Solutionnaire du chapitre 10

1. La distance est

$$D_{(a.l.)} = \frac{3,262al}{\theta_{(\text{sec})}} = \frac{3,262al}{0,0394} = 82,8al$$

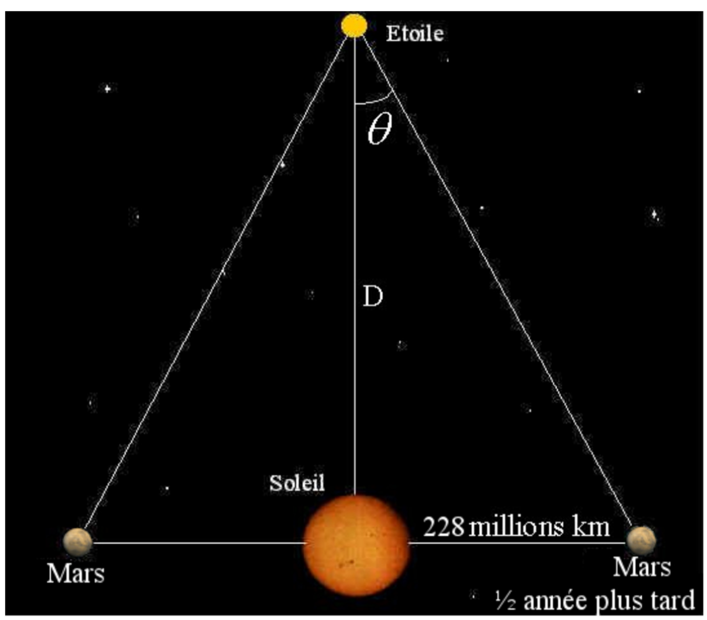
2. La parallaxe est

$$D_{(a.l.)} = \frac{1pc}{\theta_{(\text{sec})}}$$

$$73,6pc = \frac{1pc}{\theta_{(\text{sec})}}$$

$$\theta_{(\text{sec})} = 0,0136''$$

3. La triangulation se ferait alors avec l'orbite de Mars. On aurait alors la situation suivante.



www.astrosurf.com/voyager3/astro/unites.htm

On aurait alors

$$\tan\theta = \frac{2,28\times10^{11}m}{D}$$

En général, l'angle est très petit (le plus grand dépasse à peine 0,0002°). On peut donc utiliser l'approximation des petits angles

$$\tan\theta \approx \theta$$

où l'angle est en radian. On a donc

$$\theta_{(rad)} = \frac{2,28\times10^{11}m}{D}$$

$$D = \frac{2,28\times10^{11}m}{\theta_{(rad)}}$$

Généralement, on mesure l'angle en seconde d'arc, qui vaut 1/3600 degré (chaque degré est divisé en 60 minutes d'arc et chaque minute d'arc est divisé en 60 secondes d'arc). Aussi, on veut obtenir une réponse en année-lumière. On va donc transformer cette équation pour qu'on puisse utiliser les angles en secondes pour obtenir une distance en année-lumière.

Le lien entre l'angle en seconde et l'angle en radian est

$$\theta_{(rad)} = \theta_{(\sec)} \times \frac{1}{3600}\tfrac{\deg}{\sec} \times \frac{\pi}{180}\tfrac{rad}{\deg}$$

On divise l'angle en seconde par 3600 pour obtenir les degrés, puis on transforme les degrés en radian avec la fraction de droite dans l'équation.

On a donc

$$\begin{aligned} D &= \frac{2,28\times10^{11}m}{\theta_{(rad)}} \\ &= \frac{2,28\times10^{11}m}{\theta_{(\sec)} \times \frac{1}{3600}\tfrac{\deg}{\sec} \times \frac{\pi}{180}\tfrac{rad}{\deg}} \\ &= \frac{1}{\theta_{(\sec)}} \times \frac{2,28\times10^{11}m}{\frac{1}{3600}\tfrac{\deg}{\sec} \times \frac{\pi}{180}\tfrac{rad}{\deg}} \end{aligned}$$

En calculant la valeur du terme de droite, on obtient

$$D = \frac{4,7028 \times 10^{16} m}{\theta_{(\text{sec})}}$$

Le parsec aurait donc une longueur de 4,7028 x 10^{16} m.

