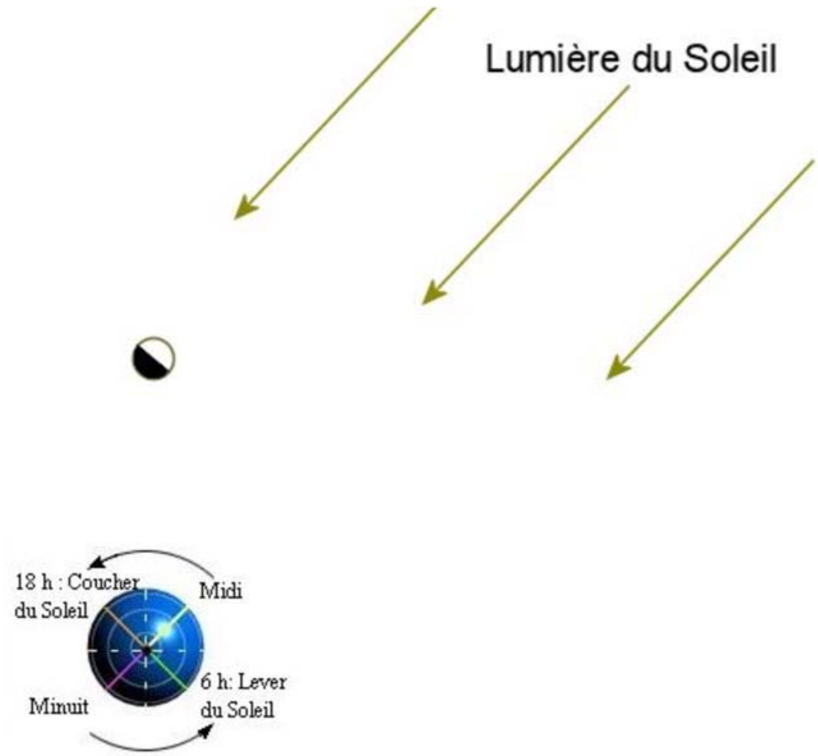
Solutionnaire du chapitre 12

1. On a la situation suivante



On commence à voir la Lune exactement entre 6 h et midi, donc à 9 h. On ne voit plus la Lune exactement entre 18 h et minuit, donc à 21 h. La Lune se lève donc à 9 h et se couche à 21 h.

2. La période sidérale est

$$\frac{1}{M_{sid}} = \frac{1}{14,56\,j} + \frac{1}{224,78\,j}$$
$$M_{sid} = 13,67\,j$$

3. La période synodique est

$$\frac{1}{5{,}877\,j} = \frac{1}{M_{syn}} - \frac{1}{60\,190\,j}$$
$$M_{syn} = 5{,}87642\,j$$

4. a) La distance est

$$\begin{aligned} D &= \frac{R_p}{\sin\left(\frac{t_e}{M_{syn}} 180° + d\right)} \\ &= \frac{8000\,km}{\sin\left(\frac{90\min}{14{,}56 \cdot 24 \cdot 60\min} 180° + \frac{1{,}45°}{2}\right)} \\ &= 306\,089 km \end{aligned}$$

b) On trouve la masse de Naboo avec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{Naboo}}}$$

Toutefois, il nous faut la période sidérale dans cette formule. On peut la trouver à partir de la période synodique avec

$$\frac{1}{M_{sid}} = \frac{1}{14{,}56\,j} + \frac{1}{224{,}78\,j}$$
$$M_{sid} = 13{,}67\,j$$

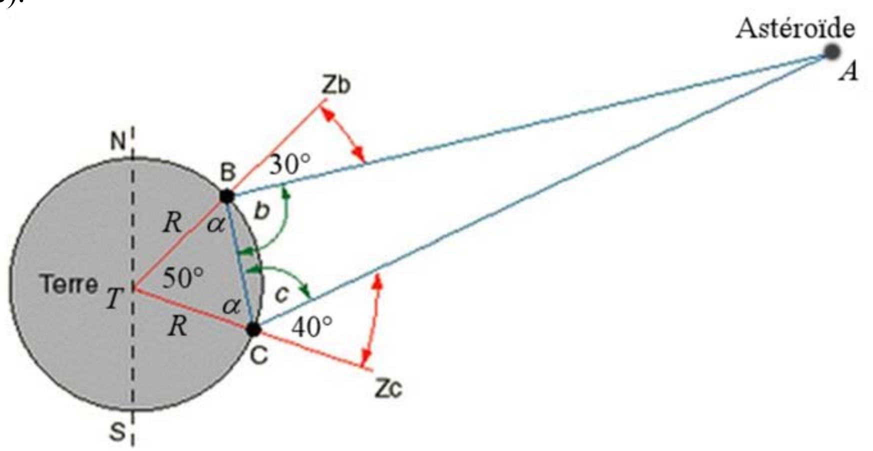
On a donc

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{Naboo}}} \\ 13{,}67 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(3{,}06089 \times 10^8 m\right)^3}{6{,}674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} M_{Naboo}}} \\ M_{Naboo} &= 1{,}215 \times 10^{25} kg \end{aligned}$$

