l'apoapside et à la périapside

Nous pouvons maintenant trouver des relations entre les distances à l'apoapside et à la périapside d'une part et l'excentricité et le demi-grand axe de l'ellipse d'autre part. Les distances de l'apoapside et de la périapside en fonction du demi-grand axe *a* et de l'excentricité *e* sont

$$\begin{aligned} r_a &= a + c \\ &= a + ea \\ &= a(1+e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_p &= a - c \\ &= a - ea \\ &= a(1-e) \end{aligned}$$



r_a et r_p en fonction de a et e pour une orbite elliptique

$$r_a = a(1+e)$$
$$r_p = a(1-e)$$

Nous pouvons également inverser ces relations précédentes pour obtenir les relations entre le demi-grand axe et l'excentricité en fonction des distances à l'apoapside et à la périapside.

***a* et *e* en fonction de r_a et r_p pour une orbite elliptique**

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \qquad\qquad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

La distance à n'importe quel endroit sur l'orbite

On a déjà la formule qui donne la position de l'objet en orbite en fonction de l'angle.

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

Puisque $r_p = a(1-e)$, la distance est aussi

$$\begin{aligned} r &= a(1-e)\frac{1+e}{1+e\cos\theta} \\ &= \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta} \end{aligned}$$

***r* en fonction de θ pour une orbite elliptique**

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}$$

La vitesse orbitale

La vitesse selon la distance r

Il est évident que la vitesse des corps ne peut pas être constante le long d'une orbite elliptique parce que l'énergie mécanique doit être conservée. En effet, pour un objet de masse *m* en orbite autour d'un autre objet de masse M_c, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_cm}{r}$$

Ainsi, lorsque l'objet en orbite s'approche de la masse centrale, son énergie gravitationnelle diminue et son énergie cinétique doit donc augmenter. La vitesse de la planète doit donc la plus grande à la périapside et la plus petite à l'apoapside.

Pour trouver ces vitesses, il nous faut la valeur de l'énergie mécanique. La formule générale de l'énergie est

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

Avec une orbite elliptique, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p} \\ &= -\frac{GM_c m(1-e)}{2a(1-e)} \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à ces deux formules qu'on peut utiliser pour une orbite elliptique.

Énergie mécanique pour une orbite elliptique

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2a}$$

De là, on peut trouver la vitesse en fonction de *r* avec la loi de conservation de l'énergie mécanique.

$$-\frac{GM_c m}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_c m}{r}$$

Si on isole *v* dans cette formule, on arrive à la formule suivante qui donne la vitesse n'importe où sur l'orbite.

La vitesse pour une orbite elliptique

$$v^2 = GM_c\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

La vitesse à l'apoapside et à la périapside

À la périapside, $r = a(1-e)$. Ainsi, la vitesse est

$$\begin{aligned} v_p^2 &= GM_c\left(\frac{2}{a(1-e)}-\frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2}{1-e}-1\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2-(1-e)}{1-e}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e} \end{aligned}$$

À l'apoapside, $r = a(1+e)$ et la vitesse est

$$\begin{aligned} v_a^2 &= GM_c\left(\frac{2}{a(1+e)}-\frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2}{1+e}-1\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2-(1+e)}{1+e}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e} \end{aligned}$$

Vitesse à la périapside et à l'apoapside

$$v_p^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}$$

$$v_a^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}$$

La période

On va trouver la période avec la deuxième loi de Kepler.

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p(1+e)}}{2}\Delta t$$

En une période, on balaye l'ellipse au complet. Comme l'aire de l'ellipse est

$$A = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

on a

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{GM_c r_p \left(1+e\right)}}{2} T$$

En utilisant le fait que $r_p = a\left(1-e\right)$, on arrive à

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{GM_c a\left(1-e\right)\left(1+e\right)}}{2} T$$

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{GM_c a\left(1-e^2\right)}}{2} T$$

$$\pi a^2 = \frac{\sqrt{GM_c a}}{2} T$$

Ce qui donne

Période pour une orbite elliptique (3e loi de Kepler)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$

C'est exactement la même formule que celle du mouvement circulaire dans laquelle a remplace r.

Cette loi, appelée la troisième loi de Kepler, fut découverte en 1619 par Johannes Kepler. À cette époque, la loi disait simplement que le rapport a^3/T^2 est une constante pour tous les objets tournant autour du Soleil. Il en est ainsi parce que

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_c}{4\pi^2}$$

Pour tous les objets tournant autour du Soleil, le terme de droite est une constante. Newton trouva la forme complète de la loi en 1689.

Le temps entre deux positions sur l'orbite

On peut trouver le temps entre deux positions sur l'orbite avec la 2e loi de Kepler

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2} \Delta t$$

Toutefois, on doit connaitre l'aire de la partie de l'ellipse pour trouver le temps.

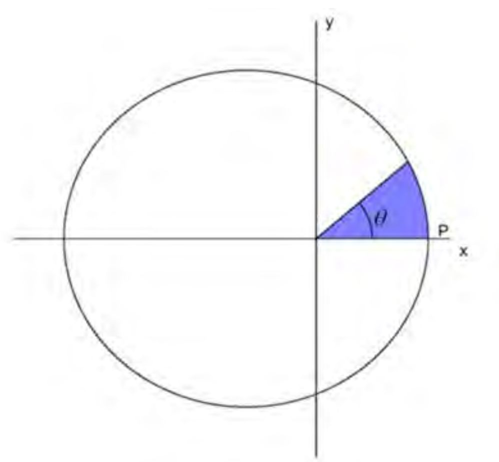
Les mathématiciens ont fait ce calcul. L'aire de la section d'ellipse montrée sur la figure est

$$A = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1-e^2} \left(E - e \sin E \right)$$

où E est l'anomalie excentrique donnée par

$$E = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right)$$

Dans ces formules, l'angle E doit être en radians.



math.stackexchange.com/questions/1740458/finding-int-fracdxab-cos-x-without-weierstrass-substitution/1741835

Exemple 3.5.1

Un petit astre déplace sur orbite autour du Soleil dont les distances à l'aphélie et au périhélie sont de r_a = 350 millions de km et r_p = 50 millions de km. La masse du Soleil est 2 x 10^{30} kg.

a) Quelle est l'excentricité de cette orbite ?

L'excentricité est

$$\begin{aligned} e &= \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \\ &= \frac{3,5 \times 10^{11} m - 0,5 \times 10^{11} m}{3,5 \times 10^{11} m + 0,5 \times 10^{11} m} \\ &= 0,750 \end{aligned}$$

b) Quel est le demi-grand axe (a) de cette orbite ?

Le demi-grand axe est

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_a + r_p}{2} \\ &= \frac{3,5\times10^{11}m + 0,5\times10^{11}m}{2} \\ &= 2\times10^{11}m \end{aligned}$$

Le demi-grand axe est donc égal à 200 millions de km

c) Quelle est la période de cet astre ?

La période vaut

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(2\times10^{11}\right)^3}{6,674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}kg}} \\ &= 4,864\times10^7 s \\ &= 562,99\,j \end{aligned}$$

d) Quelle est la vitesse au périhélie ?

