Solutionnaire du chapitre 17

1. La vitesse de la galaxie est

$$z = \frac{v}{c}$$
$$0,00436 = \frac{v}{3\times 10^8 \frac{m}{s}}$$
$$v = 1,308\times 10^6 \tfrac{m}{s}$$

Selon la loi de Hubble, on a

$$v = H_0 D$$
$$1308 \tfrac{km}{s} = 67,8 \tfrac{km/s}{Mpc} D$$
$$D = 19,29 Mpc$$

2. À cette distance, la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= H_0 D \\ &= 67,8 \tfrac{km/s}{Mpc} \cdot \frac{600 Mal}{3,262 \frac{al}{pc}} \\ &= 12\,471 \tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

Le décalage des raies est donc

$$\begin{aligned} \delta &= 1 + \frac{v}{c} \\ &= 1 + \frac{1,2471\times 10^6 \frac{m}{s}}{3\times 10^8 \frac{m}{s}} \\ &= 1,0416 \end{aligned}$$

La longueur d'onde est donc

$$\delta = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

$$1,0413 = \frac{\lambda'}{656,11nm}$$

$$\lambda' = 683,4nm$$

3. On trouve le taux avec les facteurs de conversion

$$1\tfrac{km/s}{Mpc} = 3,2409\times10^{-20}s^{-1}$$

$$1\tfrac{km/s}{Mpc} = 1,02273\times10^{-12}a^{-1}$$

$$1\tfrac{km/s}{Mpc} = 1,02273\times10^{-3}Ga^{-1}$$

On a donc

$$\begin{aligned}500\tfrac{km/s}{Mpc} &= 500\cdot1,02273\times10^{-3}Ga^{-1}\\ &= 500\cdot1,02273\times10^{-3}Ga^{-1}\\ &= 0,511Ga^{-1}\end{aligned}$$

4. Le décalage est

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\lambda'}{\lambda}\\ &= \frac{3136,2nm}{656,1nm}\\ &= 4,78\end{aligned}$$

Le facteur d'échelle était donc de

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\delta}\\ &= \frac{1}{4,78}\\ &= 0,2092\end{aligned}$$

5. La densité était de

$$\begin{aligned}
\rho_m &= \frac{1}{a^3}\rho_{m0} \\
&= \frac{1}{(0,6)^3} 5,162 \tfrac{m_p}{m^3} \\
&= 23,90 \tfrac{m_p}{m^3}
\end{aligned}$$

6. On a

$$\begin{aligned}
\rho_{c0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \\
&= \frac{3\left(100 \cdot 3,2409 \times 10^{-20} s^{-1}\right)^2}{8\pi \cdot 6,674 \times 10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2}} \\
&= 1,879 \times 10^{-26} \tfrac{kg}{m^3} \\
&= 11,23 \tfrac{m_p}{m^3}
\end{aligned}$$

7. On a

$$\begin{aligned}
a &= \left(\frac{t}{9,61Ga}\right)^{\frac{2}{3}} \\
2 &= \left(\frac{t}{9,61Ga}\right)^{\frac{2}{3}} \\
t &= 27,18Ga
\end{aligned}$$

Comme nous sommes actuellement à t = 9,61 Ga, cela se produira dans

27,18 Ga – 9,61 Ga = 17,57 Ga

8. Le facteur d'échelle sera de

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{t}{9,61Ga}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{10,61Ga}{9,61Ga}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 1,0682 \end{aligned}$$

9. À ce moment, le facteur d'échelle était de

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{t}{9,61Ga}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{2Ga}{9,61Ga}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 0,3512 \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que la densité était de

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{1}{a^3}\rho_{m0} \\ &= \frac{1}{(0,3512)^3} 5,162 \tfrac{m_p}{m^3} \\ &= 119,2 \tfrac{m_p}{m^3} \end{aligned}$$

10. On a

$$\begin{aligned} H &= \frac{2}{3t} \\ 30 \cdot 1,02273 \times 10^{-3} Ga^{-1} &= \frac{2}{3t} \\ t &= 21,73Ga \end{aligned}$$