c) Le champ à la surface de Naboo est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_{Naboo}}{R_{Naboo}^2} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,215\times10^{25}\,kg}{\left(8\times10^{6}\,m\right)^2} \\ &= 12,67\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

5. On va commencer par résoudre le triangle TBC (celui qui a un sommet au centre de la Terre).



C'est un triangle isocèle, ce qui signifie que les angles α sont égaux. On a donc

$$50° + \alpha + \alpha = 180°$$
$$\alpha = 65°$$

La distance entre les points B et C est

$$BC^2 = \left(6371km\right)^2 + \left(6371km\right)^2 - 2\cdot 6371km\cdot 6371km\cdot\cos 50°$$
$$BC = 5385km$$

La somme des trois angles au point B est de 180°. On a donc

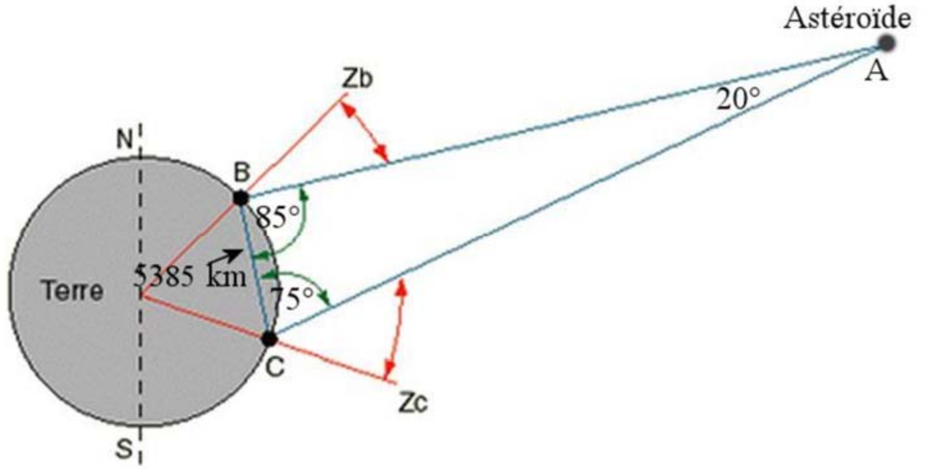
$$65° + b + 30° = 180\ °$$
$$b = 85°$$

La somme des angles au point C est aussi de 180°. On a donc

$$65° + c + 40° = 180\ °$$

$$c = 75°$$

On a maintenant la situation suivante.

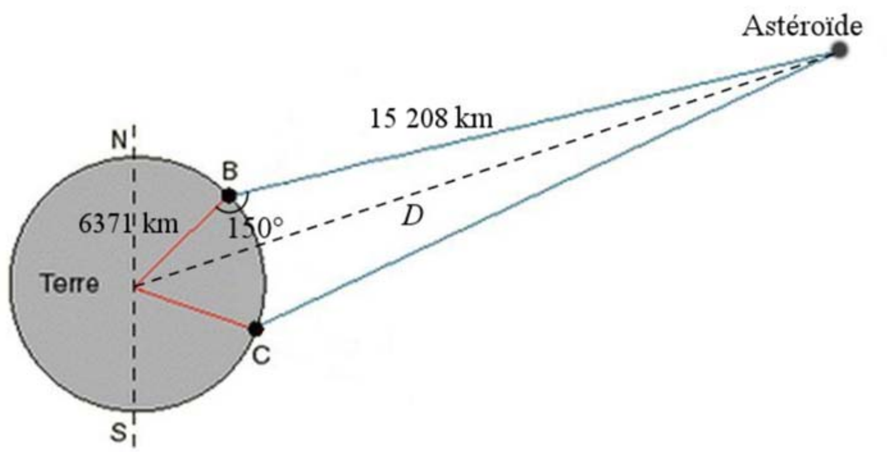


(On a trouvé l'angle de 20° en utilisant le fait que la somme du triangle ABC doit être de 180°.)

