Solutionnaire du chapitre 14

1. On trouve l'énergie libérée à partir des masses avec

$$Q = \left(m_{avant} - m_{après}\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u}$$

a) On a

$$\begin{aligned} Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(\left(m_C + m_{He}\right) - \left(m_O\right)\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(\left(12,000\ 000\ u + 4,002\ 603\ u\right) - \left(15,994\ 915\ u\right)\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(0,007\ 688\ \text{u}\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= 7,16 MeV \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned} Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(\left(m_C + m_{He}\right) - \left(m_O\right)\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(\left(15,994\ 915\ u\ u + 4,002\ 603\ u\right) - \left(19,992\ 440\ u\right)\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(0,005\ 078\ \text{u}\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= 4,73 MeV \end{aligned}$$

2. La luminosité sera

$$\begin{aligned} L &= \sigma 4\pi R^2 T^4 \\ &= 5,67 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2 K^4} \cdot 4\pi \cdot \left(55 \cdot 6,955 \times 10^8 m\right)^2 \left(3700 K\right)^4 \\ &= 1,954 \times 10^{29} W \\ &= 510 L_\odot \end{aligned}$$

3. Le rayon est

$$\begin{aligned}
R &= 0,0126R_\odot \sqrt[3]{\frac{1M_\odot}{M}}\sqrt{1-\left(\frac{M}{1,44M_\odot}\right)^{4/3}} \\
&= 0,0126R_\odot \sqrt[3]{\frac{1M_\odot}{0,6M_\odot}}\sqrt{1-\left(\frac{0,6M_\odot}{1,44M_\odot}\right)^{4/3}} \\
&= 0,0126R_\odot \sqrt[3]{\frac{1}{0,6}}\sqrt{1-\left(\frac{0,6}{1,44}\right)^{4/3}} \\
&= 0,0126R_\odot \cdot 1,1856 \cdot 0,8299 \\
&= 0,0124R_\odot
\end{aligned}$$

4. a) On trouve la luminosité avec

$$R = 33,3R_\odot \sqrt{\frac{L}{1L_\odot}}\left(\frac{1000K}{T}\right)^2$$

On a déjà la température, mais il nous manque le rayon. Ce rayon est

$$\begin{aligned}
R &= 0,01R_\odot \sqrt[3]{\frac{0,7M_\odot}{M}} \\
&= 0,01R_\odot \sqrt[3]{\frac{0,7M_\odot}{0,8M_\odot}} \\
&= 0,01R_\odot \sqrt[3]{\frac{0,7}{0,8}} \\
&= 0,009565R_\odot
\end{aligned}$$

La luminosité est donc

$$R = 33,3R_\odot \sqrt{\frac{L}{1L_\odot}} \left(\frac{1000K}{T} \right)^2$$

$$0,009565R_\odot = 33,3R_\odot \sqrt{\frac{L}{1L_\odot}} \left(\frac{1000K}{30\,000K} \right)^2$$

$$2,872 \times 10^{-4} = \sqrt{\frac{L}{1L_\odot}} \left(\frac{1}{30} \right)^2$$

$$0,2585 = \sqrt{\frac{L}{1L_\odot}}$$

$$L = 0,067L_\odot$$

b) La grandeur du champ gravitationnel est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM}{R^2} \\ &= \frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 0,8 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg}{\left(0,009565 \cdot 6,597 \times 10^8 m\right)^2} \\ &= 2,398 \times 10^6 \tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

c) La hauteur caractéristique de l'atmosphère est

$$\begin{aligned} H &= \frac{RT}{\mu g} \\ &= \frac{8,31 \frac{J}{molK} \cdot 30\,000K}{0,001 \frac{kg}{mol} \cdot 2,398 \times 10^6 \frac{N}{kg}} \\ &= 104m \end{aligned}$$

5. Le rapport des luminosités est

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)}$$

Si l'étoile est 10 000 fois plus lumineuse, alors on a $I_2 = 10\,000\ I_1$. On a donc

$$\frac{1}{10\,000} = 10^{0,4(m_2 - m_1)}$$
$$10^{-4} = 10^{0,4(m_2 - m_1)}$$
$$-4 = 0,4(m_2 - m_1)$$
$$-10 = m_2 - m_1$$
$$m_2 = m_1 - 10$$

Cela signifie que la magnitude baisse de 10.

6. La quantité d'hydrogène est

$$M_H = \frac{10^{38} J}{6,4 \times 10^{14} \frac{J}{kg}} = 1,5 \times 10^{23} kg$$

Cela représente 2,6 % de la masse de la Terre.

