Solutionnaire du chapitre 1

1. L'énergie est

$$\begin{aligned}U_g &= -\frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{r} \\ &= -\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}\,kg\cdot 5,98\times10^{24}\,kg}{1,496\times10^{11}\,m} \\ &= -5,34\times10^{33}\,J\end{aligned}$$

2. a) L'excentricité est

$$\begin{aligned}e &= \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 \\ &= \frac{\left(70\,000\,\frac{m}{s}\right)^2\left(5\times10^{10}\,m\right)}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}\,kg} - 1 \\ &= 0,8355\end{aligned}$$

b) la distance est

$$\begin{aligned}r &= r_p\frac{1+e}{1+e\cos\theta} \\ &= 5\times10^{10}\,m\,\frac{1+0,8355}{1+0,8355\cdot\cos 90°} \\ &= 9,177\times10^{10}\,m\end{aligned}$$

Ce qui est 91,77 millions de km.

3. a) La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{Terre}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(3,844\times10^8 m\right)^3}{6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,98\times10^{24}kg}} \\ &= 2,37\times10^6 s \\ &= 27,4\ jours \end{aligned}$$

b) La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM_{Terre}}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,98\times10^{24}kg}{3,844\times10^8 m}} \\ &= 1019\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

4. a) On a

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{Saturne}}} \\ 15,96\cdot24\cdot60\cdot60s &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(1,22\times10^9 m\right)^3}{6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}M_{Saturne}}} \\ M_{Saturne} &= 5,65\times10^{26}kg \end{aligned}$$

b) La force est

$$\begin{aligned} F &= \frac{GM_{Saturne}M_{Titan}}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,65\times10^{26}kg\cdot1,35\times10^{23}kg}{\left(1,22\times10^9 m\right)^2} \\ &= 3,42\times10^{21}N \end{aligned}$$

5. L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2r} \\ &= -\frac{6{,}674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}\,kg\cdot 5{,}98\times10^{24}\,kg}{1{,}496\times10^{11}\,m} \\ &= -2{,}67\times10^{33}\,J \end{aligned}$$

6. L'énergie mécanique initiale est

$$E_{mec} = -\frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2r}$$

Si on amène la Terre à une autre distance (appelons la *r*'), l'énergie sera

$$E'_{mec} = -\frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2r'}$$

La variation d'énergie est donc

$$\begin{aligned} \Delta E_{mec} &= E'_{mec} - E_{mec} \\ &= -\frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2r'} - \frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2r} \\ &= \frac{GM_{Terre}M_{Soleil}}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right) \\ &= \frac{6{,}674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}\,kg\cdot 5{,}98\times10^{24}\,kg}{2}\left(\frac{1}{1{,}496\times10^{11}\,m}-\frac{1}{1{,}596\times10^{11}\,m}\right) \\ &= 1{,}67\times10^{32}\,J \end{aligned}$$

7. La distance est

$$\begin{aligned} r_p &= a(1-e) \\ &= 1{,}523\,679\,UA(1-0{,}093\,315) \\ &= 1{,}381\,497\,UA \end{aligned}$$

8. La distance est

$$\begin{aligned} r_p &= a(1+e) \\ &= 1{,}523\,679\,UA(1+0{,}093\,315) \\ &= 1{,}665\,861\,UA \end{aligned}$$

9. La vitesse est donnée par la formule suivante.

$$\begin{aligned} v_P^2 &= \frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e} \\ &= \frac{6{,}674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot1{,}9885\times10^{30}\,kg}{1{,}523\,679\times1{,}496\times10^{11}\,m}\frac{1+0{,}093\,315}{1-0{,}093\,315} \\ &= 7{,}0206\times10^{8}\,\frac{m^2}{s^2} \\ v_p &= 26\,496\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

10. La vitesse est donnée par la formule suivante.

$$\begin{aligned} v_a^2 &= \frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e} \\ &= \frac{6{,}674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot1{,}9885\times10^{30}\,kg}{1{,}523\,679\times1{,}496\times10^{11}\,m}\frac{1-0{,}093\,315}{1+0{,}093\,315} \\ &= 4{,}8283\times10^{8}\,\frac{m^2}{s^2} \\ v_a &= 21\,973\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