La vitesse au périhélie est

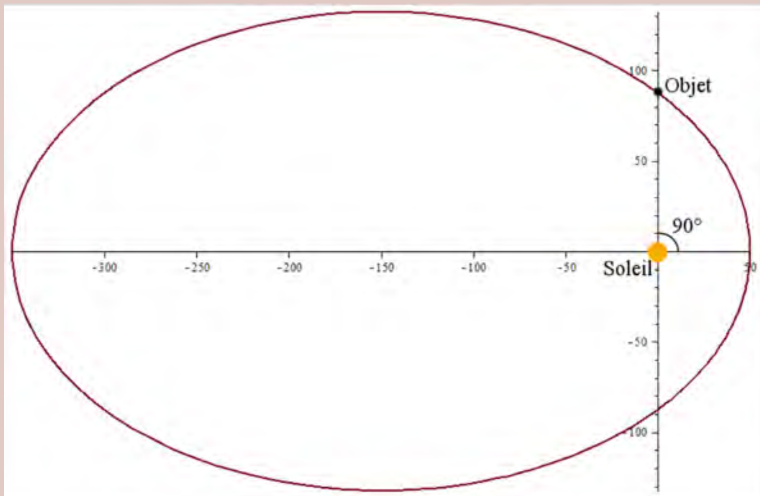
$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}kg}{2\times10^{11}m}\frac{1+0,75}{1-0,75}} \\ &= 68,35\,\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

e) Quelle est la vitesse à l'aphélie ?

La vitesse à l'aphélie est

$$v_a = \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}}$$
$$= \sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}\,kg}{2\times10^{11}\,m}\frac{1-0,75}{1+0,75}}$$
$$= 9,764\,\tfrac{km}{s}$$

f) Quelle est la distance entre le Soleil et l'objet quand il est à $\theta = 90°$?



La distance à cette position est

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$
$$= 5\times10^{10}\,m\frac{1+0,75}{1+0,75\cdot\cos(90°)}$$
$$= 8,75\times10^{10}\,m$$

L'objet est donc à 87,5 millions de km du Soleil.

g) Quelle est la vitesse de l'objet quand il est à $\theta = 90°$?

La vitesse à cette position est

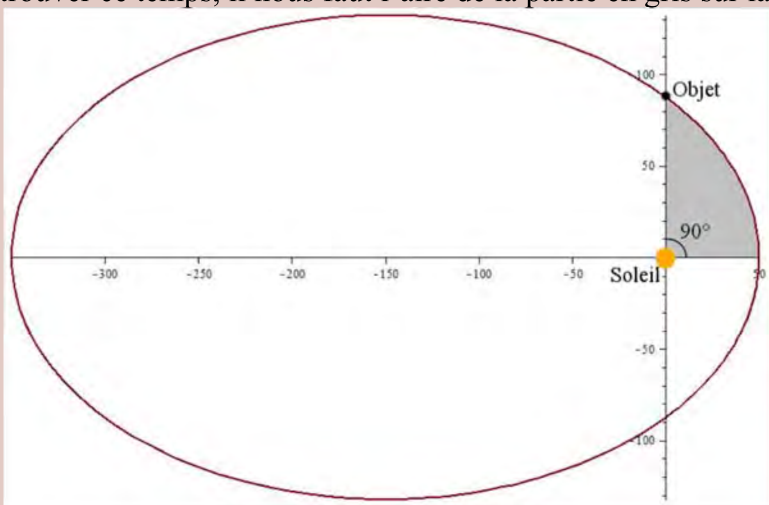
$$v = \sqrt{GM_c\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}$$
$$= \sqrt{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}\,kg\left(\frac{2}{8,75\times10^{10}\,m}-\frac{1}{2\times10^{11}\,m}\right)}$$
$$= 48,82\,\tfrac{km}{s}$$

h) Combien fait-il de temps pour que l'objet passe du périhélie à $\theta = 90°$?

On trouve le temps avec la deuxième loi de Kepler.

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2} \Delta t$$

Mais pour trouver ce temps, il nous faut l'aire de la partie en gris sur la figure.



Pour cette région, on a

$$\begin{aligned} E &= 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\arctan\left(\sqrt{\frac{0,25}{1,75}}\tan\frac{90°}{2}\right) \\ &= 0,7227 rad \end{aligned}$$

L'aire est donc

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\left(E - e\sin E\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\times 10^{11} m\right)^2 \sqrt{1-(0,75)^2}\left(0,7227 - 0,75\cdot\sin 0,7227\right) \\ &= 2,9983\times 10^{21} m^2 \end{aligned}$$

Le temps est donc

$$\Delta A=\frac{\sqrt{GM_c r_p\left(1+e\right)}}{2}\Delta t$$

$$2,998\times 10^{21}m^2=\frac{\sqrt{6,674\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times 10^{30}m\cdot 0,5\times 10^{11}m\left(1+0,75\right)}}{2}\Delta t$$

$$2,998\times 10^{21}m^2=1,7088\times 10^{15}\tfrac{m^2}{s}\Delta t$$

$$\Delta t=1,7547\times 10^{6}s$$

$$\Delta t=20,31j$$

La masse des étoiles

Revenons maintenant à l'objectif premier de ce chapitre qui est d'utiliser la loi de la gravitation pour déterminer la masse des étoiles. On voit qu'on peut facilement déterminer la valeur de la masse centrale avec la 3e loi de Kepler

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$

si on connait la période et le demi-grand axe pour un objet en orbite autour de l'étoile. Ici, il faut que l'objet qui tourne autour de l'étoile soit peu massif par rapport à la masse de l'étoile. Voici un exemple.

Exemple 3.5.1

Calculer la masse du Soleil sachant que la Terre tourne autour de celui-ci avec une période de 365,2563634 jours et que le demi grand-axe de l'orbite terrestre est de 149 597 870,7 km.

Avec la formule de la période, on trouve

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$

$$365,2563634\times 24\times 60\times 60s=2\pi\sqrt{\frac{\left(1,495978707\times 10^{11}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}M_c}}$$

$$M_c=1,9885\times 10^{30}kg$$

Avant 1798, on ne pouvait pas connaitre la masse du Soleil, car la valeur de G ne fut trouvée qu'en 1798 par Henry Cavendish. Notez qu'on pouvait quand même faire des calculs avec la loi de la gravitation, car on connaissait la valeur de $GM_{\odot}$. C'est donc uniquement à partir de 1798 qu'on put connaitre la masse du Soleil.

C'est donc de cette façon qu'on a pu mesurer la masse d'une étoile, le Soleil.

On mesure presque toujours les masses des étoiles en prenant la masse du Soleil comme unité.

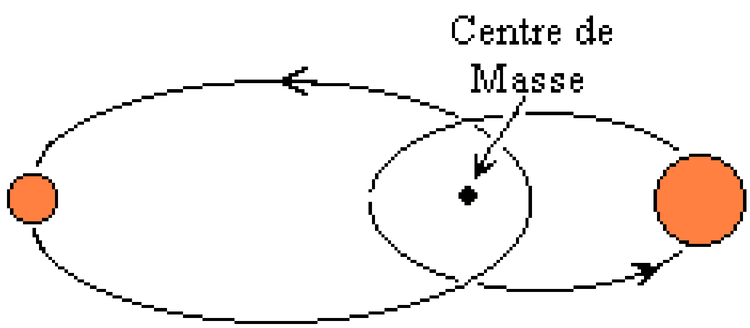
Autre unité de masse : la masse solaire ($M_{\odot}$)

$$1M_{\odot} = 1,9885 \times 10^{30} kg$$

3.6 LES ÉTOILES DOUBLES

Pour des étoiles lointaines, les méthodes des sections précédentes pourraient être appliquées si on pouvait voir directement des planètes tournant autour des étoiles. Comme il est vraiment très rare qu'on puisse voir directement les planètes en orbite autour d'une étoile, il faut donc utiliser une autre méthode pour trouver la masse des étoiles. Une variante de la méthode précédente permet de trouver la masse des étoiles doubles.

Une étoile double est formée de deux étoiles en rotation autour du centre de masse du système.



