Solutionnaire du chapitre 10

1. On trouve l'énergie libérée à partir des masses avec

$$Q = \left(m_{avant} - m_{après}\right) \times 931,5\,\tfrac{MeV}{u}$$

a) On a

$$\begin{aligned}
Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right) \times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(\left(m_C + m_{He}\right) - \left(m_O\right)\right) \times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(\left(12,000\ 000\ u + 4,002\ 603\ u\right) - \left(15,994\ 915\ u\right)\right) \times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(0,007\ 688\ \mathrm{u}\right) \times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= 7,16 MeV
\end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right) \times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(\left(m_C + m_{He}\right) - \left(m_O\right)\right) \times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(\left(15,994\ 915\ u\ \ u + 4,002\ 603\ u\right) - \left(19,992\ 440\ u\right)\right) \times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= \left(0,005\ 078\ \mathrm{u}\right) \times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\
&= 4,73 MeV
\end{aligned}$$

2. La luminosité sera

$$\begin{aligned}
L &= \sigma 4\pi R^2 T^4 \\
&= 5,67 \times 10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2K^4} \cdot 4\pi \cdot \left(55 \cdot 6,955 \times 10^8 m\right)^2 \left(3700K\right)^4 \\
&= 1,954 \times 10^{29} W \\
&= 510 L_{\odot}
\end{aligned}$$

3. Le rapport des luminosités est

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)}$$

Si l'étoile est 10 000 fois plus lumineuse, alors on a $I_2 = 10\,000\, I_1$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{10\,000} &= 10^{0,4(m_2 - m_1)} \\ 10^{-4} &= 10^{0,4(m_2 - m_1)} \\ -4 &= 0,4\left(m_2 - m_1\right) \\ -10 &= m_2 - m_1 \\ m_2 &= m_1 - 10 \end{aligned}$$

Cela signifie que la magnitude baisse de 10.

4. Puisque la sphère de matière est passée d'un rayon nul à un rayon de 8'' d'arc en 8 ans, ω est 1''/an. En radian par seconde, ω est

$$\begin{aligned} \omega &= 1''/\,an \\ &= \left(\frac{1}{3600}\right)\frac{\circ}{an} \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} \cdot \frac{1an}{365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s} \\ &= 1,536 \times 10^{-14}\ \tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

La distance est donc de

$$\begin{aligned} D &= \frac{v}{\omega_{(rad/s)}} \\ &= \frac{1700 \times 10^3\ \frac{m}{s}}{1,536 \times 10^{-13}\ \frac{rad}{s}} \\ &= 1,107 \times 10^{19} m \\ &= 1170 a.l. \end{aligned}$$

5. Sachant que la magnitude absolue de la supernova est de -19,6, on trouve la distance avec

$$M = m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$-19,6 = 8,9 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$D = 16,3Mal$$

6. La limite de visibilité étant d'une magnitude de 6, on trouve la distance maximale avec

$$M = m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$-19,6 = 6 + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)$$
$$D = 4,3Mal$$

7. a) L'énergie gravitationnelle est

$$\begin{aligned} U &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \\ &= -\frac{3}{5}\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\left(2\times10^{30}\,kg\right)^2}{5,5\times10^6\,m} \\ &= -2,9\times10^{43}\,J \end{aligned}$$

b) L'énergie libérée par une réaction

$$14\,{}^{12}_{6}C \rightarrow 3\,{}^{56}_{26}Fe + 6e^+$$

est

$$\begin{aligned} Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(14\cdot 12u - 3\cdot 55,9349375u\right)\times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(168u - 167,8048125u\right)\times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(0,1951875u\right)\times 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= 181,82MeV \end{aligned}$$

Pour trouver le nombre de réaction, trouvons le nombre d'atome de carbone 12. Ce nombre est

$$N_C = \frac{2\times 10^{30} kg}{0{,}012 \frac{g}{mol}} 6{,}02\times 10^{23} \tfrac{atomes}{mol} = 1{,}00\times 10^{56}$$