La distance faite par la lumière pendant une année sur Mars est

$$\begin{aligned} D &= ct \\ &= 3 \times 10^{8} \tfrac{m}{s} \cdot (686,971 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s) \\ &= 1,7806 \times 10^{16} m \end{aligned}$$

Le nombre de parsecs par année-lumière est

$$\frac{4,7028 \times 10^{16} m}{1,7806 \times 10^{16} m} = 2,641$$

On aurait donc

1 pc = 2,641 al

au lieu de 1 pc = 3,262 al

4. La vitesse tangentielle est liée à la vitesse angulaire par

$$\omega = \frac{v_t}{D}$$

Puisque la distance est

$$D = \frac{1,496 \times 10^{11} m}{\theta}$$

On arrive donc à

$$\begin{aligned} v_t &= \omega D \\ &= 1,496 \times 10^{11} m \frac{\omega}{\theta} \end{aligned}$$

Dans cette formule, la vitesse angulaire est en radians par seconde et l'angle est en radians. Inutile de changer les radians en secondes d'arc puisqu'on fera ce changement en haut et en bas de la division et les facteurs de conversion s'annuleraient. Toutefois, il faut changer les secondes en années. On a alors

$$\begin{aligned} v_t &= \omega D \\ &= 1,496\times 10^{11} m \cdot \frac{1an}{365,25\cdot 24\cdot 60\cdot 60 s}\frac{\omega}{\theta} \\ &= 4740 \tfrac{m\,an}{s}\frac{\omega}{\theta} \\ &= 4,74 \tfrac{km\,an}{s}\frac{\omega}{\theta} \end{aligned}$$

5. On trouve la luminosité avec la formule suivante.

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}$$

$$1,29\times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} = \frac{L}{4\pi\left(16,7\times 9,46\times 10^{15} m\right)^2}$$

$$L = 4,046\times 10^{27} W$$

En luminosité solaire, cette luminosité est

$$4,046\times 10^{27} W\cdot \frac{1L_\odot}{3,828\times 10^{26} W} = 10,6 L_\odot$$

6. On trouve premièrement que l'intensité lumineuse est de

$$\begin{aligned} I &= 2,518\times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} 10^{-0,4 m_{bol}} \\ &= 2,518\times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} 10^{-0,4\cdot -0,90} \\ &= 5,768\times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

On trouve la luminosité avec la formule suivante

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}$$

$$5,768\times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} = \frac{L}{4\pi\left(863\times 9,46\times 10^{15} m\right)^2}$$

$$L = 4,831\times 10^{31} W$$

En luminosité solaire, cette luminosité est

$$4,831\times10^{31}W\cdot\frac{1L_{\odot}}{3,828\times10^{26}W}=126\ 211L_{\odot}$$

7. On trouve premièrement que l'intensité lumineuse est de

$$\begin{aligned}I&=2,518\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\,10^{-0,4m}\\&=2,518\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\,10^{-0,4\cdot-0,58}\\&=4,296\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\end{aligned}$$

On trouve ensuite la distance de l'étoile

$$\begin{aligned}D_{(a.l.)}&=\frac{3,262al}{\theta_{(\text{sec})}}\\&=\frac{3,262al}{0,089}\\&=36,65al\end{aligned}$$

On trouve ensuite la luminosité avec la formule suivante.

$$\begin{aligned}I&=\frac{L}{4\pi D^2}\\4,296\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}&=\frac{L}{4\pi\left(36,65\times9,46\times10^{15}m\right)^2}\\L&=6,490\times10^{28}W\end{aligned}$$

En luminosité solaire, cette luminosité est

$$6,490\times10^{28}W\cdot\frac{1L_{\odot}}{3,828\times10^{26}W}=170L_{\odot}$$

8. L'intensité minimale est

$$\begin{aligned} I &= 2,518\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\,10^{-0,4m} \\ &= 2,518\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\,10^{-0,4\cdot6} \\ &= 1,00\times10^{-10}\,\tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{L}{4\pi D^2} \\ 1,00\times10^{-10}\,\tfrac{W}{m^2} &= \frac{10^{11}\times3,828\times10^{26}W}{4\pi d^2} \\ d &= 1,743\times10^{23}m \end{aligned}$$