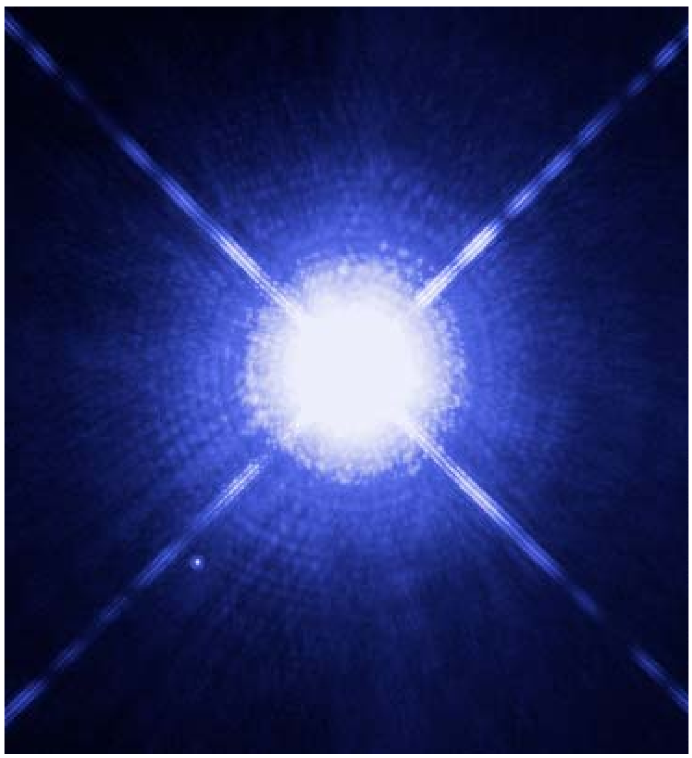
C'est un peu ce qu'on aurait obtenu avec le système solaire si Jupiter avait eu une masse 100 fois plus grande. Jupiter serait alors une étoile et nous serions dans un système avec deux étoiles. L'animation suivante vous montre le comportement d'un système d'étoile double.
http://www.youtube.com/watch?v=TdHfR_0VWhE

De tels systèmes d'étoiles doubles ne sont pas rares puisqu'on estime que plus de la moitié des étoiles font partie d'un système d'étoile double, triple ou quadruple. Avec les données actuelles, la proportion est la suivante :

- 45 % des étoiles sont seules.
- 46 % font partie d'un système double.
- 8 % font partie d'un système triple.
- 1 % font partie d'un système quadruple.

(La proportion d'étoiles faisant partie d'un système multiple pourrait même atteindre 80 % des étoiles selon certaines estimations.)

Par exemple, Sirius fait partie d'un système d'étoile double, formé des étoiles Sirius A et Sirius B. Sur cette image du télescope spatial Hubble, on peut voir Sirius A, qui est l'étoile la plus brillante, et Sirius B, qui la petite étoile très peu lumineuse en bas à gauche de Sirius A.



en.wikipedia.org/wiki/Sirius

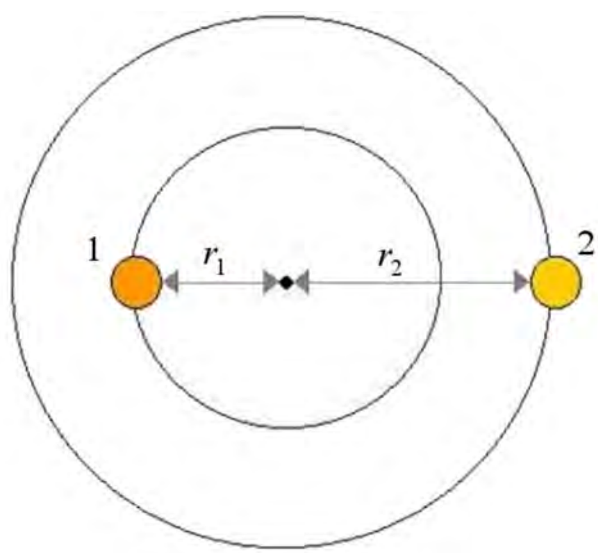
Un autre système binaire bien connu est Albiréo, formé d'Albiréo A et B.

www.astro.princeton.edu/~jeg/sky/pix/albireo.html

3.7 LES ÉTOILES DOUBLES AVEC ORBITES CIRCULAIRES

Commençons par supposer que nos deux étoiles sont sur des orbites circulaires. Les deux étoiles tournent autour du centre de masse avec la période *T*. Ce temps est le même pour les deux étoiles, car elles doivent toujours être de chaque côté du centre de masse du système. La distance entre les deux étoiles sera notée *r* et les distances entre les étoiles et le centre de masse sera notée r_1 et r_2. On peut facilement mesurer ces distances avec un télescope si on peut voir les deux étoiles du système, comme c'est le cas avec Sirius.

On a alors la situation suivante.



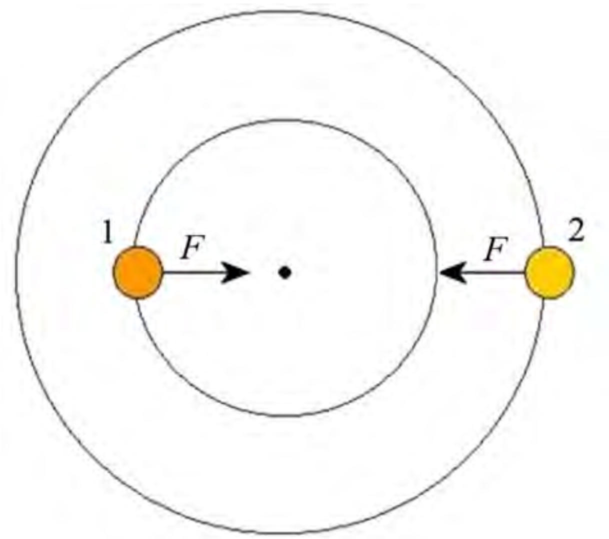
www.eso.org/public/outreach/eduoff/cas/cas2002/cas-projects/uk_castor_1/mech.html

Évidemment, la distance entre les étoiles est

$$r = r_1 + r_2$$

La période

Puisque les étoiles font un mouvement circulaire, il doit y avoir une force centripète sur chacune des étoiles. Cette force est faite par la force de gravitation entre les étoiles.



www.eso.org/public/outreach/eduoff/cas/cas2002/cas-projects/uk_castor_1/mech.html

On a donc

$$F_{centripète} = F_g$$
$$F_{centripète} = \frac{GM_1M_2}{r^2}$$

En appliquant cette équation à chaque étoile, on a

étoile 1	étoile 2
$\frac{4\pi^2 M_1 r_1}{T^2} = \frac{GM_1M_2}{r^2}$	$\frac{4\pi^2 M_2 r_2}{T^2} = \frac{GM_1M_2}{r^2}$
$\frac{4\pi^2 r_1}{T^2} = \frac{GM_2}{r^2}$	$\frac{4\pi^2 r_2}{T^2} = \frac{GM_1}{r^2}$

Additionnons maintenant ces deux équations (la somme des côtés gauches des équations est égale à la somme des côtés droits des équations). On a alors

$$\frac{4\pi^2 r_1}{T^2}+\frac{4\pi^2 r_2}{T^2}=\frac{GM_2}{r^2}+\frac{GM_1}{r^2}$$
$$\frac{4\pi^2\left(r_1+r_2\right)}{T^2}=\frac{G\left(M_1+M_2\right)}{r^2}$$

Puisque $r_1 + r_2$ est égale à la distance entre les étoiles r, et que $M_1 + M_2$ est la masse totale du système (M_{tot}), on a