Comme il faut 14 atomes de carbone pour faire 1 réaction, le nombre de réaction est

$$N = \frac{N_C}{14} = \frac{1{,}00\times 10^{56}}{14} = 7{,}17\times 10^{54}$$

Puisque chaque réaction donne 181,82 MeV, on a

$$\begin{aligned} E &= 7{,}17\times 10^{54} \cdot 181{,}82 MeV \\ &= 7{,}17\times 10^{54} \cdot 181{,}82 MeV \cdot 1{,}602\times 10^{-13} \tfrac{J}{MeV} \\ &= 2{,}09\times 10^{44} J \end{aligned}$$

c) La somme des deux énergies

$$\begin{aligned} E &= U_g + Q \\ &= -2{,}9\times 10^{43} J + 2{,}09\times 10^{44} J \\ &= 1{,}8\times 10^{44} J \end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, il y a assez d'énergie pour disperser l'étoile.

8. Selon la conservation du moment cinétique, on a

$$\frac{R^2}{T} = \frac{R'^2}{T'}$$

$$\frac{\left(6{,}371\times 10^6 m\right)^2}{86\,400 s} = \frac{\left(0{,}015 m\right)^2}{T'}$$

$$T' = 4{,}79\times 10^{-13} s$$

9. a) On trouve le rayon avec la troisième loi de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_c}$$

$$\left(7\,603\,200 s\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}\,kg}$$

$$r = 5,803\times10^{10}\,m$$

b) La puissance est

$$\begin{aligned}
P &= \frac{32G^4 m^2 M_c^3}{5c^5 r^5} \\
&= \frac{32\cdot\left(6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^4\left(3,3\times10^{23}\,kg\right)^2\left(2\times10^{30}\,kg\right)^3}{5\left(3\times10^8\,\frac{m}{s}\right)^5\left(5,803\times10^{10}\,m\right)^5} \\
&= 69,2W
\end{aligned}$$

c) Le rythme de diminution est

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= -\frac{64G^3 m M_c^2}{5c^5 r^3} \\
&= -\frac{64\left(6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^3\left(3,3\times10^{23}\,kg\right)\left(2\times10^{30}\,kg\right)^2}{5\left(3\times10^8\,\frac{m}{s}\right)^5\left(5,803\times10^{10}\,m\right)^3} \\
&= -1,06\times10^{-20}\,\frac{m}{s}
\end{aligned}$$

d) Le rythme de diminution est

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= -\frac{192\pi m}{5c^5}\sqrt{\frac{G^5 M_c^3}{r^5}} \\
&= -\frac{192\pi\left(3,3\times10^{23}\,kg\right)}{5\left(3\times10^8\,\frac{m}{s}\right)^5}\sqrt{\frac{\left(6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^5\left(2\times10^{30}\,kg\right)^3}{\left(5,803\times10^{10}\,m\right)^5}} \\
&= -2,08\times10^{-24}
\end{aligned}$$

e) On va trouver la période en fonction du temps avec

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi}{5c^5} m M_c^{2/3}\left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3}$$

On a alors

$$T^{5/3}dT = -\frac{192\pi}{5c^5} mM_c^{2/3} \left(2\pi G\right)^{5/3} dt$$

$$\frac{3T^{8/3}}{8} + cst = -\frac{192\pi}{5c^5} mM_c^{2/3} \left(2\pi G\right)^{5/3} t$$

On trouve la constante en sachant qu'à $t = 0$, la période correspond à la période actuelle (qu'on va appeler T_0). On a donc

$$\frac{3T_0^{8/3}}{8} + cst = 0$$

Notre équation est donc

$$\frac{3T^{8/3}}{8} - \frac{3T_0^{8/3}}{8} = -\frac{192\pi}{5c^5} mM_c^{2/3} \left(2\pi G\right)^{5/3} t$$