On peut maintenant trouver la distance entre le point B et l'astéroïde. (On aurait pu aussi trouver celle entre C et A). On la trouve avec la loi des sinus

$$\frac{5385km}{\sin(20°)} = \frac{x}{\sin(75°)}$$
$$x = 15\,208km$$

On a maintenant la situation suivante



(L'angle de 150° est la somme des angles de 85° et 65°.)

On peut donc trouver la distance *D* avec la loi des cosinus.

$$D^2 = (6371km)^2 + (15\,208km)^2 - 2\cdot 6371km \cdot 15\,208km \cdot \cos 150°$$
$$D = 20\,969km$$

6. L'énergie est

$$\begin{aligned} U_g &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \\ &= -\frac{3}{5}\cdot\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(7,34\times 10^{22}\,kg\right)^2}{1,737\times 10^6\,m} \\ &= -1,242\times 10^{29}\,J \end{aligned}$$

7. On aurait alors

$$\begin{aligned} d_{\oplus\odot} &= \frac{d_{\oplus☽}}{\cos\theta} \\ 2d_{\oplus☽} &= \frac{d_{\oplus☽}}{\cos\theta} \\ 2 &= \frac{1}{\cos\theta} \\ \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \theta &= 60° \end{aligned}$$

8. a) La force de marée faite par la Lune est

$$\vec{F}_{marées} = \frac{GMmR}{r^3}\left[2\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right]$$

À $\theta = 0°$, on a

$$\begin{aligned} \vec{F}_{marées} &= \frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times 10^{22}\,kg\cdot 60kg\cdot 6,371\times 10^6\,m}{\left(3,844\times 10^8\,m\right)^3}\left[2\cos 0°\vec{i} - \sin 0°\vec{j}\right] \\ &= 6,59\times 10^{-5}\,N\vec{i} \end{aligned}$$

C'est donc une force de 6,59 x 10^{-5} N dirigée vers le haut.

b) La force de marée faite par la Lune est

$$\vec{F}_{marées} = \frac{GMmR}{r^3}\left[2\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right]$$

À $\theta = 90°$, on a

$$\begin{aligned}\vec{F}_{marées} &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times10^{22}kg\cdot 60kg\cdot 6,371\times10^{6}m}{\left(3,844\times10^{8}m\right)^3}\left[2\cos 90°\vec{i} - \sin 90°\vec{j}\right]\\ &= -3,30\times10^{-5}N\vec{j}\end{aligned}$$

C'est donc une force de 3,30 x 10^{-5} N dirigée vers le sol.

c) La force de marée faite par la Lune est

$$F_{marées} = \frac{GMmR}{r^3}\left[2\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right]$$

À $\theta = 45°$, on a

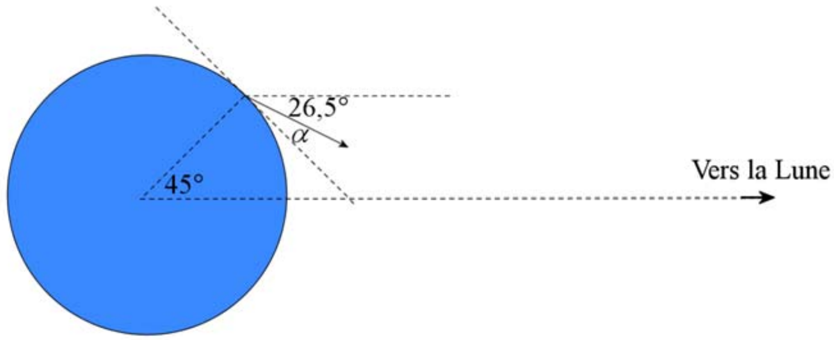
$$\begin{aligned}\vec{F}_{marées} &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times10^{22}kg\cdot 60kg\cdot 6,371\times10^{6}m}{\left(3,844\times10^{8}m\right)^3}\left[2\cos 45°\vec{i} - \sin 45°\vec{j}\right]\\ &= 4,662\times10^{-5}N\vec{i} - 2,331\times10^{-5}N\vec{j}\end{aligned}$$

La grandeur de cette force est

$$\begin{aligned}F_{marées} &= \sqrt{\left(4,662\times10^{-5}N\right)^2 + \left(-2,331\times10^{-5}N\right)^2}\\ &= 5,213\times10^{-5}N\end{aligned}$$

La direction de cette force est

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\frac{2,331\times10^{-5}N}{4,662\times10^{-5}N}\\ &= -26,57°\end{aligned}$$