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2}=\frac{GM_{tot}}{r^2}$$

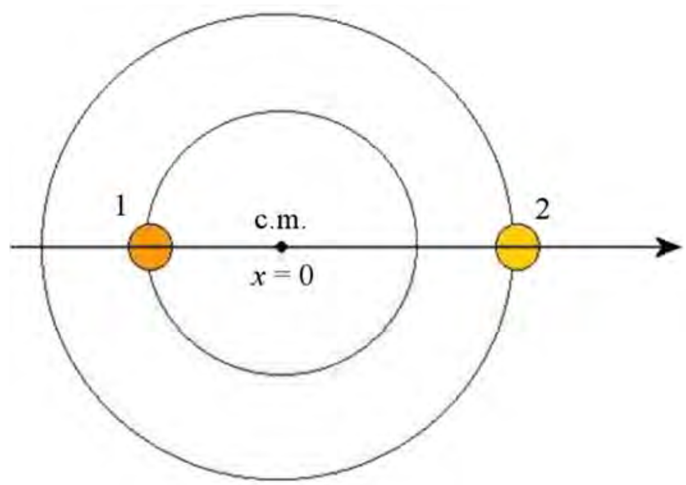
La période est donc

Période d'un système d'étoile double avec des orbites circulaires (3e loi de Kepler)

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{tot}}}$$

Rayons des orbites

Les rayons des orbites de chaque étoile sont reliés à la masse des étoiles. Pour les déterminer, on utilise l'équation de la position du centre de masse. On utilise un axe passant par les deux étoiles et par le centre de masse. On place notre $x = 0$ au centre de masse.



www.eso.org/public/outreach/eduoff/cas/cas2002/cas-projects/uk_castor_1/mech.html

On a alors

$$x_{c.m.}=\frac{M_1x_1+M_2x_2}{M_1+M_2}$$
$$0=\frac{M_1\left(-r_1\right)+M_2\left(r_2\right)}{M_1+M_2}$$

Ce qui nous donne

Relation entre les masses et les rayons des orbites dans un système d'étoile double en orbite circulaire

$$M_1 r_1 = M_2 r_2$$

Vitesse des étoiles

On trouve facilement la vitesse de chaque étoile en divisant la circonférence de l'orbite par la période de révolution. Pour l'étoile 1, on obtient

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T}$$

Puisque

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{GM_{tot}}{r^2}$$

La vitesse est

$$\begin{aligned} v_1 &= 2\pi r_1 \left(\sqrt{\frac{GM_{tot}}{4\pi^2 r^3}} \right) \\ &= r_1 \left(\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r^3}} \right) \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2 \\ &= r_1 + \frac{M_1}{M_2} r_1 \\ &= r_1 \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) \\ &= r_1 \left(\frac{M_2 + M_1}{M_2} \right) \\ &= r_1 \frac{M_{tot}}{M_2} \end{aligned}$$

Ce qui signifie que la vitesse est

$$\begin{aligned} v_1 &= r_1\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r^3}} \\ &= r\frac{M_2}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r^3}} \\ &= \frac{M_2}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}} \end{aligned}$$

En procédant de la même façon pour l'étoile 2, on arrive à

Vitesse des étoiles dans un système d'étoile double en orbite circulaire

$$v_1 = \frac{M_2}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}} \qquad\qquad v_2 = \frac{M_1}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}}$$

Énergie mécanique du système

L'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}M_1v_1^2 + \frac{1}{2}M_2v_2^2 - \frac{GM_1M_2}{r}$$

En utilisant les formules de vitesse, on arrive à

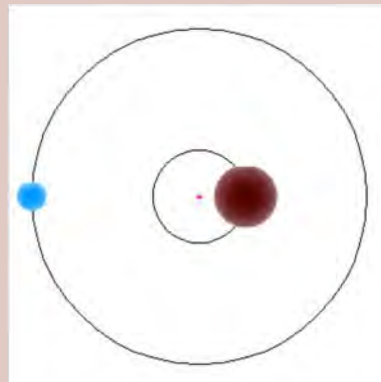
$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}M_1\frac{M_2^2}{M_{tot}^2}\frac{GM_{tot}}{r} + \frac{1}{2}M_2\frac{M_1^2}{M_{tot}^2}\frac{GM_{tot}}{r} - \frac{GM_1M_2}{r} \\ &= \frac{1}{2}M_1\frac{M_2^2}{M_{tot}}\frac{G}{r} + \frac{1}{2}M_2\frac{M_1^2}{M_{tot}}\frac{G}{r} - \frac{GM_1M_2}{r} \\ &= \left(\frac{1}{2}\frac{M_2}{M_{tot}} + \frac{1}{2}\frac{M_1}{M_{tot}} - 1\right)\frac{GM_1M_2}{r} \\ &= \left(\frac{1}{2}\frac{M_2+M_1}{M_{tot}} - 1\right)\frac{GM_1M_2}{r} \\ &= \left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{GM_1M_2}{r} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

Énergie mécanique d'un système d'étoile double en orbite circulaire

$$E_{mec} = -\frac{GM_1M_2}{2r}$$

Exemple 3.7.1



Voici deux étoiles en orbite circulaire autour de leur centre de masse. L'étoile la plus près du centre de masse a une masse de 3,6 masses solaires et l'étoile la plus éloignée du centre de masse a une masse de 1 masse solaire. La distance entre les étoiles est de 1 milliard de km.

a) Quelle est la période de ce système ?

La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{tot}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(10^{12}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 4,6\cdot 2\times 10^{30}kg}} \\ &= 2,536\times 10^6 s \\ &= 8,035 ans \end{aligned}$$

b) Quelle est le rayon de l'orbite chaque étoile ?

On a les relations suivantes

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 10^{12}m \\ M_1r_1 &= M_2r_2 \end{aligned}$$

On choisit que l'étoile 1 est celle de 1 $M_\odot$ et l'étoile 2 est celle de 3,6 $M_\odot$.

On a donc

$$r_1 = \frac{M_2r_2}{M_1} = 3,6r_2$$

et

$$r_1 + r_2 = 10^{12} m$$
$$3,6 r_2 + r_2 = 10^{12} m$$
$$4,6 r_2 = 10^{12} m$$
$$r_2 = 2,174 \times 10^{11} m$$

De là on trouve que

$$r_1 + r_2 = 10^{12} m$$
$$r_1 + 2,174 \times 10^{11} m = 10^{12} m$$
$$r_1 = 7,826 \times 10^{11} m$$

Ainsi, le rayon de l'orbite de l'étoile de 1 masse solaire est de 782,6 millions de km et le rayon de l'orbite de l'étoile de 3,6 masses solaires est de 217,4 millions de km.

c) Quelle est la vitesse de chaque étoile ?

On a

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 4,6 \cdot 2 \times 10^{30} kg}{10^{12} m}} \\ &= 24,779 \tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

La vitesse de l'étoile 1 est donc

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{M_2}{M_{tot}} 24,779 \tfrac{km}{s} \\ &= \frac{3,6 M_\odot}{4,6 M_\odot} 24,779 \tfrac{km}{s} \\ &= 19,392 \tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

et la vitesse de l'étoile 2 est

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{M_1}{M_{tot}} 24,779 \tfrac{km}{s} \\ &= \frac{1M_\odot}{4,6M_\odot} 24,779 \tfrac{km}{s} \\ &= 5,387 \tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse de l'étoile de 1 masse solaire est de 19,392 km/s et la vitesse de l'étoile de 3,6 masses solaires est 5,387 km/s.

d) Quelle est l'énergie mécanique de ce système ?

L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GM_1M_2}{2r} \\ &= -\frac{6,674\times10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2} \cdot 2\times10^{30}kg \cdot 7,2\times10^{30}kg}{2\cdot10^{12}m} \\ &= -4,805\times10^{38} J \end{aligned}$$

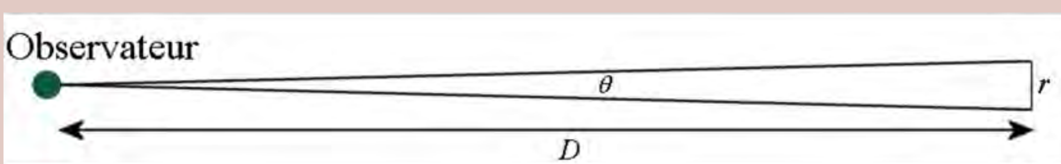
La masse des étoiles

On peut utiliser ces résultats pour déterminer la masse des deux étoiles dans un système d'étoiles double.