11. La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(1,523\,679\times 1,496\times 10^{11}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}kg}} \\ &= 5,93556\times 10^7 s \\ &= 686,99\,j \end{aligned}$$

12. L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GM_c m}{2a} \\ &= -\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}kg\cdot 6,4185\times 10^{23}kg}{2\cdot 1,523\,679\times 1,496\times 10^{11}m} \\ &= -1,868\times 10^{32}J \end{aligned}$$

13. Le moment cinétique est

$$L = mvr\sin\theta$$

On va calculer cette valeur quand la planète est au périhélie. On a alors

$$\begin{aligned} L &= mvr\sin\theta \\ &= mv_a r_a\sin 90° \\ &= 6,4185\times 10^{23}kg\cdot 26\,496\,\tfrac{m}{s}\cdot\left(1,381\,497\cdot 1,496\times 10^{11}m\right) \\ &= 3,5148\times 10^{39}\,\tfrac{kgm}{s} \end{aligned}$$

14. a) La distance est

$$\begin{aligned} r &= \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta} \\ &= \frac{1,523\,679UA\left(1-\left(0,093\,315\right)^2\right)}{1+0,093\,315\cdot\cos 90°} \\ &= 1,510\,411UA \end{aligned}$$

b) La vitesse est

$$\begin{aligned}
v^2 &= GM_c\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)\\
&= 6,674\times 10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg\\
&\qquad\times\left(\frac{2}{1,510\,411\times 1,496\times 10^{11}\,m}-\frac{1}{1,523\,679\times 1,496\times 10^{11}\,m}\right)\\
&= \frac{6,674\times 10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg}{1,496\times 10^{11}\,m}\left(\frac{2}{1,510\,411}-\frac{1}{1,523\,679}\right)\\
&= 5,9245\times 10^{8}\,\tfrac{m^2}{s^2}\\
v &= 24,34\,\tfrac{km}{s}
\end{aligned}$$

c) Avec le moment cinétique (que l'on a calculé à l'exercice 10), on a

$$\begin{gathered}
L = mvr\sin\theta\\
3,5148\times 10^{39}\,\tfrac{kgm}{s} = 6,4185\times 10^{23}\,kg\cdot 24\,340\,\tfrac{m}{s}\cdot 1,510411\times 1,496\times 10^{11}\,m\cdot\sin\psi\\
\sin\psi = 0,99567\\
\psi = 84,7° \text{ ou } 95,3°
\end{gathered}$$

Avec la figure, il est clair que c'est l'angle supérieur à 90° qui est bon.

15. a) La vitesse est

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{2GM_{soleil}}{r_p}}\\
&= \sqrt{\frac{2\cdot 6,674\times 10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times 10^{30}\,kg}{5\times 10^{10}\,m}}\\
&= 73,07\,\tfrac{km}{s}
\end{aligned}$$

b) Comme on sait que l'énergie mécanique est nulle sur une trajectoire parabolique, on peut trouver la vitesse avec la conservation de l'énergie

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r}$$
$$0 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{-GM_c}{r}$$
$$0 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{-6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}kg}{2\times10^{11}m}$$
$$v = 36,53\,\tfrac{km}{s}$$

16. On peut trouver la vitesse avec la formule de l'excentricité

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$
$$1,2 = \frac{v_p^2\left(5\times10^{10}m\right)}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}kg} - 1$$
$$v_p = 76,64\,\tfrac{km}{s}$$

b) On pourra trouver sa vitesse avec la conservation de l'énergie. Sur cette trajectoire, l'énergie est

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

On a donc

$$-\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r}$$
$$-\frac{GM_c(1-e)}{2r_p} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{-GM_c}{r}$$
$$\frac{-6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}kg\cdot(1-1,2)}{2\cdot 5\times10^{10}m} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{-6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}kg}{2\times10^{11}m}$$
$$2,6696\times10^8\,\tfrac{J}{kg} = \frac{1}{2}v^2 + -6,674\times10^8\,\tfrac{J}{kg}$$
$$v = 43,23\,\tfrac{km}{s}$$