7. Puisque la sphère de matière est passée d'un rayon nul à un rayon de 8'' d'arc en 8 ans, ω est 1''/an. En radian par seconde, ω est

$$\begin{aligned}\omega &= 1''/\,an \\ &= \left(\frac{1}{3600}\right)\frac{°}{an} \cdot \frac{\pi rad}{180°} \cdot \frac{1an}{365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s} \\ &= 1,536 \times 10^{-14} \tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La distance est donc de

$$\begin{aligned}D &= \frac{v}{\omega_{(rad/s)}} \\ &= \frac{1700 \times 10^3 \frac{m}{s}}{1,536 \times 10^{-13} \frac{rad}{s}} \\ &= 1,107 \times 10^{19} m \\ &= 1170 a.l.\end{aligned}$$

8. Sachant que la magnitude absolue de la supernova est de -19,6, on trouve la distance avec

$$M = m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$-19,6 = 8,9 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$D = 16,3Mal$$

9. La limite de visibilité étant d'une magnitude de 6, on trouve la distance maximale avec

$$M = m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$-19,6 = 6 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$D = 4,3Mal$$

10. a) L'énergie gravitationnelle est

$$\begin{aligned} U &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \\ &= -\frac{3}{5}\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\left(2\times10^{30}kg\right)^2}{5,5\times10^6 m} \\ &= -2,9\times10^{43}J \end{aligned}$$

b) L'énergie libérée par une réaction

$$14\,{}^{12}_{6}C \rightarrow 3\,{}^{56}_{26}Fe + 6e^+$$

est

$$\begin{aligned} Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\times931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(14\cdot12u - 3\cdot55,9349375u\right)\times931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(168u - 167,8048125u\right)\times931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(0,1951875u\right)\times931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= 181,82MeV \end{aligned}$$

Pour trouver le nombre de réaction, trouvons le nombre d'atome de carbone 12. Ce nombre est

$$N_C = \frac{2\times10^{30}kg}{0{,}012\,\frac{g}{mol}}6{,}02\times10^{23}\,\tfrac{atomes}{mol} = 1{,}00\times10^{56}$$

Comme il faut 14 atomes de carbone pour faire 1 réaction, le nombre de réaction est

$$N = \frac{N_C}{14} = \frac{1{,}00\times10^{56}}{14} = 7{,}17\times10^{54}$$

Puisque chaque réaction donne 181,82 MeV, on a

$$\begin{aligned}E &= 7{,}17\times10^{54}\cdot181{,}82MeV\\ &= 7{,}17\times10^{54}\cdot181{,}82MeV\cdot1{,}602\times10^{-13}\,\tfrac{J}{MeV}\\ &= 2{,}09\times10^{44}J\end{aligned}$$

c) La somme des deux énergies

$$\begin{aligned}E &= U_g + Q\\ &= -2{,}9\times10^{43}J + 2{,}09\times10^{44}J\\ &= 1{,}8\times10^{44}J\end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, il y a assez d'énergie pour disperser l'étoile.

11. a) L'énergie est

$$\begin{aligned}E_k &= \frac{1}{2}mv^2\\ &= \frac{1}{2}\cdot4\cdot1{,}9885\times10^{30}kg\cdot\left(5\times10^6\,\tfrac{m}{s}\right)^2\\ &= 9{,}94\times10^{43}J\end{aligned}$$

b) Le pourcentage est

$$\frac{9{,}9425\times10^{43}J}{10^{46}J}\cdot100\% = 0{,}994\%$$

c) La quantité de mouvement des couches est

$$\begin{aligned} p &= mv \\ &= 4 \cdot 1{,}9885 \times 10^{30} kg \cdot 5 \times 10^{6} \tfrac{m}{s} \\ &= 3{,}977 \times 10^{37} \tfrac{kgm}{s} \end{aligned}$$

À mesure que les couches passent dans le milieu interstellaire, elles accumulent de la masse. Pour que la vitesse diminue à 10 km/s, il faut que la masse totale soit de

$$\begin{aligned} p' &= p \\ m'v' &= 3{,}977 \times 10^{37} \tfrac{kgm}{s} \\ m' \cdot 10^{4} \tfrac{m}{s} &= 3{,}977 \times 10^{37} \tfrac{kgm}{s} \\ m' &= 3{,}977 \times 10^{33} kg \end{aligned}$$