Exemple 3.7.2

Sirius A et B tournent toutes les deux autour de leur centre de masse avec une période de 49,9 ans. On va supposer ici que les orbites de ces étoiles sont circulaires. Vu de la Terre, l'angle entre Sirius A et le centre de masse est de 2,18'' et l'angle entre Sirius B et le centre de masse est de 5,32''. Ce système est à 8,60 al de la Terre. Quelle est la masse des deux étoiles ?

Commençons par trouver les distances entre les étoiles et le centre de masse. On trouve ces distances à partir des angles en partant de la figure suivante.



Comme l'angle est souvent petit, on peut faire comme si r était un arc de cercle. On a alors

$$\theta_{(rad)} = \frac{r}{D}$$

La distance est donc

$$r = \theta_{(rad)} D$$

Ainsi, les distances entre les étoiles et le centre de masse sont

$$r_A = \left(\left(\frac{2{,}18}{3600} \right)^{\circ} \times \frac{\pi rad}{180^{\circ}} \right) \times \left(8{,}60 \times 9{,}46 \times 10^{15} m \right) = 8{,}598 \times 10^{11} m$$

$$r_B = \left(\left(\frac{5{,}32}{3600} \right)^{\circ} \times \frac{\pi rad}{180^{\circ}} \right) \times \left(8{,}60 \times 9{,}46 \times 10^{15} m \right) = 2{,}098 \times 10^{12} m$$

La distance entre les étoiles est donc de

$$r_A + r_B = 2{,}958 \times 10^{12} m$$

Ainsi, la masse totale du système est

$$M_{tot} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

$$M_{tot} = \frac{4\pi^2 \left(2{,}958 \times 10^{12} \right)^3}{6{,}674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \left(49{,}9 \times 365{,}25 \times 24 \times 60 \times 60 s \right)^2} = 6{,}174 \times 10^{30} kg$$

La relation entre les masses est

$$M_A r_A = M_B r_B$$

$$M_A \left(8{,}598 \times 10^{11} m \right) = M_B \left(2{,}098 \times 10^{12} m \right)$$

$$M_A = 2{,}44 M_B$$

Cela signifie donc que

$$M_{tot} = M_A + M_B$$

$$M_{tot} = 2{,}44 M_B + M_B$$

$$M_{tot} = 3{,}44 M_B$$

La masse de l'étoile B est donc

$$6{,}174\times10^{30}kg = 3{,}44M_B$$
$$M_B = 1{,}795\times10^{30}kg$$

et la masse de l'étoile A est

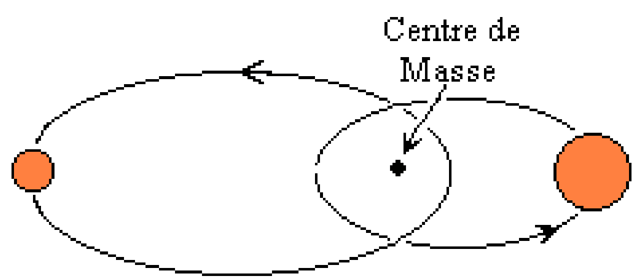
$$\begin{aligned} M_A &= M_{tot} - M_B \\ &= 6{,}175\times10^{30}kg - 1{,}795\times10^{30}kg \\ &= 4{,}38\times10^{30}kg \end{aligned}$$

En masses solaires, ces masses sont

$$M_A = 4{,}38\times10^{30}kg \times \frac{1M_\odot}{1{,}9985\times10^{30}kg} = 2{,}19M_\odot$$
$$M_B = 1{,}795\times10^{30}kg \times \frac{1M_\odot}{1{,}9985\times10^{30}kg} = 0{,}898M_\odot$$

3.8 LES ÉTOILES DOUBLES AVEC ORBITES ELLIPTIQUES

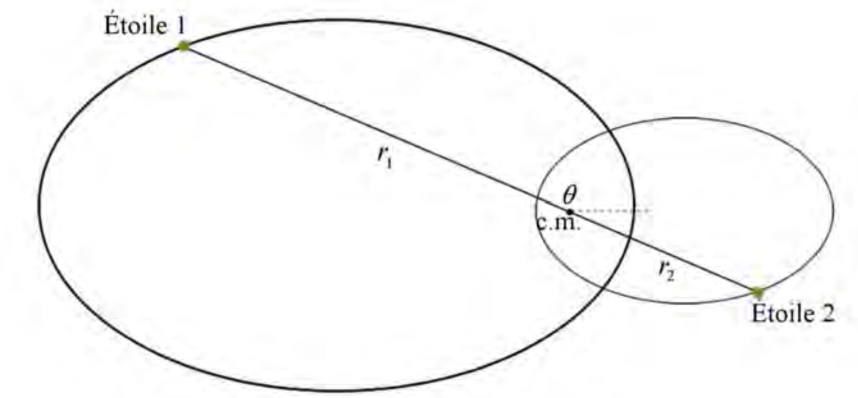
Examinons maintenant un système plus réaliste. Il s'agit d'un système d'étoiles double avec des orbites elliptiques.



Dans un tel système, le centre de masse est toujours à la même place (dans le repère où la quantité de mouvement est nulle). Cela implique que la relation

$$M_1r_1 = M_2r_2$$

doit toujours être vraie.



Ici aussi, on aura

$$r = r_1 + r_2$$

Équation des orbites

Si on dérive cette équation par rapport au temps 2 fois, on obtient alors la relation

$$a_r = a_{r1} + a_{r2}$$

où a_r est l'accélération radiale.

Or, l'accélération radiale est faite par la force de gravitation. Cela signifie que

$$M_1 a_{r1} = -\frac{GM_1M_2}{r^2} \qquad M_2 a_{r2} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}$$
$$a_{r1} = -\frac{1}{M_1}\frac{GM_1M_2}{r^2} \qquad a_{rB} = -\frac{1}{M_2}\frac{GM_1M_2}{r^2}$$

Si on additionne ces deux accélérations, on arrive à

$$a_{r1} + a_{r2} = -\frac{1}{M_1}\frac{GM_1M_2}{r^2} + -\frac{1}{M_2}\frac{GM_1M_2}{r^2}$$
$$a_r = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)$$
$$a_r = -\frac{G}{r^2}\left(\frac{M_1M_2}{M_1} + \frac{M_1M_2}{M_2}\right)$$
$$a_r = -\frac{G\left(M_1 + M_2\right)}{r^2}$$

$$a_r = -\frac{GM_{tot}}{r^2}$$

Cette équation ressemble étrangement à notre équation qu'on avait quand on supposait qu'il y avait une masse centrale immobile. Dans ce cas, l'équation de départ était

$$a_r = -\frac{GM_c}{r^2}$$

La solution de notre équation est donc assez similaire à celle obtenue auparavant quand il n'y avait qu'une masse centrale immobile, sauf que M_c est remplacée par M_{tot}. La solution est donc

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

où e est un facteur appelé *excentricité* qui vaut

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_{tot}} - 1$$

Dans ces formules, on a

$$r = r_1 + r_2 \qquad \text{et} \qquad v = v_1 + v_2$$

On peut séparer assez facilement cette solution pour obtenir la formule pour chaque étoile en utilisant $M_1 r_{1p} = M_2 r_{2p}$. Prenons la position de l'orbite de l'étoile 1. On a

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

$$r_1 + r_2 = \left(r_{p1} + r_{p2}\right)\frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

$$r_1 + \frac{M_1}{M_2} r_1 = \left(r_{p1} + \frac{M_1}{M_2} r_{p1}\right)\frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

$$r_1\left(1+\frac{M_1}{M_2}\right) = r_{p1}\left(1+\frac{M_1}{M_2}\right)\frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

$$r_1 = r_{p1}\frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

Évidemment, on obtient le même résultat pour l'étoile 2.

$$r_1 = r_{p1}\frac{1+e}{1+e\cos\theta} \qquad r_2 = r_{p2}\frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

(Notez que la distance r_1 est dans la direction de l'angle θ, à partir du centre de masse, alors que r_2 est dans la direction opposée à θ.)