17. Le champ est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_{\oplus}}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,98\times10^{24}\,kg}{\left(6,48\times10^{6}\,m\right)^2} \\ &= 9,50\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

18. Le champ est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_{\oplus}r}{R_{\oplus}^3} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,98\times10^{24}\,kg\cdot 5,38\times10^{6}\,m}{\left(6,38\times10^{6}\,m\right)^3} \\ &= 8,27\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

19. a) Le champ est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_{mars}}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 6,42\times10^{23}\,kg}{\left(3,4\times10^{6}\,m\right)^2} \\ &= 3,71\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

b) Le poids est

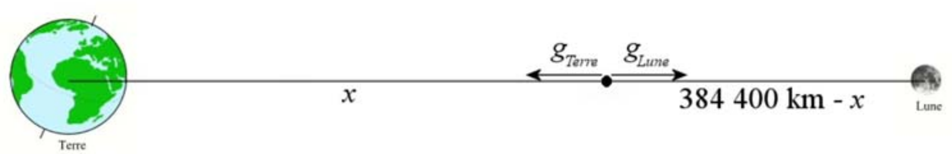
$$\begin{aligned} P &= mg \\ &= 70kg\cdot 3,71\,\tfrac{N}{kg} \\ &= 259N \end{aligned}$$

c) Le rapport des poids est

$$\frac{P_{\text{sur Mars}}}{P_{\text{sur Terre}}} = \frac{259N}{686N} = 0,378$$

Le poids sur Mars est donc 37,8 % du poids sur Terre.

20. Entre la Terre et la lune, le champ est la somme des champs.



Si le champ est nul, c'est que le champ fait par la Terre est de même grandeur que celui de la Lune. On a donc

En posant que la position initiale de Richard était à $x = 0$, on a

$$g_{Terre} = g_{Lune}$$
$$\frac{GM_{Terre}}{r_{Terre}^2} = \frac{GM_{Lune}}{r_{Lune}^2}$$
$$\frac{5,98\times10^{24}kg}{x^2} = \frac{7,35\times10^{22}kg}{\left(3,844\times10^8 m - x\right)^2}$$
$$\frac{81,36}{x^2} = \frac{1}{\left(3,844\times10^8 m - x\right)^2}$$
$$81,36\cdot\left(3,844\times10^8 m - x\right)^2 = x^2$$
$$81,36x^2 - 6,255\times10^{10} m\cdot x + 1,202\times10^{19} = x^2$$
$$80,36x^2 - 6,255\times10^{10} m\cdot x + 1,202\times10^{19} = 0$$

Les solutions de cette équation sont

x = 346 037 km et x = 432 330 km.

La deuxième solution correspond à un point qui n'est pas entre la Terre et la Lune et ce n'est donc pas une bonne solution. Il est vrai que les champs sont égaux à cet endroit, mais ils sont dans la même direction, ce qui fait que les champs s'additionnent et ne peuvent pas donner un champ nul. La bonne réponse est donc 346 037 km.

21. La force est

$$\begin{aligned} F &= \frac{GM_{Terre}M_{Lune}}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,98\times 10^{24}\,kg\cdot 7,35\times 10^{22}\,kg}{\left(3,844\times 10^{8}\,m\right)^2} \\ &= 1,99\times 10^{20}\,N \end{aligned}$$

22. La force est

$$\begin{aligned} F &= \frac{GM_{Terre}M_{Lune}}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,98\times 10^{24}\,kg\cdot 7,35\times 10^{22}\,kg}{\left(3,844\times 10^{8}\,m\right)^2} \\ &= 1,99\times 10^{20}\,N \end{aligned}$$

23. La vitesse de libération est

$$\begin{aligned} v_{lib} &= \sqrt{\frac{2GM_{Lune}}{R_{Lune}}} \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,35\times 10^{22}\,kg}{1,738\times 10^{6}\,m}} \\ &= 2376\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

24. L'énergie est

$$\begin{aligned} U_g &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \\ &= -\frac{3}{5}\cdot\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(7,35\times 10^{22}\,kg\right)^2}{1,738\times 10^{6}\,m} \\ &= -1,24\times 10^{29} \end{aligned}$$