En année-lumière, cette distance est 18,43 millions d’années-lumière

9. La magnitude absolue est

$$\begin{aligned} M &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{L}\right) \\ &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{6,93L_\odot}\right) \\ &= 2,64 \end{aligned}$$

10. On a

$$\begin{aligned} M &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{L}\right) \\ -2,04 &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{L}\right) \\ L &= 515L_\odot \end{aligned}$$

11. On a

$$M = m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$4,7 = m + 5\log\left(\frac{32,62al}{326,2al}\right)$$
$$m = 9,7$$

12. a) On a

$$\begin{aligned} M &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ &= -0,851 + 5\log\left(\frac{32,62al}{139al}\right) \\ &= -4,0 \end{aligned}$$

b) On a

$$M = 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{L}\right)$$
$$-4,0 = 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{L}\right)$$
$$L = 3129L_\odot$$

13. On a

$$\begin{aligned} \overline{M_V} &= -2,43\log\left(\frac{P}{10j}\right) - 4,05 \\ &= -2,43\log\left(\frac{48j}{10j}\right) - 4,05 \\ &= -5,71 \end{aligned}$$

14. La magnitude absolue est

$$\begin{aligned}\overline{M_V} &= -2,43\log\left(\frac{P}{10j}\right)-4,05\\ &= -2,43\log\left(\frac{8j}{10j}\right)-4,05\\ &= -3,81\end{aligned}$$

Avec la magnitude, on trouve ensuite la distance

$$\begin{aligned}M_V &= m_V + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ -3,81 &= 2,72 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ D &= 661al\end{aligned}$$

15. Puisque c'est une étoile RR de la Lyre on va prendre une luminosité de $45\,L_\odot$. Avec une telle luminosité, la magnitude bolométrique absolue est

$$\begin{aligned}M_{bol} &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{L}\right)\\ &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{45L_\odot}\right)\\ &= 0,61\end{aligned}$$

On trouve finalement la distance avec la formule

$$\begin{aligned}M_{bol} &= m_{bol} + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ 0,61 &= 12,26 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ D &= 6974al\end{aligned}$$

16. a) La période est

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{tot}}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{\left(9\cdot 1,496\times 10^{11}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(2,7\cdot 1,9885\times 10^{30}kg\right)}} \\
&= 5,1854\times 10^8 s \\
&= 16,43 ans
\end{aligned}$$

b) Les rayons des orbites se trouvent avec ces deux équations.

$$r = r_1 + r_2$$
$$M_1 r_1 = M_2 r_2$$

On a donc

$$\begin{aligned}
9UA &= r_1 + r_2 \\
9UA &= r_1 + \frac{M_1 r_1}{M_2} \\
9UA &= r_1\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right) \\
9UA &= r_1\left(1 + \frac{1,8}{0,9}\right) \\
9UA &= 3r_1 \\
r_1 &= 3UA
\end{aligned}$$

De là, on trouve que

$$r_2 = 6UA$$

c) La vitesse de l'étoile de 1,8 $M_\odot$ est

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{M_2}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}} \\
&= \frac{0,9}{2,7}\sqrt{\frac{6,674\times 10^{-11}\,\tfrac{kgm^2}{s^2}\cdot\left(2,7\cdot 1,9885\times 10^{30}kg\right)}{9\cdot 1,496\times 10^{11}m}} \\
&= 5438\,\tfrac{m}{s}
\end{aligned}$$

La vitesse de l'étoile de 0,9 $M_\odot$ est

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{M_1}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}} \\ &= \frac{1,8}{2,7}\sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{kgm^2}{s^2}\cdot\left(2,7\cdot1,9885\times10^{30}\,kg\right)}{9\cdot1,496\times10^{11}\,m}} \\ &= 10\,876\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

N.B. On aurait pu aussi trouver ces vitesse avec

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2\pi r_1}{T} = \frac{2\pi\left(3\cdot1,496\times10^{11}\right)}{5,1854\times10^{8}\,s} = 5438\,\tfrac{m}{s} \\ v_2 &= \frac{2\pi r_2}{T} = \frac{2\pi\left(6\cdot1,496\times10^{11}\right)}{5,1854\times10^{8}\,s} = 10\,876\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

d) L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GM_1M_2}{2r} \\ &= -\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{kgm^2}{s^2}\cdot\left(0,9\cdot1,9885\times10^{30}\,kg\right)\left(1,8\cdot1,9885\times10^{30}\,kg\right)}{2\cdot\left(9\cdot1,496\times10^{11}\,m\right)} \\ &= -1,588\times10^{38}\,J \end{aligned}$$