Comme nous sommes actuellement à t = 9,61 Ga, cela se produira dans

21,73 Ga – 9,61 Ga = 12,12 Ga

11. On a

$$\begin{aligned} H &= \frac{2}{3t} \\ &= \frac{2}{3 \cdot 10,61 Ga} \\ &= 0,06283 Ga^{-1} \end{aligned}$$

En km/s/Mpc, cela donne

$$H = 0,06236 Ga^{-1} \frac{1 \frac{km/s}{Mpc}}{1,02273 \times 10^{-3} Ga^{-1}} = 61,44 \frac{km/s}{Mpc}$$

12. a) Cette lumière est partie quand le facteur d'échelle était de

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\delta} \\ &= \frac{1}{4,78} \\ &= 0,2092 \end{aligned}$$

Trouvons maintenant l'âge de l'univers quand on avait ce facteur d'échelle

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{t}{9,61 Ga} \right)^{\frac{2}{3}} \\ 0,2092 &= \left(\frac{t}{9,61 Ga} \right)^{\frac{2}{3}} \\ t &= 0,9196 Ga \end{aligned}$$

La lumière est donc partie quand l'univers avait un âge de 0,9196 Ga et elle arrive maintenant, quand l'univers a un âge de 9,61 Ga. Elle voyage donc depuis 8,69 Ga.

b) La distance est

$$\begin{aligned} d &= 28{,}83Gal\left(1-\sqrt{a_e}\right) \\ &= 28{,}83Gal\left(1-\sqrt{0{,}2092}\right) \\ &= 15{,}64Gal \end{aligned}$$

c) Au moment de l'émission, le quasar était 4,78 fois plus près. Il était donc à 3,27 Gal.

d) Trouvons le facteur d'échelle lors de la réception de la lumière

$$15{,}64Gal = 28{,}83Gal\left(\sqrt{a_r}-1\right)$$
$$a_r = 2{,}3793$$

L'âge de l'univers à ce moment sera de

$$a = \left(\frac{t}{9{,}61Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$2{,}3793 = \left(\frac{t}{9{,}61Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$t = 35{,}27Ga$$

Comme nous sommes actuellement à t = 9,61 Ga, cela se produira dans

35,27 Ga – 9,61 Ga = 25,66 Ga

e) Comme le facteur d'échelle sera de 2,3793, le quasar sera 2,3793 fois plus loin qu'aujourd'hui. Il sera donc à 37,21 Gal de nous.

f) Le facteur d'échelle à l'émission est

$$a_e = \left(\frac{t}{9,61Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= \left(\frac{5Ga}{9,61Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 0,6469$$

On trouve ensuite le facteur d'échelle à la réception,

$$d = 28,83Gal\left(\sqrt{a_r} - \sqrt{a_e}\right)$$
$$15,64Gal = 28,84Gal\left(\sqrt{a_r} - \sqrt{0,6469}\right)$$
$$a_r = 1,8138$$

De là, on trouve l'âge de l'univers à la réception

$$a = \left(\frac{t}{9,61Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$1,8078 = \left(\frac{t}{9,61Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$t = 23,48Ga$$

Comme nous sommes actuellement à t = 9,61 Ga, cela se produira dans

23,48 Ga – 9,61 Ga = 13,87 Ga

13. a) On a

$$d = 3ct_A^{2/3}t_r^{1/3}$$
$$45Gal = 3c\left(9,61Ga\right)^{2/3}t_r^{1/3}$$
$$15Ga = \left(9,61Ga\right)^{2/3}t_r^{1/3}$$
$$t_r = 36,54Ga$$

Comme nous sommes actuellement à t = 9,61 Ga, cela se produira dans

36,54 Ga – 9,61 Ga = 26,93 Ga

b) À ce moment, le facteur d'échelle sera de

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{t}{9,61Ga} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{36,54Ga}{9,61Ga} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 2,436 \end{aligned}$$

La galaxie sera donc 2,436 fois plus loin qu'en ce moment. Elle sera donc à 2,436 x 45 Gal = 109,6 Gal.