Ce qui est près de 2000 masses solaires. Cette masse est la masse totale, c'est-à-dire la masse des couches additionnée à celle du milieu interstellaire qui a été ramassée par les couches. Pour trouver la masse du milieu interstellaire qui a été ramassée par les couches, il faut soustraire la masse des couches.

$$\begin{aligned} m_{\text{interstallaire}} &= 3{,}977 \times 10^{33} kg - 4 \cdot 1{,}9885 \times 10^{30} kg \\ &= 3{,}969 \times 10^{33} kg \end{aligned}$$

Pour avoir autant de masse, le volume de milieu interstellaire est

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M}{vol} \\ 2 \times 10^{-19} \tfrac{kg}{m^3} &= \frac{3{,}969 \times 10^{33} kg}{Vol} \\ Vol &= 1{,}98 \times 10^{52} m^3 \end{aligned}$$

Comme les couches éjectées balaient une sphère, on doit trouver le rayon d'une sphère qui a ce volume.

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{3} \pi R^3 &= 1{,}98 \times 10^{52} m^3 \\ R &= 1{,}67 \times 10^{17} m \end{aligned}$$

Cette distance est 17,7 al.

12. a) Le rayon est

$$
\begin{aligned}
R &= 11km\sqrt[3]{\frac{1,4M_\odot}{M}} \\
&= 11km\sqrt[3]{\frac{1,4M_\odot}{2M_\odot}} \\
&= 11km\sqrt[3]{\frac{1,4}{2}} \\
&= 9,8km
\end{aligned}
$$

b) La densité est

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{M}{volume} \\
&= \frac{4\times10^{30}kg}{\frac{4}{3}\pi(9800m)^3} \\
&= 10^{18}\tfrac{kg}{m^3}
\end{aligned}
$$

c) La vitesse de libération est

$$
\begin{aligned}
v_{lib} &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} \\
&= \sqrt{\frac{2\cdot 6,674\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 4\times10^{30}kg}{9800m}} \\
&= 2,3\times10^8\tfrac{m}{s}
\end{aligned}
$$

C’est quand même près de 80% de la vitesse de la lumière !

13. a) On trouve la luminosité avec

$$R = 33,3R_\odot\sqrt{\frac{L}{1L_\odot}}\left(\frac{1000K}{T}\right)^2$$

On a déjà la température, mais il nous manque le rayon. Ce rayon est

$$\begin{aligned}R &= 11km\sqrt[3]{\frac{1,4M_\odot}{M}}\\&= 11km\sqrt[3]{\frac{1,4M_\odot}{2,5M_\odot}}\\&= 11km\sqrt[3]{\frac{1,4}{2,5}}\\&= 9,067km\end{aligned}$$

La luminosité est donc

$$\begin{aligned}R &= 33,3R_\odot\sqrt{\frac{L}{1L_\odot}}\left(\frac{1000K}{T}\right)^2\\9067m &= 33,3R_\odot\sqrt{\frac{L}{1L_\odot}}\left(\frac{1000K}{1\,000\,000K}\right)^2\\3,914\times10^{-7} &= \sqrt{\frac{L}{1L_\odot}}\left(\frac{1}{1000}\right)^2\\0,3914 &= \sqrt{\frac{L}{1L_\odot}}\\L &= 0,157L_\odot\end{aligned}$$

b) La grandeur du champ gravitationnel est

$$\begin{aligned}g &= \frac{GM}{R^2}\\&= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot2\cdot1,9885\times10^{30}kg}{(9067m)^2}\\&= 3,229\times10^{12}\,\frac{N}{kg}\end{aligned}$$

c) La hauteur caractéristique de l'atmosphère est

$$\begin{aligned}H &= \frac{RT}{\mu g}\\&= \frac{8,31\frac{J}{molK}\cdot1\,000\,000K}{0,001\frac{kg}{mol}\cdot3,229\times10^{12}\,\frac{N}{kg}}\\&= 0,0026m\\&= 2,6mm\end{aligned}$$