17. On trouve la masse avec la formule suivante

$$\begin{aligned} M_{tot} &= \frac{4\pi^2r^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2\left(15\cdot1,496\times10^{11}\,m\right)^3}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\left(32\times365,25\times24\times60\times60\right)^2} \\ &= 6,555\times10^{30}\,kg \end{aligned}$$

En masse solaire, cette masse est

$$6,555\times10^{30}\,kg\cdot\frac{1M_\odot}{1,9885\times10^{30}\,kg} = 3,30M_\odot$$

18. On trouve la distance entre les étoiles avec

$$\theta_{(rad)} = \frac{r}{D}$$
$$\left(\frac{17,6}{3600}\right)^{\circ} \times \frac{2\pi rad}{360°} = \frac{r}{4,36al \times 9,46\times 10^{15}\,\frac{m}{al}}$$
$$r = 3,519\times 10^{12}\,m$$

La masse totale est donc

$$\begin{aligned} M_{tot} &= \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2\left(3,519\times 10^{12}\,m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\left(79,9\times 365,25\times 24\times 60\times 60\right)^2} \\ &= 4,055\times 10^{30}\,kg \end{aligned}$$

En masse solaire, cette masse est

$$4,055\times 10^{30}\,kg \cdot \frac{1M_{\odot}}{1,9885\times 10^{30}\,kg} = 2,04M_{\odot}$$

Notre première équation est donc

$$M_A + M_B = 2,04M_{\odot}$$

Avec l'équation du centre de masse, on a

$$M_A r_A = M_B r_B$$
$$M_A \theta_{A(rad)} D = M_B \theta_{B(rad)} D$$
$$M_A \theta_{A(rad)} = M_B \theta_{B(rad)}$$
$$M_A \left(\frac{\theta_{A('')}}{3600}\right)\frac{2\pi rad}{360°} = M_B \left(\frac{\theta_{B('')}}{3600}\right)\frac{2\pi rad}{360°}$$
$$M_A \theta_{A('')} = M_B \theta_{B('')}$$

On a donc

$$M_A\theta_{A('')} = M_B\theta_{B('')}$$
$$M_A \cdot 7,9 = M_B \cdot 9,7$$
$$M_A = M_B \cdot 1,2278$$

En utilisant ce résultat dans notre autre équation, on a

$$M_A + M_B = 2,04M_\odot$$
$$1,2278M_B + M_B = 2,04M_\odot$$
$$2,2278M_B = 2,04M_\odot$$
$$M_B = 0,92M_\odot$$

Ainsi, la masse de l'autre étoile est

$$M_A + M_B = 2,04M_\odot$$
$$M_A + 0,92M_\odot = 2,04M_\odot$$
$$M_A = 1,12M_\odot$$

19. a) Quand les étoiles sont au plus près l'une de l'autre, elles sont toutes les deux à leur périapside, de chaque côté du centre de masse.

L'étoile la plus massive a le plus petit demi-grand axe. Le demi grand-axe de Sirius A est donc de 6,433 UA. La distance entre le centre de masse et Sirius A à la périapside est alors

$$\begin{aligned} r_{pA} &= a_A(1-e) \\ &= 6,433UA(1-0,5923) \\ &= 2,623UA \end{aligned}$$

La distance entre le centre de masse et Sirius B est alors

$$\begin{aligned} r_{pB} &= a_B(1-e) \\ &= 13,268UA(1-0,5923) \\ &= 5,409UA \end{aligned}$$

La distance entre les deux étoiles est alors la somme de ces deux distances. Elle est donc de 8,032 UA.

b) Quand les étoiles sont au plus loin l'une de l'autre, elles sont toutes les deux à leur apoapside, de chaque côté du centre de masse.