Ces résultats indiquent, entre autres, que les orbites sont des ellipses et que l'excentricité des deux orbites est la même.

Excentricités dans un système d'étoile double avec orbite elliptique

$$e_1 = e_2$$
$$e = \frac{\left(v_{p1}+v_{p2}\right)^2\left(r_{p1}+r_{p2}\right)}{GM_{tot}} - 1$$

Avec $r_p = a(1-e)$, on trouve aussi

$$M_1 r_{p1} = M_2 r_{p2}$$
$$M_1 a_1\left(1-e\right) = M_2 a_2\left(1-e\right)$$

Puisque l'excentricité est la même pour les deux orbites, on arrive à

Relation entre les masses et les demi-grands axes dans un système d'étoile double avec orbite elliptique

$$M_1 a_1 = M_2 a_2$$

La période

Puisque la solution pour la position sur l'orbite est identique à ce qu'on avait pour 1 seul corps (sauf que M_c est remplacée par M_{tot}), la solution pour la période est la même.

Période dans un système d'étoile double avec orbite elliptique

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{tot}}}$$

Dans cette formule, a est la somme des a de chaque étoile.

Les vitesses de chaque étoile

Puisque la solution pour la position sur l'orbite est identique à ce qu'on avait pour 1 seul corps (sauf que M_c est remplacée par M_{tot}), la solution pour la vitesse est la même. Cela signifie que les vitesses à la périapside et à l'apoapside sont

$$v_p = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1+e}{1-e}}$$
$$v_a = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1-e}{1+e}}$$

Prenons la vitesse à la périapside pour illustrer comment on peut trouver la vitesse de chaque étoile à partir de ce résultat.

$$v_p = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1+e}{1-e}}$$
$$v_{p1} + v_{p2} = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1+e}{1-e}}$$

Comme

$$M_1 v_{p1} = M_2 v_{p2}$$

L'équation devient

$$v_{p1} + \frac{M_1}{M_2} v_{p1} = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1+e}{1-e}}$$
$$v_{p1}\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right) = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1+e}{1-e}}$$
$$v_{p1} = \frac{1}{1+\frac{M_1}{M_2}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1+e}{1-e}}$$
$$v_{p1} = \frac{M_2}{M_2 + M_1}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1+e}{1-e}}$$
$$v_{p1} = \frac{M_2}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1+e}{1-e}}$$

Ainsi, les vitesses sont

Vitesse des étoiles dans un système d'étoile double avec orbite elliptique

$$v_p = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1+e}{1-e}} \qquad v_a = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1-e}{1+e}}$$

$$v_{p1} = \frac{M_2}{M_{tot}} v_p \qquad v_{a1} = \frac{M_2}{M_{tot}} v_a$$

$$v_{p2} = \frac{M_1}{M_{tot}} v_p \qquad v_{a2} = \frac{M_1}{M_{tot}} v_a$$

L'énergie mécanique du système

On peut calculer l'énergie mécanique du système quand les deux masses sont au plus près l'un de l'autre

$$E_{mec} = \frac{1}{2} M_1 v_{p1}^2 + \frac{1}{2} M_2 v_{p2}^2 - \frac{GM_1 M_2}{r_p}$$

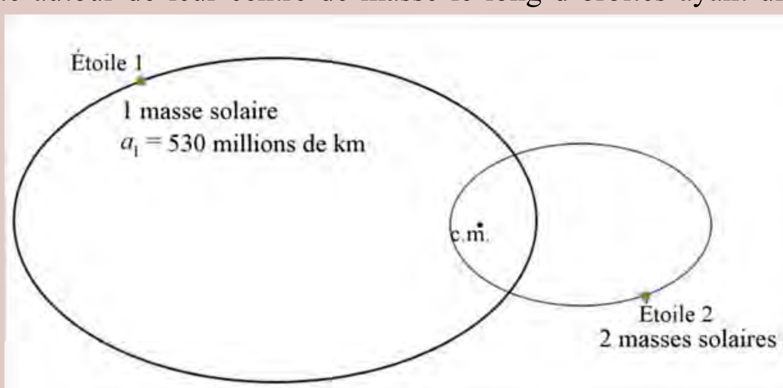
En utilisant toutes les formules de cette section, on peut montrer que cette somme est simplement

Énergie mécanique dans un système d'étoile double avec orbite elliptique

$$E_{mec} = -\frac{GM_1 M_2}{2a}$$

Exemple 3.8.1

Voici deux étoiles en orbite autour de leur centre de masse le long d'orbites ayant une excentricité de 0,8.



a) Quelle est la vitesse de chaque étoile quand elle au plus près du centre de masse ?

On prend la formule de la vitesse à la périapside, mais en prenant la masse totale du système comme masse centrale. La somme des masses est 3 masses solaires, qui vaut

$$M_{tot} = 3 \cdot 2 \times 10^{30} kg = 6 \times 10^{30} kg$$

On doit aussi prendre la somme des *a* de chaque étoile pour le *a*. Trouvons premièrement le *a* de l'orbite de l'étoile 2.

$$\begin{aligned} M_1 a_1 &= M_2 a_2 \\ 1M_\odot \cdot 530 \times 10^9 m &= 2M_\odot \cdot a_2 \\ a_2 &= 265 \times 10^9 m \end{aligned}$$

Ainsi, *a* est

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2 \\ &= 530 \times 10^9 m + 265 \times 10^9 m \\ &= 795 \times 10^9 m \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a} \frac{1+e}{1-e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 6 \times 10^{30} kg}{795 \times 10^9 m} \frac{1+0,8}{1-0,8}} \\ &= 67,33 \tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

La vitesse de l'étoile la plus massive est donc

$$\begin{aligned} v_{p1} &= \frac{M_2}{M_{tot}} v_p \\ &= \frac{2M_\odot}{3M_\odot} 67,33 \tfrac{km}{s} \\ &= 44,89 \tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

et la vitesse de l'étoile la moins massive est

$$\begin{aligned} v_{p2} &= \frac{M_1}{M_{tot}} v_p \\ &= \frac{1M_\odot}{3M_\odot} 67,33 \tfrac{km}{s} \\ &= 22,44 \tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

b) Quelle est la période de ce système ?

La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{tot}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(795\times10^9 m\right)^3}{6,674\times10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 6\times10^{30} kg}} \\ &= 2,226\times10^8 s \\ &= 7,053 ans \end{aligned}$$

c) Quelle est l'énergie mécanique de ce système ?

L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GM_1M_2}{2a} \\ &= -\frac{6,674\times10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30} kg \cdot 4\times10^{30} kg}{2\cdot 795\times10^9 m} \\ &= -3,358\times10^{38} J \end{aligned}$$

La masse des étoiles

On peut utiliser ces résultats pour déterminer la masse des deux étoiles dans un système d'étoiles double.

Exemple 3.8.2

30 et 31 du Cygne tournent tous les deux autour de leur centre de masse avec une période de 3786 jours en suivant des orbites dont l'excentricité est de 0,224. Au maximum, la distance entre les deux étoiles est de 2,319 milliards de km. À ce moment, une des étoiles est 1,64 fois plus loin du centre de masse que l'autre étoile. Quelle est la masse des deux étoiles ?

