

Solutionnaire du chapitre 15

1. La perte de masse à chaque passage est

$$\begin{aligned}M &= 25\,000 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot (365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{s}) \\ &= 7,89 \times 10^{11} \text{kg}\end{aligned}$$

Le nombre de passages est donc

$$N = \frac{M_{\text{tot}}}{M} = \frac{10^{14} \text{kg}}{7,89 \times 10^{11} \text{kg}} = 127$$

2. Pour déterminer le type d'orbite, nous allons calculer l'énergie mécanique. Le signe de l'énergie nous dira le type d'orbite. Cette énergie est

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GMm}{r}$$

On n'a pas la masse de la comète, mais ce n'est pas grave, car on veut uniquement savoir le signe de l'énergie. On a donc

$$\begin{aligned}E_{\text{mec}} &= m \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{-GM}{r} \right) \\ &= m \left(\frac{1}{2} \left(45\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \frac{-6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} \text{kg}}{0,652 \cdot 1,496 \times 10^{11} \text{m}} \right) \\ &= m \left(1,0125 \times 10^9 \frac{\text{J}}{\text{kg}} - 1,3606 \times 10^9 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) \\ &= m \left(-3,48 \times 10^8 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)\end{aligned}$$

Comme l'énergie est négative, l'orbite est elliptique.

3. a) La vitesse est

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{\frac{2GM_{\text{soleil}}}{r_p}} \\
 &= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} \text{ kg}}{5 \times 10^{10} \text{ m}}} \\
 &= 72,86 \frac{\text{km}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

b) Comme on sait que l'énergie mécanique est nulle sur une trajectoire parabolique, on peut trouver la vitesse avec la conservation de l'énergie

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r} \\
 0 &= \frac{1}{2}v^2 + \frac{-GM_c}{r} \\
 0 &= \frac{1}{2}v^2 + \frac{-6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} \text{ kg}}{2 \times 10^{11} \text{ m}} \\
 v &= 36,43 \frac{\text{km}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

4. On peut trouver la vitesse avec la formule de l'excentricité.

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 \\
 1,2 &= \frac{v_p^2 (5 \times 10^{10} \text{ m})}{6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} \text{ kg}} - 1 \\
 v_p &= 76,42 \frac{\text{km}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

b) On pourra trouver sa vitesse avec la conservation de l'énergie. Sur cette trajectoire, l'énergie est

$$E_{\text{mec}} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r} \\
 -\frac{GM_c(1-e)}{2r_p} &= \frac{1}{2}v^2 + \frac{-GM_c}{r} \\
 \frac{-6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg \cdot (1-1,2)}{2 \cdot 5 \times 10^{10} m} &= \frac{1}{2}v^2 + \frac{-6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg}{2 \times 10^{11} m} \\
 2,6542 \times 10^6 \frac{J}{kg} &= \frac{1}{2}v^2 + -6,6356 \times 10^6 \frac{J}{kg} \\
 v &= 43,10 \frac{km}{s}
 \end{aligned}$$

5. a) Pour connaître la forme de l'orbite, on va calculer le signe de l'énergie mécanique de la comète. Cette énergie est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_c m}{r}$$

On n'a pas la masse de la comète, mais de toute façon, on ne veut savoir que le signe de l'énergie. On a donc

$$\begin{aligned}
 E_{mec} &= m \left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_T}{r} \right) \\
 &= m \left(\frac{1}{2} \left(100 \frac{m}{s} \right)^2 - \frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,972 \times 10^{24} kg}{10^{11} m} \right) \\
 &= m \left(1014,2872 \frac{m^2}{s^2} \right)
 \end{aligned}$$

Comme la valeur est positive, l'orbite est hyperbolique.

- b) On sait que

$$E_{mec} = m \left(1014,2872 \frac{m^2}{s^2} \right)$$

Au point le plus près de la Terre, on aura donc

$$\begin{aligned}
 m \left(1014,2872 \frac{m^2}{s^2} \right) &= \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GM_T m}{r_p} \\
 1014,2872 \frac{m^2}{s^2} &= \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM_T}{r_p}
 \end{aligned}$$

Il nous faut une deuxième équation pour résoudre. Cette deuxième équation est la conservation du moment cinétique.

$$vr \sin \psi = v_p r_p$$

$$100 \frac{m}{s} \cdot 10^{11} m \cdot \sin 0,5^\circ = v_p r_p$$

$$8,7265 \times 10^{10} \frac{m^2}{s} = v_p r_p$$

$$v_p = \frac{8,7265 \times 10^{10} \frac{m^2}{s}}{r_p}$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation de l'énergie, on arrive à

$$1014,2872 \frac{m^2}{s^2} = \frac{1}{2} v_p^2 - \frac{GM_T}{r_p}$$

$$1014,2872 \frac{m^2}{s^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{8,7265 \times 10^{10} \frac{m^2}{s}}{r_p} \right)^2 - \frac{GM_T}{r_p}$$

$$1014,2872 \frac{m^2}{s^2} = \frac{3,8076211 \times 10^{21} \frac{m^4}{s^2}}{r_p^2} - \frac{3,9857128 \times 10^{14} \frac{m^3}{s^2}}{r_p}$$

$$1014,2872 \frac{m^2}{s^2} r_p^2 = 3,8076211 \times 10^{21} \frac{m^4}{s^2} - 3,9857128 \times 10^{14} \frac{m^3}{s^2} r_p$$

$$1014,2872 \cdot r_p^2 + 3,9857128 \times 10^{14} m \cdot r_p - 3,8076211 \times 10^{21} m^2 = 0$$

La solution de cette équation quadratique est

$$r_p = \frac{-3,9857128 \times 10^{14} m \pm \sqrt{(3,9857128 \times 10^{14} m)^2 - 4 \cdot 1014,2872 \cdot 3,8076211 \times 10^{21} m^2}}{2 \cdot 1014,2872}$$

$$= \frac{-3,9857128 \times 10^{14} m \pm 3,9855190 \times 10^{14} m}{2 \cdot 1014,2872}$$

$$= \frac{1,938 \times 10^{10} m}{2 \cdot 1014,2872}$$

$$= 9\,553 \text{ km}$$

Comme cette valeur est plus grande que le rayon de la Terre, la comète ne frappe pas la Terre. Elle passe cependant très près (à 3182 km de la surface).

c) On peut trouver l'excentricité avec la formule de l'énergie

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$
$$1014,2872 \frac{m^2}{s^2} \cdot m = -\frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,972 \times 10^{24} kg \cdot m(1-e)}{2(9,553 \times 10^6 m)}$$
$$(1-e) = -4,86 \times 10^{-5}$$
$$e = 1,0000486$$