La distance entre le centre de masse et Sirius A est alors

$$\begin{aligned} r_{aA} &= a_A(1+e) \\ &= 6,433UA(1-0,5923) \\ &= 10,243UA \end{aligned}$$

La distance entre le centre de masse et Sirius B est alors

$$\begin{aligned} r_{aB} &= a_B(1-e) \\ &= 13,268UA(1+0,5923) \\ &= 21,127UA \end{aligned}$$

La distance entre les deux étoiles est alors la somme de ces deux distances. Elle est donc de 31,37 UA.

c) On trouve la masse totale des étoiles avec la formule de la période. La valeur de *a* dans cette formule est la somme des deux demis grands axes, soit 19,701 UA.

On a donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{tot}}}$$

$$50,09\times 365,25\times 24\times 60\times 60s = 2\pi\sqrt{\frac{\left(19,701\cdot 1,496\times 10^{11}m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot M_{tot}}}$$

$$M_{tot} = 6,061\times 10^{30}kg$$

$$M_{tot} = 3,048M_{\odot}$$

On peut ensuite utiliser

$$\begin{aligned} M_A a_A &= M_B a_B \\ M_A\cdot 6,433 &= M_B\cdot 13,268 \\ M_A &= M_B\cdot 2,062 \end{aligned}$$

En utilisant ce résultat dans notre autre équation, on a

$$\begin{aligned} M_A + M_B &= 3,048 M_\odot \\ 2,062 M_B + M_B &= 3,048 M_\odot \\ 3,062 M_B &= 3,048 M_\odot \\ M_B &= 0,995 M_\odot \end{aligned}$$

Ainsi, la masse de l'étoile A est

$$\begin{aligned} M_A + M_B &= 3,048 M_\odot \\ M_A + 0,995 M_\odot &= 3,048 M_\odot \\ M_A &= 2,053 M_\odot \end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{\frac{GM_{tot}}{a}\frac{1-e}{1+e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 6,061\times10^{30}\,kg}{\left(19,701\cdot 1,496\times10^{11}\,m\right)}\frac{1-0,5923}{1+0,5923}} \\ &= 5928\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse de l'étoile de Sirius A est

$$\begin{aligned} v_{aA} &= \frac{M_B}{M_{tot}} v_a \\ &= \frac{0,995 M_\odot}{3,048 M_\odot} 5928\,\tfrac{m}{s} \\ &= 1935\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

et la vitesse de Sirius B est

$$\begin{aligned} v_{aB} &= \frac{M_A}{M_{tot}} v_a \\ &= \frac{2,053 M_\odot}{3,048 M_\odot} 5928\,\tfrac{m}{s} \\ &= 3993\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

e) L'énergie mécanique de ce système est

$$\begin{aligned}E &= -\frac{GM_A M_B}{2a}\\ &= -\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(0,995\cdot1,9885\times10^{30}\,kg\right)\cdot\left(2,053\cdot1,9885\times10^{30}\,kg\right)}{2\cdot\left(19,701\cdot1,496\times10^{11}\,m\right)}\\ &= -9,145\times10^{37}\,J\end{aligned}$$

20. Quand les étoiles sont au plus près l'une de l'autre, elles sont toutes les deux à leur périapside, de chaque côté du centre de masse.

La distance entre le centre de masse et procyon A est alors

$$r_{pA} = a_A\left(1-e\right)$$

La distance entre le centre de masse et Procyon B est alors

$$r_{pB} = a_B\left(1-e\right)$$

La somme de ces distances est

$$\begin{aligned}r_p &= r_{pA} + r_{pB}\\ &= a_A\left(1-e\right) + a_B\left(1-e\right)\\ &= \left(a_A + a_B\right)\left(1-e\right)\\ &= a\left(1-e\right)\end{aligned}$$

Ainsi, la valeur de *a* est

$$\begin{aligned}r_p &= a\left(1-e\right)\\ 9,004UA &= a\left(1-0,407\right)\\ a &= 15,184UA\end{aligned}$$