14. Selon la conservation du moment cinétique, on a

$$\frac{R^2}{T} = \frac{R'^2}{T'}$$

$$\frac{\left(6,371\times10^{6}m\right)^2}{86\,400s} = \frac{\left(0,015m\right)^2}{T'}$$

$$T' = 4,79\times10^{-13}s$$

15. a) On trouve le rayon avec la troisième loi de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_c}$$

$$\left(7\,603\,200s\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}kg}$$

$$r = 5,803\times10^{10}m$$

b) La puissance est

$$\begin{aligned} P &= \frac{32G^4 m^2 M_c^3}{5c^5 r^5} \\ &= \frac{32\cdot\left(6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^4\left(3,3\times10^{23}kg\right)^2\left(2\times10^{30}kg\right)^3}{5\left(3\times10^{8}\,\frac{m}{s}\right)^5\left(5,803\times10^{10}m\right)^5} \\ &= 69,2W \end{aligned}$$

c) Le rythme de diminution est

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\frac{64G^3 m M_c^2}{5c^5 r^3} \\ &= -\frac{64\left(6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^3\left(3,3\times10^{23}kg\right)\left(2\times10^{30}kg\right)^2}{5\left(3\times10^{8}\,\frac{m}{s}\right)^5\left(5,803\times10^{10}m\right)^3} \\ &= -1,06\times10^{-20}\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

d) Le rythme de diminution est

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= -\frac{192\pi m}{5c^5}\sqrt{\frac{G^5 M_c^3}{r^5}}\\ &= -\frac{192\pi\left(3,3\times10^{23}kg\right)}{5\left(3\times10^8\frac{m}{s}\right)^5}\sqrt{\frac{\left(6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^5\left(2\times10^{30}kg\right)^3}{\left(5,803\times10^{10}m\right)^5}}\\ &= -2,08\times10^{-24}\end{aligned}$$

e) On va trouver la période en fonction du temps avec

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi}{5c^5}mM_c^{2/3}\left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3}$$

On a alors

$$T^{5/3}dT = -\frac{192\pi}{5c^5}mM_c^{2/3}\left(2\pi G\right)^{5/3}dt$$
$$\frac{3T^{8/3}}{8} + cst = -\frac{192\pi}{5c^5}mM_c^{2/3}\left(2\pi G\right)^{5/3}t$$

On trouve la constante en sachant qu'à $t = 0$, la période correspond à la période actuelle (qu'on va appeler T_0). On a donc

$$\frac{3T_0^{8/3}}{8} + cst = 0$$

Notre équation est donc

$$\frac{3T^{8/3}}{8} - \frac{3T_0^{8/3}}{8} = -\frac{192\pi}{5c^5}mM_c^{2/3}\left(2\pi G\right)^{5/3}t$$

On peut alors trouver le temps

$$\begin{aligned}&\frac{3\left(4\,320\,000s\right)^{8/3}}{8} - \frac{3\left(7\,603\,200s\right)^{8/3}}{8} =\\ &\qquad -\frac{192\pi\left(3,3\times10^{23}kg\right)\left(2\times10^{30}kg\right)^{2/3}\left(2\pi\cdot6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^{5/3}t}{5\left(3\times10^8\frac{m}{s}\right)^5}\\ &6,526\times10^{17}s^{8/3} = -6,110\times10^{-13}s^{5/3}\cdot t\\ &t = 1,06\times10^{30}s\\ &t = 3,38\times10^{22}ans\end{aligned}$$

16. a) On trouve la distance avec la troisième loi de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_{tot}}$$

$$\left(360\,000 s\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 10\times 10^{30} kg}$$

$$r = 1,2988\times 10^{10} m$$

b) La puissance est

$$\overline{P} = \frac{32 G^4 m_1^2 m_2^2 \left(m_1 + m_2\right)}{5 c^5 r^5}$$

$$= \frac{32 \cdot \left(6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)^4 \left(4\times 10^{30} kg\right)^2 \left(6\times 10^{30} kg\right)^3}{5\left(3\times 10^8 \frac{m}{s}\right)^5 \left(1,2988\times 10^{10} m\right)^5}$$

$$= 4,89\times 10^{20} W$$

c) Le rythme de diminution est

$$\overline{\left(\frac{dT}{dt}\right)} = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 \left(m_1 + m_2\right)^{1/3}} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3}$$

$$= \frac{192\pi \left(4\times 10^{30} kg\right)\left(6\times 10^{30} kg\right)}{5\left(3\times 10^8 \frac{m}{s}\right)^5 \left(10\times 10^{30} kg\right)^{1/3}} \left(\frac{2\pi \left(6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)}{\left(360\,000 s\right)}\right)^{5/3}$$

$$= 7,13\times 10^{-15}$$

d) On va trouver la période en fonction du temps avec

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 \left(m_1 + m_2\right)^{1/3}} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3}$$

On a alors

$$T^{5/3}dT = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5\left(m_1+m_2\right)^{1/3}}\left(2\pi G\right)^{5/3} dt$$

$$\frac{3T^{8/3}}{8} + cst = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5\left(m_1+m_2\right)^{1/3}}\left(2\pi G\right)^{5/3} t$$