On sait que

$$r_a = 2,319\times 10^{12} m = a\left(1+e\right)$$

Ainsi, a vaut

$$\begin{aligned}2,319\times 10^{12} m &= a\left(1+0,224\right)\\ a &= 1,895\times 10^{12} m\end{aligned}$$

La masse totale du système est donc

$$\begin{aligned}M_{tot} &= \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}\\ &= \frac{4\pi^2\left(1,879\times 10^{12} m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\left(3786\times 24\times 60\times 60s\right)^2}\\ &= 3,760\times 10^{31} kg\\ &= 18,798 M_\odot\end{aligned}$$

La relation entre les masses se trouve avec $M_1 r_1 = M_2 r_2$. Cette relation est toujours bonne et elle est donc bonne au point A.

$$\begin{aligned}M_1 r_{a1} &= M_2 r_{a2}\\ \frac{M_1}{M_2} &= \frac{r_{a2}}{r_{a1}}\\ \frac{M_1}{M_2} &= 1,64\end{aligned}$$

Cela signifie donc que

$$\begin{aligned}M_{tot} &= M_1 + M_2\\ M_{tot} &= 1,64 M_2 + M_2\\ M_{tot} &= 2,64 M_2\end{aligned}$$

La masse de l'étoile 2 est donc

$$18,798M_{\odot} = 2,64M_2$$
$$M_2 = 7,120M_{\odot}$$

et la masse de l'étoile 1 est

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{tot} - M_2 \\ &= 18,798M_{\odot} - 7,120M_{\odot} \\ &= 11,678M_{\odot} \end{aligned}$$

3.7 LES MASSES DES ÉTOILES

En procédant de cette façon, on a pu mesurer la masse de nombreuses étoiles. Les étoiles les moins massives ont une masse d'environ 0,085 $M_{\odot}$ et les étoiles les plus massives ont des masses de l'ordre de 250 $M_{\odot}$. On verra cependant qu'il est possible que des étoiles de quelques milliers de masses solaires aient existé quand l'univers était très jeune.

Voici la masse de quelques étoiles dont la masse a été déterminée par les lois de la gravitation.

Étoile	Masse
Soleil	1 $M_{\odot}$
Sirius A (étoile la plus brillante)	2,19 $M_{\odot}$
Procyon A (8e étoile la plus brillante)	1,50 $M_{\odot}$
Alpha du centaure A (2e étoile la plus près ex aequo)	1,1 $M_{\odot}$
Alpha du centaure B (2e étoile la plus près ex aequo)	0,907 $M_{\odot}$
Delta de Céphée A	4,5 $M_{\odot}$
Mira	1,18 $M_{\odot}$
Polaire (Alpha de la Grande Ourse A)	5,4 $M_{\odot}$

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Force sur un objet de masse *m* dans un champ gravitationnel

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

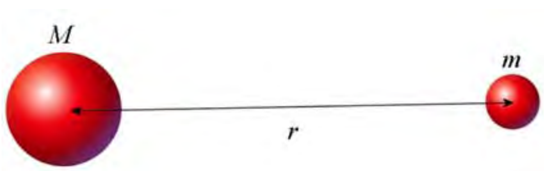
Champ gravitationnel d'une masse ponctuelle de masse *M*

$$g = \frac{GM}{r^2} \text{ dirigé vers la masse ponctuelle}$$

Champ gravitationnel fait par un astre

$$g = \frac{GM}{r^2} \text{ dirigé vers le centre de l'astre.}$$

Force entre deux astres



$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

où r est la distance entre les centres des sphères.

Forme de la trajectoire pour un objet près d'une masse centrale

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

Excentricité

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

Énergie mécanique

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

Conservation du moment cinétique

$$rv\sin\psi = r_p v_p$$
$$rv\sin\psi = \sqrt{GM_c r_p\left(1+e\right)}$$

Deuxième loi de Kepler

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p\left(1+e\right)}}{2}\Delta t$$

La vitesse pour une orbite circulaire

$$v = \sqrt{\frac{GM_c}{r}}$$

Énergie mécanique pour une orbite circulaire

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2r}$$

La période pour une orbite circulaire (3^e loi de Kepler)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_c}}$$

Première loi de Kepler

Les orbites sont des ellipses. La masse centrale occupe un des foyers.

r_a et r_p en fonction de a et e pour une orbite elliptique

$$r_a = a\left(1+e\right)$$
$$r_p = a\left(1-e\right)$$

a et e en fonction de r_a et r_p pour une orbite elliptique

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \qquad\qquad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

r en fonction de θ pour une orbite elliptique

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta} \qquad\qquad r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}$$

Énergie mécanique d'un objet sur une orbite elliptique

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m\left(1-e\right)}{2r_p}$$

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2a}$$

La vitesse d'un objet sur une orbite elliptique

$$v^2 = GM_c\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Vitesse d'un objet à la périapside et à l'apoapside

$$v_p^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}$$

$$v_a^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}$$

Période pour une orbite elliptique (3^e loi de Kepler)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$

Autre unité de masse : la masse solaire ($M_\odot$)

$$1M_\odot = 1{,}9885\times 10^{30}\,kg$$

Période d'un système d'étoile double avec des orbites circulaires (3e loi de Kepler)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{tot}}}$$

Relation entre les masses et les rayons des orbites dans un système d'étoile double en orbite circulaire

$$M_1 r_1 = M_2 r_2$$

Vitesse des étoiles dans un système d'étoile double en orbite circulaire

$$v_1 = \frac{M_2}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}} \qquad v_2 = \frac{M_1}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}}$$

Énergie mécanique d'un système d'étoile double en orbite circulaire

$$E_{mec} = -\frac{GM_1 M_2}{2r}$$

Excentricités dans un système d'étoile double avec orbite elliptique

$$e_1 = e_2$$

$$e = \frac{\left(v_{p1} + v_{p2}\right)^2 \left(r_{p1} + r_{p2}\right)}{GM_{tot}} - 1$$

Relation entre les masses et les demi-grands axes dans un système d'étoile double avec orbite elliptique

$$M_1 a_1 = M_2 a_2$$

Période dans un système d'étoile double avec orbite elliptique

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{tot}}}$$

Vitesse des étoiles dans un système d'étoile double avec orbite elliptique

$$v_p = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1+e}{1-e}} \qquad v_a = \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1-e}{1+e}}$$

$$v_{p1} = \frac{M_2}{M_{tot}}v_p \qquad v_{a1} = \frac{M_2}{M_{tot}}v_a$$

$$v_{p2} = \frac{M_1}{M_{tot}}v_p \qquad v_{a2} = \frac{M_1}{M_{tot}}v_a$$

Énergie mécanique dans un système d'étoile double avec orbite elliptique

$$E_{mec} = -\frac{GM_1M_2}{2a}$$

EXERCICES

Utilisez les données suivantes pour ces exercices.

Soleil

Masse du Soleil = 1,9885 x 10^{30} kg

Terre

Masse de la Terre = 5,97 x 10^{24} kg
Rayon de la Terre = 6370 km
Distance entre la Terre et le Soleil= 149 600 000 km

Lune

Masse de la Lune = 7,34 x 10^{22} kg
Distance entre la Terre et la Lune = 384 400 km

Mars

Masse de Mars = 6,42 x 10^{23} kg
Rayon de Mars = 3400 km
Demi-grand axe de l'orbite = 1,523 679 UA
Excentricité = 0,093 315

3.1 Le champ gravitationnel

1. Quel est le champ gravitationnel à 100 km de la surface de la Terre ?

2.
   a) Quel est le champ gravitationnel à la surface de Mars ?
   b) Quel serait le poids d'une personne de 70 kg à la surface de Mars ?
   c) Ce poids représente quel pourcentage du poids de la personne sur Terre ?

3. À quelle distance de la Terre le champ gravitationnel est-il nul entre la Terre et la Lune ?