On trouve la masse totale des étoiles avec la formule de la période. On a donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{tot}}}$$

$$40,82\times 365,25\times 24\times 60\times 60 s = 2\pi\sqrt{\frac{\left(15,184\cdot 1,496\times 10^{11} m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot M_{tot}}}$$

$$M_{tot} = 4,178\times 10^{30} kg$$

$$M_{tot} = 2,101 M_\odot$$

Puisque le centre de masse est immobile, on doit avoir

$$M_A v_A = M_B v_B$$

$$M_A \cdot v_A = M_B \cdot 2,5 v_A$$

$$M_A = M_B \cdot 2,5$$

En utilisant ce résultat dans notre autre équation, on a

$$M_A + M_B = 2,101 M_\odot$$

$$2,5 M_B + M_B = 2,101 M_\odot$$

$$3,5 M_B = 2,101 M_\odot$$

$$M_B = 0,600 M_\odot$$

Ainsi, la masse de l'étoile A est

$$M_A + M_B = 2,101 M_\odot$$

$$M_A + 0,600 M_\odot = 2,101 M_\odot$$

$$M_A = 1,501 M_\odot$$

21. On trouve le diamètre à partir

$$\theta_{(rad)} = \frac{diamètre}{D}$$

Pour calculer le diamètre, il nous faut donc la distance de l'étoile. Cette distance est

$$D_{(a.l.)} = \frac{3,262 al}{\theta_{(\sec)}}$$

$$= \frac{3,262 al}{0,00589}$$

$$= 553,8 al$$

Le diamètre est donc

$$\theta_{(rad)} = \frac{diamètre}{D}$$

$$\left(\frac{0,0373}{3600}\right)^{\circ} \cdot \frac{\pi rad}{180°} = \frac{diamètre}{553,8 \cdot 9,46 \times 10^{15} m}$$

$$diamètre = 9,474 \times 10^{11} m$$

$$diamètre = 1361 R_{\odot}$$

22. a) On trouve le diamètre avec la formule

$$\theta_{(rad)} = \frac{diamètre}{D}$$

Pour le trouver, il nous faut l'angle et la distance. La largeur angulaire de l'étoile est

$$\begin{aligned}\theta &= 1,33\frac{\lambda}{d} \\ &= 1,33\frac{5\times10^{-6}m}{317m} \\ &= 2,098\times10^{-8} rad\end{aligned}$$

La distance est

$$\begin{aligned}D_{(a.l.)} &= \frac{3,262al}{\theta_{(\sec)}} \\ &= \frac{3,262al}{0,0023} \\ &= 1418al\end{aligned}$$

Le diamètre est donc

$$\theta_{(rad)} = \frac{diamètre}{D}$$

$$2,098 \times 10^{-8} rad = \frac{diamètre}{1418 \cdot 9,46 \times 10^{15} m}$$

$$diamètre = 2,815 \times 10^{11} m$$

$$diamètre = 404,5 R_{\odot}$$

$$rayon = 202,3 R_{\odot}$$

23. a) La durée de vie est

$$\begin{aligned} t_{vie} &= 10,9Ga \frac{M}{1M_{\odot}} \cdot \frac{1L_{\odot}}{L} \\ &= 10,9Ga \frac{1,92M_{\odot}}{1M_{\odot}} \cdot \frac{1L_{\odot}}{16,6L_{\odot}} \\ &= 10,9Ga \frac{1,92}{16,6} \\ &= 1,26Ga \end{aligned}$$

b) La durée de vie est

$$\begin{aligned} t_{vie} &= 10,9Ga \frac{M}{1M_{\odot}} \cdot \frac{1L_{\odot}}{L} \\ &= 10,9Ga \frac{0,144M_{\odot}}{1M_{\odot}} \cdot \frac{1L_{\odot}}{0,0035L_{\odot}} \\ &= 10,9Ga \frac{0,144}{0,0035} \\ &= 448Ga \end{aligned}$$

c) La durée de vie est

$$\begin{aligned}
t_{vie} &= 10{,}9Ga\frac{M}{1M_\odot}\cdot\frac{1L_\odot}{L}\\
&= 10{,}9Ga\frac{18M_\odot}{1M_\odot}\cdot\frac{1L_\odot}{126\,000L_\odot}\\
&= 10{,}9Ga\frac{18}{126\,000}\\
&= 1{,}56\times10^{-3}Ga\\
&= 1{,}56Ma
\end{aligned}$$