On trouve la constante en sachant qu'à $t = 0$, la période correspond à la période actuelle (qu'on va appeler T_0). On a donc

$$\frac{3T_0^{8/3}}{8} + cst = 0$$

Notre équation est donc

$$\frac{3T^{8/3}}{8} - \frac{3T_0^{8/3}}{8} = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5\left(m_1+m_2\right)^{1/3}}\left(2\pi G\right)^{5/3} t$$

On peut alors trouver le temps

$$\frac{3\left(36\,000s\right)^{8/3}}{8} - \frac{3\left(360\,000s\right)^{8/3}}{8} =$$

$$-\frac{192\pi\left(4\times10^{30}kg\right)\left(6\times10^{30}kg\right)}{5\left(3\times10^{8}\tfrac{m}{s}\right)^{5}\left(10\times10^{30}kg\right)^{1/3}}\left(2\pi\left(6,674\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\right)\right)^{5/3} t$$

$$2,45\times10^{14}s^{8/3} = -1,299\times10^{-5}s^{5/3}\cdot t$$

$$t = 1,89\times10^{19}s$$

$$t = 599\times10^{9}ans$$

17. a) On trouve a avec la troisième loi de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_{tot}}$$

$$\left(36\,000s\right)^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{6,674\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot10\times10^{30}kg}$$

$$a = 2,798\times10^{9}m$$

b) La puissance est

$$\overline{P} = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 \left(m_1 + m_2\right)}{5c^5 a^5 \left(1-e^2\right)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right)$$

$$= \frac{32 \cdot \left(6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)^4 \left(4 \times 10^{30} kg\right)^2 \left(6 \times 10^{30} kg\right)^3}{5\left(3 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)^5 \left(2,798 \times 10^9 m\right)^5 \left(1 - 0,8^2\right)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} 0,8^2 + \frac{37}{96} 0,8^4\right)$$

$$= 3,762 \times 10^{25} W \cdot \frac{5821}{1875}$$

$$= 1,168 \times 10^{26} W$$

c) Le rythme de diminution est

$$\overline{\left(\frac{dT}{dt}\right)} = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 \left(m_1 + m_2\right)^{1/3} \left(1-e^2\right)^{7/2}} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right)$$

$$= \frac{192\pi \left(4 \times 10^{30} kg\right)\left(6 \times 10^{30} kg\right)}{5\left(3 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)^5 \left(10 \times 10^{30} kg\right)^{1/3} \left(1-e^2\right)^{7/2}} \left(\frac{2\pi \left(6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)}{36\,000 s}\right)^{5/3} \frac{5821}{1875}$$

$$= 3,671 \times 10^{-11}$$

e) On va trouver la période en fonction du temps avec

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 \left(m_1 + m_2\right)^{1/3} \left(1-e^2\right)^{7/2}} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right)$$

$$T^{5/3} dT = -k dt$$

où

$$k = \frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 \left(m_1 + m_2\right)^{1/3} \left(1-e^2\right)^{7/2}} \left(2\pi G\right)^{5/3} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right)$$

$$= \frac{192\pi \left(4 \times 10^{30} kg\right)\left(6 \times 10^{30} kg\right)}{5\left(3 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)^5 \left(10 \times 10^{30} kg\right)^{1/3} \left(1-0,8^2\right)^{7/2}} \left(2\pi \left(6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)\right)^{5/3} \frac{5821}{1875}$$

$$= 1,4408 \times 10^{-3} s^{5/3}$$

On a alors

$$\frac{3T^{8/3}}{8} + cst = -kt$$

On trouve la constante en sachant qu'à t = 0, la période correspond à la période actuelle (qu'on va appeler T_0). On a donc

$$\frac{3T_0^{8/3}}{8} + cst = 0$$

Notre équation est donc

$$\frac{3T^{8/3}}{8} - \frac{3T_0^{8/3}}{8} = -kt$$

On peut alors trouver le temps

$$\begin{aligned}
\frac{3(3\,600s)^{8/3}}{8} - \frac{3(36\,000s)^{8/3}}{8} &= -1,441\times10^{-3}s^{5/3}\cdot t \\
5,287\times10^{11}s^{8/3} &= -1,441\times10^{-3}s^{5/3}\cdot t \\
t &= 3,669\times10^{14}s \\
t &= 11,6\times10^{6}a
\end{aligned}$$

18. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}
R_S &= \frac{2GM}{c^2} \\
&= \frac{2\cdot 6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,98\times10^{24}kg}{\left(3\times10^{8}\frac{m}{s}\right)^2} \\
&= 8,87mm
\end{aligned}$$

19. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}
R_S &= 2,953\tfrac{km}{M_\odot}\times M \\
&= 2,953\tfrac{km}{M_\odot}\times 1M_\odot \\
&= 2,953km
\end{aligned}$$

Le rapport des temps est donc

$$\begin{aligned}\Delta t_{espace} &= \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r}}} \\ &= \frac{1an}{\sqrt{1-\frac{2,953km}{8km}}} \\ &= 1,259an\end{aligned}$$

20. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S &= 2,953\tfrac{km}{M_\odot}\times M \\ &= 2,953\tfrac{km}{M_\odot}\times 1M_\odot \\ &= 2,953km\end{aligned}$$

Le rapport des longueurs est donc

$$\begin{aligned}\Delta L_{espace} &= \Delta L\sqrt{1-\frac{R_S}{r}} \\ 50m &= \Delta L\sqrt{1-\frac{2,953km}{8km}} \\ \Delta L &= 62,95m\end{aligned}$$

21. L'angle de déviation est

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{4GM}{bc^2} \\ &= \frac{4\cdot 6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(2,19\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg\right)}{\left(1,73\cdot 6,955\times 10^{8}\,m\right)\cdot\left(3\times 10^{8}\,\frac{m}{s}\right)^2} \\ &= 1,07\times 10^{-5}\,rad \\ &= 2,21''\end{aligned}$$

22. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned} R_S &= 2,953 \tfrac{km}{M_\odot} \times M \\ &= 2,953 \tfrac{km}{M_\odot} \times 1 M_\odot \\ &= 2,953 km \end{aligned}$$

Le changement de longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned} \lambda_{espace} &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r}}} \\ &= \frac{450nm}{\sqrt{1-\frac{2,953km}{8km}}} \\ &= 567nm \end{aligned}$$

23. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned} R_S &= 2,953 \tfrac{km}{M_\odot} \times M \\ &= 2,953 \tfrac{km}{M_\odot} \times 2 M_\odot \\ &= 5,906 km \end{aligned}$$

Le changement de longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned} \lambda_{espace} &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r}}} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{5,906km}{13km}}} \\ &= 1,354 \cdot \lambda \end{aligned}$$

Le décalage est donc

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\lambda'}{\lambda} \\ &= \frac{1,354\lambda}{\lambda} \\ &= 1,354 \end{aligned}$$

24. La distance minimale d'approche est

$$\begin{aligned} r_{déchire} &= 320km \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)} \\ &= 320km \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{20M_{\odot}}{1M_{\odot}}\right)} \\ &= 869km \end{aligned}$$

Comme le rayon de Schwarzschild est de

$$\begin{aligned} R_S &= 2,953km \cdot \left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right) \\ &= 2,953km \cdot 20 \\ &= 59,06km \end{aligned}$$

La distance minimale d'approche est de 14,7 fois le rayon de Schwarzschild.

25. Ici on veut que

$$r_{déchire} < R_S$$

Cela donne

$$320km \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)} < 2,953km \cdot \left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)$$

Si on isole M, on arrive à

$$\begin{aligned} 108 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)} &< \left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right) \\ 108^3 \cdot \left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right) &< \left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)^3 \\ 108^3 &< \left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)^2 \\ 1128M_{\odot} &< M \end{aligned}$$

La masse minimale est donc de 1128 masses solaires.

26. La séquence principale se termine à une magnitude de 20. Déterminons premièrement à quelle magnitude absolue cela correspond

$$\begin{aligned} M &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ &= 20 + 5\log\left(\frac{32,62al}{33\,900al}\right) \\ &= 4,92 \end{aligned}$$

La luminosité de l'étoile qui vient juste de mourir est donc

$$\begin{aligned} M &= 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right) \\ 4,92 &= 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right) \\ L &= 0,851L_\odot \end{aligned}$$

La masse de cette étoile est donc

$$\begin{aligned} L &= M^{3,8} \\ 0,851 &= M^{3,8} \\ M &= 0,958 \end{aligned}$$

La durée de vie de cette étoile est donc

$$\begin{aligned} t_{vie} &= 10,9Ga \times \frac{M}{L} \\ &= 10,9Ga \times \frac{0,958}{0,851} \\ &= 12,3Ga \end{aligned}$$

L'amas a donc environ 12,3 milliards d'années.