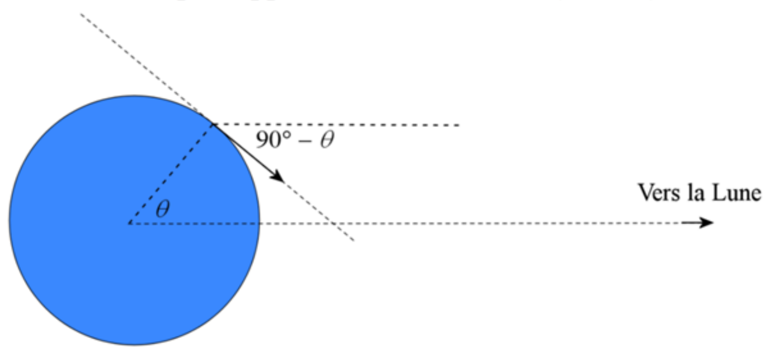


Comme à θ = 45° la surface est inclinée de 45° par rapport à l'axe des x (dirigé vers la Lune) et que la direction de la force est -26,57°, l'angle entre le sol et la force est

$$\begin{aligned} \alpha &= 45° - 26,57° \\ &= 18,43° \end{aligned}$$

C'est donc une force de 5,213 x 10^{-5} N dirigée à 18,43° vers le haut par rapport au sol.

9. À l'angle θ, l'inclinaison par rapport à l,axe des x est –(90° - θ).



La force doit donc être dans cette direction. Comme la direction de la force est donnée par

$$\tan(angle) = \frac{F_y}{F_x}$$

on peut écrire, en utilisant les priopriétés des fonctions trigonométriques,

$$\tan-\left(90°-\theta\right)=\frac{F_y}{F_x}$$

$$\frac{\sin-\left(90°-\theta\right)}{\cos-\left(90°-\theta\right)}=\frac{F_y}{F_x}$$

$$\frac{-\sin\left(90°-\theta\right)}{\cos\left(90°-\theta\right)}=\frac{F_y}{F_x}$$

$$\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{F_y}{F_x}$$

$$\frac{-1}{\tan\theta}=\frac{F_y}{F_x}$$

Avec les composante de la force de marée, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{-1}{\tan\theta}&=\frac{-\frac{GMmR}{r^3}\sin\theta}{\frac{GMmR}{r^3}2\cos\theta}\\&=\frac{-\sin\theta}{2\cos\theta}\\&=-\frac{1}{2}\tan\theta\end{aligned}$$

L'angle est donc

$$\frac{-1}{\tan\theta}=-\frac{1}{2}\tan\theta$$

$$2=\tan^2\theta$$

$$\theta=54,74°$$

10. La force de marée faite par la Lune est

$$F_{☽}=\frac{2GM_{☽}mR_{\oplus}}{r_{\oplus ☽}^3}$$

Alors que la force de marée faite par le Soleil est

$$F_{\odot}=\frac{2GM_{\odot}mR_{\oplus}}{r_{\oplus\odot}^3}$$

Le rapport est donc

$$\frac{F_{☽}}{F_{\odot}} = \frac{\left(\frac{2GM_{☽}mR_{\oplus}}{r_{\oplus☽}^3}\right)}{\left(\frac{2GM_{\odot}mR_{\oplus}}{r_{\oplus\odot}^3}\right)}$$

$$= \frac{r_{\oplus\odot}^3 M_{☽}}{r_{\oplus☽}^3 M_{\odot}}$$

$$= \frac{\left(1,496\times10^{11}m\right)^3 \cdot 7,34\times10^{22}kg}{\left(3,844\times10^{8}m\right)^3 \cdot 1,9885\times10^{30}kg}$$

$$= 2,176$$

11. On aurait alors

$$F_{marées} = 0,01mg$$

$$\frac{2GM_{☽}mR_{\oplus}}{r_{\oplus☽}^3} = 0,01mg$$

$$\frac{2\cdot 6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times10^{22}kg\cdot \cancel{m}\cdot 6,371\times10^{6}\text{m}}{r_{\oplus☽}^3} = 0,01\cancel{m}\cdot 9,8\frac{N}{kg}$$

$$\frac{2\cdot 6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times10^{22}kg\cdot 6,371\times10^{6}m}{r_{\oplus☽}^3} = 0,01\cdot 9,8\frac{N}{kg}$$