14. La valeur est

$$\begin{aligned} a_{\max} &= \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1} \\ &= \frac{1,2}{1,2 - 1} \\ &= 6 \end{aligned}$$

15. Le facteur d'échelle sera

$$\begin{aligned} a &= \left(0,667 \sinh\left(\frac{t}{11,56Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(0,667 \sinh\left(\frac{14,80Ga}{11,56Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 1,070 \end{aligned}$$

16. On a

$$a = \left(0,667\sinh\left(\frac{t}{11,56Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$2 = \left(0,667\sinh\left(\frac{t}{11,56Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t = 24,87Ga$$

Comme nous sommes actuellement à t = 13,80 Ga, cela se produira dans

24,87 Ga – 13,80 Ga = 11,07 Ga

17. Le facteur d'échelle à ce moment était de

$$\begin{aligned} a &= \left(0,667\sinh\left(\frac{t}{11,56Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(0,667\sinh\left(\frac{2Ga}{11,56Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 0,2378 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{1}{a^3}\rho_{m0} \\ &= \frac{1}{(0,2378)^3}\left(0,308\cdot 5,162\tfrac{m_p}{m^3}\right) \\ &= 128,5\tfrac{m_p}{m^3} \end{aligned}$$

18. La densité du vide est de

$$\begin{aligned} \rho_v &= 0,692\cdot 5,162\tfrac{m_p}{m^3} \\ &= 3,572\tfrac{m_p}{m^3} \end{aligned}$$

On doit donc avoir la même densité de matière. On doit donc avoir

$$\rho_m = \frac{1}{a^3}\rho_{m0}$$
$$3,572\tfrac{m_p}{m^3} = \frac{1}{a^3}\left(0,308 \cdot 5,162\tfrac{m_p}{m^3}\right)$$
$$a = 0,7635$$

L'âge de l'univers à ce facteur d'échelle est donné par

$$a = \left(0,667\sinh\left(\frac{t}{11,56Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$0,7635 = \left(0,667\sinh\left(\frac{t}{11,56Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$t = 10,19Ga$$

(Voici une meilleure version :

La densité du vide est

$$\rho_v = \Omega_v \rho_{c0}$$

On doit donc avoir la même densité de matière. On doit donc avoir

$$\rho_m = \frac{1}{a^3}\rho_{m0}$$
$$\Omega_v \rho_{c0} = \frac{1}{a^3}\Omega_m \rho_{c0}$$
$$a = \sqrt[3]{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}}$$

L'âge de l'univers à ce facteur d'échelle est donné par

$$a=\left(\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_v}H_0}{2}t\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}}=\left(\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_v}H_0}{2}t\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}}=\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_v}H_0}{2}t\right)$$

$$1=\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_v}H_0}{2}t\right)$$

$$t=\frac{2}{3\sqrt{\Omega_v}H_0}\sinh^{-1}1$$

$$t=11,56Ga\sinh^{-1}1$$

$$t=10,19Ga$$

C’est un peu plus long, mais ça évite les approximations.)

19. Le taux sera de

$$\begin{aligned}H&=56,4\,\tfrac{km/s}{Mpc}\frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,56Ga}\right)}\\&=56,4\,\tfrac{km/s}{Mpc}\frac{1}{\tanh\left(\frac{14,80Ga}{11,56Ga}\right)}\\&=65,84\,\tfrac{km/s}{Mpc}\end{aligned}$$

20. La lumière a été émise quand le facteur d’échelle était de 0,1411. Selon notre tableau des distances, un décalage de 0,149 donne une distance de 27,1 Gal. Avec un facteur d’échelle un peu plus petit, on obtient une distance un peu plus grande. La distance semble donc tout à fait raisonnable. (Le calcul précis selon nos formules donne une distance de 27,6 Gal.)