24. a) La durée de vie de l'étoile est

$$\begin{aligned}
t_{vie} &= 10{,}9Ga\frac{M}{1M_\odot}\cdot\frac{1L_\odot}{L}\\
&= 10{,}9Ga\frac{18M_\odot}{1M_\odot}\cdot\frac{1L_\odot}{60\,000L_\odot}\\
&= 10{,}9Ga\frac{18}{60\,000}\\
&= 3{,}27\times10^{-3}Ga\\
&= 3{,}27Ma
\end{aligned}$$

L'énergie libérée par la fusion pour cette étoile est donc

$$\begin{aligned}
E &= L\cdot t_{vie}\\
&= \left(60\,000\cdot3{,}828\times10^{26}W\right)\cdot\left(3{,}27\times10^{6}\cdot365{,}25\cdot24\cdot60\cdot60s\right)\\
&= 2{,}37\times10^{45}J
\end{aligned}$$

On trouve la masse qui fusionne avec le rendement de la fusion de l'hydrogène.

$$\begin{aligned}
E &= R\cdot M\\
2{,}37\times10^{45}J &= 6{,}397\times10^{14}\tfrac{J}{kg}\cdot M\\
M &= 3{,}7\times10^{30}kg
\end{aligned}$$

Le pourcentage de la masse de l'étoile qui a fusionné est donc

$$\frac{3{,}7\times10^{30}kg}{18\cdot1{,}9885\times10^{30}kg} = 0{,}104 = 10{,}4\%$$

b) La durée de vie de l'étoile est

$$t_{vie} = 10,9Ga \frac{M}{1M_\odot} \cdot \frac{1L_\odot}{L}$$

L'énergie libérée par la fusion pour cette étoile est donc

$$E = L \cdot t_{vie}$$

On trouve la masse qui fusionne avec le rendement de la fusion de l'hydrogène.

$$\begin{aligned} E &= R \cdot M_{fusionn\acute{e}e} \\ M_{fusionn\acute{e}e} &= \frac{E}{R} \\ M_{fusionn\acute{e}e} &= \frac{Lt_{vie}}{R} \end{aligned}$$

Le pourcentage de la masse de l'étoile qui a fusionné est donc

$$\begin{aligned} \frac{M_{fusionn\acute{e}e}}{M} &= \frac{1}{M}\frac{Lt_{vie}}{R} \\ &= \frac{1}{M}\frac{L}{R} 10,9Ga \frac{M}{1M_\odot} \cdot \frac{1L_\odot}{L} \\ &= \frac{1}{R} 10,9Ga \frac{1L_\odot}{1M_\odot} \end{aligned}$$

Avec les valeurs, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{M_{fusionn\acute{e}e}}{M} &= \frac{1}{6,397 \times 10^{14} \frac{J}{kg}} 10,9Ga \frac{3,828 \times 10^{26} W}{1,9885 \times 10^{30} kg} \\ &= 3,0093 \times 10^{-19} \tfrac{1}{s} \cdot 10,9Ga \\ &= 3,0093 \times 10^{-19} \tfrac{1}{s} \cdot 3,4398 \times 10^{17} s \\ &= 0,104 \end{aligned}$$

25. La baisse relative d'intensité est

$$\begin{aligned}\frac{\Delta I}{I} &= \frac{R_{planète}^2}{R_{étoile}^2}\\ &= \frac{(6371km)^2}{(695700km)^2}\\ &= 8,386\times10^{-5}\\ &= 0,008386\%\end{aligned}$$

26. a) On trouve la taille de la planète avec la formule de baisse d'intensité

$$\begin{aligned}\frac{\Delta I}{I} &= \frac{R_{planète}^2}{R_{étoile}^2}\\ 0,005 &= \frac{R_{planète}^2}{(1,1\cdot 695700km)^2}\\ R_{planète} &= 5,411\times10^7 m\\ R_{planète} &= 8,49R_{\oplus}\end{aligned}$$

b) On trouve le demi-grand axe de l'orbite avec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{étoile}}}$$

On a alors

$$\begin{aligned}(3,2\cdot 365,25\cdot 24\cdot 60\cdot 60s) &= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\left(1,2\cdot 1,9885\times10^{30}kg\right)}}\\ a &= 3,452\times10^{11}m\end{aligned}$$

Comme une unité astronomique est de 1,496 x 10^{11} m, cette distance est de 2,31 UA.