Solutionnaire du chapitre 10

1. On trouve l'énergie libérée à partir des masses avec

$$Q = \left(m_{avant} - m_{après}\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u}$$

a) On a

$$\begin{aligned}
Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(\left(m_C + m_{He}\right) - \left(m_O\right)\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(\left(12,000\ 000\ u + 4,002\ 603\ u\right) - \left(15,994\ 915\ u\right)\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(0,007\ 688\ \text{u}\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\
&= 7,16 MeV
\end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(\left(m_C + m_{He}\right) - \left(m_O\right)\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(\left(15,994\ 915\ u\ u + 4,002\ 603\ u\right) - \left(19,992\ 440\ u\right)\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(0,005\ 078\ \text{u}\right) \times 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\
&= 4,73 MeV
\end{aligned}$$

2. La luminosité sera

$$\begin{aligned}
L &= \sigma 4\pi R^2 T^4 \\
&= 5,67 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2 K^4} \cdot 4\pi \cdot \left(55 \cdot 6,955 \times 10^8 m\right)^2 \left(3700K\right)^4 \\
&= 1,954 \times 10^{29} W \\
&= 510 L_\odot
\end{aligned}$$

3. Le rapport des luminosités est

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)}$$

Si l'étoile est 10 000 fois plus lumineuse, alors on a $I_2 = 10\,000\ I_1$. On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10\,000} &= 10^{0,4(m_2 - m_1)} \\
10^{-4} &= 10^{0,4(m_2 - m_1)} \\
-4 &= 0,4(m_2 - m_1) \\
-10 &= m_2 - m_1 \\
m_2 &= m_1 - 10
\end{aligned}$$

Cela signifie que la magnitude baisse de 10.

4. Puisque la sphère de matière est passée d'un rayon nul à un rayon de 8'' d'arc en 8 ans, ω est 1''/an. En radian par seconde, ω est

$$\begin{aligned}
\omega &= 1''/\,an \\
&= \left(\frac{1}{3600}\right)\frac{^\circ}{an} \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} \cdot \frac{1an}{365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60s} \\
&= 1,536 \times 10^{-14}\ \tfrac{rad}{s}
\end{aligned}$$

La distance est donc de

$$\begin{aligned}
D &= \frac{v}{\omega_{(rad/s)}} \\
&= \frac{1700 \times 10^3\ \frac{m}{s}}{1,536 \times 10^{-13}\ \frac{rad}{s}} \\
&= 1,107 \times 10^{19} m \\
&= 1170 a.l.
\end{aligned}$$

5. Sachant que la magnitude absolue de la supernova est de -19,6, on trouve la distance avec

$$M = m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$-19,6 = 8,9 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$D = 16,3Mal$$

6. La limite de visibilité étant d'une magnitude de 6, on trouve la distance maximale avec

$$M = m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$-19,6 = 6 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$D = 4,3Mal$$

7. Selon la conservation du moment cinétique, on a

$$\frac{R^2}{T} = \frac{R'^2}{T'}$$
$$\frac{\left(6,378\times10^6 m\right)^2}{86\,400s} = \frac{\left(0,015m\right)^2}{T'}$$
$$T' = 4,78\times10^{-13}s$$

8. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned} R_S &= \frac{2GM}{c^2} \\ &= \frac{2\cdot 6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,98\times10^{24}kg}{\left(3\times10^8\,\frac{m}{s}\right)^2} \\ &= 8,87mm \end{aligned}$$

9. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned} R_S &= 2{,}953\,\tfrac{km}{M_\odot}\times M \\ &= 2{,}953\,\tfrac{km}{M_\odot}\times 1M_\odot \\ &= 2{,}953km \end{aligned}$$

Le rapport des temps est donc

$$\begin{aligned} \Delta t_{espace} &= \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r}}} \\ &= \frac{1an}{\sqrt{1-\frac{2{,}953km}{8km}}} \\ &= 1{,}259an \end{aligned}$$

10. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned} R_S &= 2{,}953\,\tfrac{km}{M_\odot}\times M \\ &= 2{,}953\,\tfrac{km}{M_\odot}\times 1M_\odot \\ &= 2{,}953km \end{aligned}$$

Le rapport des longueurs est donc

$$\begin{aligned} \Delta L_{espace} &= \Delta L\sqrt{1-\frac{R_S}{r}} \\ 50m &= \Delta L\sqrt{1-\frac{2{,}953km}{8km}} \\ \Delta L &= 62{,}95m \end{aligned}$$

11. L'angle de déviation est

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{4GM}{bc^2} \\ &= \frac{4 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \left(2,19 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg\right)}{\left(1,73 \cdot 6,955 \times 10^8 m\right) \cdot \left(3 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)^2} \\ &= 1,07 \times 10^{-5} rad \\ &= 2,21''\end{aligned}$$

12. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S &= 2,953 \tfrac{km}{M_\odot} \times M \\ &= 2,953 \tfrac{km}{M_\odot} \times 1 M_\odot \\ &= 2,953 km\end{aligned}$$

Le changement de longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned}\lambda_{espace} &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}} \\ &= \frac{450nm}{\sqrt{1 - \frac{2,953km}{8km}}} \\ &= 567nm\end{aligned}$$

13. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S &= 2,953 \tfrac{km}{M_\odot} \times M \\ &= 2,953 \tfrac{km}{M_\odot} \times 2 M_\odot \\ &= 5,906 km\end{aligned}$$

Le changement de longueur d'onde est donc

$$\lambda_{espace} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r}}}$$
$$= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{5,906km}{13km}}}$$
$$= 1,354 \cdot \lambda$$

Le décalage est donc

$$\delta = \frac{\lambda'}{\lambda}$$
$$= \frac{1,354\lambda}{\lambda}$$
$$= 1,354$$

14. La séquence principale se termine à une magnitude de 20. Déterminons premièrement à quelle magnitude absolue cela correspond

$$M = m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$= 20 + 5\log\left(\frac{32,62al}{33\,900al}\right)$$
$$= 4,92$$

La luminosité de l'étoile qui vient juste de mourir est donc

$$M = 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right)$$
$$4,92 = 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right)$$
$$L = 0,851L_\odot$$

La masse de cette étoile est donc

$$L = M^{3,8}$$
$$0,851 = M^{3.8}$$
$$M = 0,958$$

La durée de vie de cette étoile est donc

$$\begin{aligned} t_{vie} &= 10,9Ga \times \frac{M}{L} \\ &= 10,9Ga \times \frac{0,958}{0,851} \\ &= 12,3Ga \end{aligned}$$

L’amas a donc environ 12,3 milliards d’années.