$$r_{\oplus☽} = 8604km$$

12. Les forces de marées de chaque côté de l'objet sont, selon l'exemple 12.9.2,

$$F_{marées} = \frac{GMmL}{4r^3}$$

On doit donc avoir

$$F_{marées} = \frac{GMmL}{4r^3}$$

$$100\,000N = \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(5\times1,9885\times10^{30}\,kg\right)\cdot 1kg\cdot 0,3m}{4r^3}$$

$$r = 79\,247m$$
$$= 79,247km$$

Comme le rayon de Schwarzschild est de

$$R_S = 2,953\,\frac{km}{M_\odot}\times 5M_\odot$$
$$= 14,765km$$

La distance de 79,247 km est donc de 5,37 fois le rayon de Schwarzschild

13. La distance est

$$r = 2,42285\sqrt[3]{\frac{\rho_p}{\rho_s}}R_p$$
$$= 2,42285\sqrt[3]{\frac{1408\,\frac{kg}{m^3}}{5427\,\frac{kg}{m^3}}}\cdot R_\odot$$
$$= 1,545R_\odot$$
$$= 1,545\cdot 695\,500km$$
$$= 1,075 \text{ million de km}$$

14. a) la distance entre les planètes se trouve avec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{tot}}}$$

$$864\,000s = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,1\times10^{25}kg}}$$

$$r = 2,403\times10^8 m$$

b) Au départ, il y a premièrement le moment cinétique de Stromgol dû à sa rotation sur elle-même. Ce moment cinétique est

$$\begin{aligned}
L_1 &= I\omega \\
&= \left(0,35 M_1 R_1^2\right)\omega \\
&= \left(0,35 \cdot 10^{25} kg \cdot \left(7,5\times 10^6 m\right)^2\right)\cdot\left(\frac{2\pi}{36\,000 s}\right) \\
&= 3,436\times 10^{34} \tfrac{kgm^2}{s}
\end{aligned}$$

Il y a ensuite le moment cinétique d'Ypp dû à sa rotation sur elle-même. Ce moment cinétique est

$$\begin{aligned}
L_2 &= I\omega \\
&= \left(0,35 M_2 R_2^2\right)\omega \\
&= \left(0,35 \cdot 10^{24} kg \cdot \left(3,5\times 10^6 m\right)^2\right)\cdot\left(\frac{2\pi}{7\,200 s}\right) \\
&= 3,742\times 10^{33} \tfrac{kgm^2}{s}
\end{aligned}$$

Finalement, il y a le moment cinétique provenant du mouvement orbital de Stromgoll et d'Ypp autour de leur centre de masse. Ce moment orbital est

$$\begin{aligned}
L_{orbital} &= M_1 M_2 \sqrt{\frac{Gr}{M_{tot}}} \\
&= 10^{24} kg \cdot 10^{25} kg \cdot \sqrt{\frac{6,674\times 10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2,403\times 10^8 m}{1,1\times 10^{25} kg}} \\
&= 3,818\times 10^{35} \tfrac{kgm^2}{s}
\end{aligned}$$

Le moment cinétique total est donc

$$\begin{aligned}
L &= L_1 + L_2 + L_{orbital} \\
&= 3,436\times 10^{34} \tfrac{kgm^2}{s} + 3,742\times 10^{33} \tfrac{kgm^2}{s} + 3,818\times 10^{35} \tfrac{kgm^2}{s} \\
&= 4,199\times 10^{35} \tfrac{kgm^2}{s}
\end{aligned}$$

c) Quand les deux planètes auront la même face tournée l'une vers l'autre, on aura

$$L' = M_1 M_2 \sqrt{\frac{Gr'}{M_{tot}}}$$

$$L' = M_1 M_2 \sqrt{\frac{Gr'}{M_{tot}}}$$

$$4,199\times 10^{35}\,\tfrac{kgm^2}{s} = 10^{24}kg \cdot 10^{25}kg \cdot \sqrt{\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot r'}{1,1\times 10^{25}kg}}$$

$$r' = 2,91\times 10^{8}m$$

Cette distance correspond à 1,21 fois la distance initiale. À ce moment, la période sera de

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{tot}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(2,91\times 10^{8}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,1\times 10^{25}kg}} \\ &= 1,149\times 10^{6}s \\ &= 13,3\,jours \end{aligned}$$

15. On a

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_c}{2M_{pert}}}\;r$$

$$1,496\times 10^{11}m = \sqrt[3]{\frac{1,9885\times 10^{30}kg}{2\cdot M_{pert}}}\;7,8\times 10^{11}m$$

$$M_{pert} = 1,41\times 10^{32}kg \approx 74\,000 M_{jupiter}$$