3.2 La force gravitationnelle entre 2 planètes

4. Quelle est la grandeur de la force exercée par la Terre sur la Lune ?

5. Quelle est la grandeur de la force exercée par la Lune sur la Terre ?

3.3 Trajectoire près d'un objet massif

6. À son point le plus près du Soleil, un objet a une vitesse de 70 km/s. La distance entre l'objet et le Soleil est alors de 50 millions de km.

   a) Quelle est l'excentricité de son orbite ?
   b) À quelle distance du Soleil sera l'objet quand l'angle sera de 90° par rapport à sa position la plus près ?

3.4 Les orbites circulaires

7. En supposant que l'orbite de la Lune est circulaire et que son rayon est de 384 400 km, calculez…
   a) la période de la Lune dans sa révolution autour de la Terre.
   b) la vitesse de la Lune sur son orbite.

8. Une planète tourne autour d'une étoile avec une période de 159,5 jours. Quelle est la masse de l'étoile (en masse solaire) si la planète tourne autour de l'étoile en suivant une orbite circulaire dont le rayon est de 220 000 000 km ?

9. Quelle est l'énergie mécanique du système Terre-Soleil si on suppose que l'orbite de la Terre est circulaire avec un rayon de 149 600 000 km ?

10. Combien d'énergie faudrait-il fournir pour éloigner la Terre de 10 000 000 km du Soleil si on suppose qu'au départ la Terre était sur une orbite circulaire ayant un rayon de 149 600 000 km ?

3.5 Les orbites elliptiques

11. Quelle est la distance entre Mars et le Soleil au périhélie (en UA) ?

12. Quelle est la distance entre Mars et le Soleil à l'aphélie (en UA) ?

13. Quelle est la vitesse de Mars au périhélie ?

14. Quelle est la vitesse de Mars à l'aphélie ?

15. Quelle est la période de rotation de Mars autour du Soleil ?

16. Quelle est l'énergie mécanique de Mars sur son orbite ?

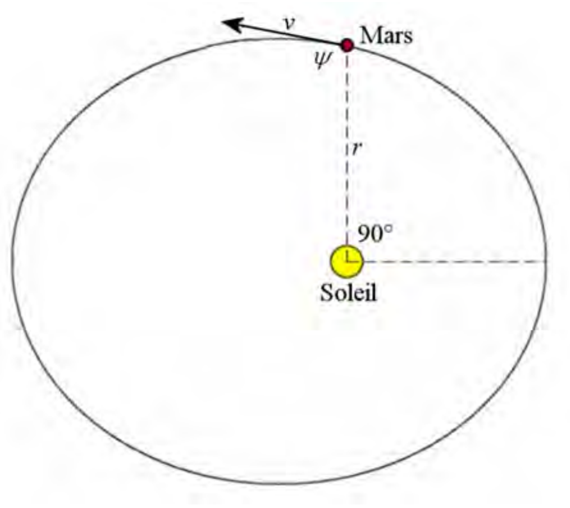
17. Quel est le moment cinétique de Mars sur son orbite ?

18. À un certain moment sur son orbite, Mars est à la position $\theta = 90°$ montrée sur cette figure.

    a) Quelle est la distance entre Mars et le Soleil ?

    b) Quelle est la vitesse de Mars ?

    c) Quel est l'angle entre la vitesse de Mars et la ligne allant de Mars au Soleil (ψ sur la figure) ?



en.wikibooks.org/wiki/General_Astronomy/Kepler's_Laws

    d) Combien a-t-il fallu de temps pour que Mars passe du périhélie à cette position ?

    e) Combien faudra-t-il de temps pour que mars atteigne la position $\theta = 120°$ à partir de cette position ?

3.7 Les étoiles doubles avec orbite circulaire

19. Les deux étoiles d'un système double situé à 5 pc de la Terre sont séparées d'un angle de 12″. Quelle est la distance entre les étoiles ?

20. Deux étoiles sont en orbite circulaire autour de leur centre de masse. L'étoile A a une masse de 1,8 $M_{\odot}$ alors que l'étoile B a une masse de $0{,}9 M_{\odot}$. La distance entre les étoiles est de 9 UA.
    a) Quelle est la période de ce système ?
    b) Quel est le rayon de l'orbite de chaque étoile ?
    c) Quelle est la vitesse de chaque étoile ?
    d) Quelle est l'énergie mécanique de ce système ?

21. Deux étoiles distantes de 15 UA tournent autour du centre de masse du système en suivant des orbites circulaires avec une période de 32 ans. Quelle est la masse totale du système d'étoile ?

22. Alpha du Centaure est une étoile double dont la période de rotation est de 79,9 ans. La séparation angulaire entre les étoiles est de 17,6″. La séparation angulaire entre l'étoile A et le centre de masse est de 7,9″ et la séparation angulaire entre l'étoile B et le centre de masse est de 9,7″. Quelle est la masse de chaque étoile si ce système est à 4,36 al de la Terre et si on suppose que les orbites sont circulaires ?

3.8 Les étoiles doubles avec orbite elliptique

23. Le système Sirius A et B est composé de deux étoiles qui tournent autour de leur centre de masse avec une période de 50,09 ans. Les orbites sont elliptiques avec une excentricité de 0,5923. Les demi-grands axes des étoiles sont 13,268 UA et 6,433 UA. Sirius A est la plus massive et Sirius B est la moins massive.

    a) Quelle est la plus petite distance entre les étoiles ?
    b) Quelle est la plus grande distance entre les étoiles ?
    c) Quelle est la masse de chaque étoile ?
    d) Quelle est la vitesse à l'apoapside de chaque étoile ?
    e) Quelle est l'énergie mécanique de ce système ?

24. Procyon A et B tournent toutes les deux autour de leur centre de masse avec une période de 40,82 ans en suivant des orbites dont l'excentricité est de 0,407. Au minimum, la distance entre les deux étoiles est de 9,004 UA. À ce moment, une des étoiles a une vitesse 2,5 fois plus grande que l'autre étoile. Quelle est la masse des deux étoiles ?

RÉPONSES

3.1 Le champ gravitationnel

1. 9,52 N/kg
2. a) 3,71 N/kg b) 259 N c) 37,8 %
3. À 346 031 km du centre de la Terre

3.2 La force gravitationnelle entre 2 planètes

4. $1,99 \times 10^{20}$ N
5. $1,99 \times 10^{20}$ N

3.3 Les trajectoires près d'un objet massif

6. a) 0,8460 b) 92,30 millions de km

3.4 Les orbites circulaires

7. a) 27,5 jours b) 1018 m/s
8. 16,7 $M_\odot$
9. $-2,65 \times 10^{33}$ J
10. $1,66 \times 10^{32}$ J

3.5 Les orbites elliptiques

11. 1,381 497 UA
12. 1,665 861 UA
13. 26,496 km/s
14. 21,973 km/s
15. 686,99 jours
16. $-1,868 \times 10^{32}$ J
17. $3,516 \times 10^{39}$ kg m²/s
18. a) 1,5104 UA b) 24,34 km/s c) 95,3° d) 151,2 j e) 59,3 j

3.7 Les étoiles doubles avec orbite circulaire

19. 60 UA
20. a) 16,43 ans b) 3 UA et 6 UA c) 10 876 m/s et 5438 m/s d) $-1,588 \times 10^{38}$ J

21. 3,30 $M_\odot$
22. 1,12 $M_\odot$ et 0,92 $M_\odot$

3.8 Les étoiles doubles avec orbite elliptique

23. a) 8,032 UA b) 31,37 UA c) 0,995 $M_\odot$ et 2,053 $M_\odot$
    d) 1935 m/s et 3993 m/s e) -9,145 x 10^{37} J
24. 1,501 $M_\odot$ et 0,600 $M_\odot$