On peut alors trouver le temps

$$\frac{3\left(4\,320\,000s\right)^{8/3}}{8} - \frac{3\left(7\,603\,200s\right)^{8/3}}{8} =$$

$$-\frac{192\pi\left(3,3\times10^{23}kg\right)\left(2\times10^{30}kg\right)^{2/3}\left(2\pi\cdot 6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^{5/3} t}{5\left(3\times10^8\frac{m}{s}\right)^5}$$

$$6,526\times10^{17}s^{8/3} = -6,110\times10^{-13}s^{5/3}\cdot t$$

$$t = 1,06\times10^{30}s$$

$$t = 3,38\times10^{22}ans$$

10. a) On trouve la distance avec la troisième loi de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_{tot}}$$

$$\left(360\,000s\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 10\times10^{30}kg}$$

$$r = 1,2988\times10^{10}m$$

b) La puissance est

$$\overline{P} = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 \left(m_1 + m_2\right)}{5c^5 r^5}$$
$$= \frac{32 \cdot \left(6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)^4 \left(4 \times 10^{30} kg\right)^2 \left(6 \times 10^{30} kg\right)^3}{5\left(3 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)^5 \left(1,2988 \times 10^{10} m\right)^5}$$
$$= 4,89 \times 10^{20} W$$

c) Le rythme de diminution est

$$\overline{\left(\frac{dT}{dt}\right)} = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 \left(m_1 + m_2\right)^{1/3}} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3}$$
$$= \frac{192\pi \left(4 \times 10^{30} kg\right)\left(6 \times 10^{30} kg\right)}{5\left(3 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)^5 \left(10 \times 10^{30} kg\right)^{1/3}} \left(\frac{2\pi \left(6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)}{\left(360\,000 s\right)}\right)^{5/3}$$
$$= 7,13 \times 10^{-15}$$

d) On va trouver la période en fonction du temps avec

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 \left(m_1 + m_2\right)^{1/3}} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3}$$

On a alors

$$T^{5/3} dT = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 \left(m_1 + m_2\right)^{1/3}} \left(2\pi G\right)^{5/3} dt$$
$$\frac{3T^{8/3}}{8} + cst = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 \left(m_1 + m_2\right)^{1/3}} \left(2\pi G\right)^{5/3} t$$

On trouve la constante en sachant qu'à t = 0, la période correspond à la période actuelle (qu'on va appeler T_0). On a donc

$$\frac{3T_0^{8/3}}{8} + cst = 0$$

Notre équation est donc

$$\frac{3T^{8/3}}{8}-\frac{3T_0^{8/3}}{8}=-\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5\left(m_1+m_2\right)^{1/3}}\left(2\pi G\right)^{5/3}t$$

On peut alors trouver le temps

$$\frac{3\left(36\,000s\right)^{8/3}}{8}-\frac{3\left(360\,000s\right)^{8/3}}{8}=$$

$$-\frac{192\pi\left(4\times10^{30}kg\right)\left(6\times10^{30}kg\right)}{5\left(3\times10^{8}\,\frac{m}{s}\right)^{5}\left(10\times10^{30}kg\right)^{1/3}}\left(2\pi\left(6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\right)^{5/3}t$$

$$2,45\times10^{14}s^{8/3}=\ -1,299\times10^{-5}s^{5/3}\cdot t$$

$$t=1,89\times10^{19}s$$

$$t=599\times10^{9}ans$$

11. a) On trouve a avec la troisième loi de Kepler

$$T^2=\frac{4\pi^2a^3}{GM_{tot}}$$

$$\left(36\,000s\right)^2=\frac{4\pi^2a^3}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot10\times10^{30}kg}$$

$$a=2,798\times10^{9}m$$

b) La puissance est

$$\overline{P}=\frac{32G^4m_1^2m_2^2\left(m_1+m_2\right)}{5c^5a^5\left(1-e^2\right)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)$$

$$=\frac{32\cdot\left(6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)^4\left(4\times10^{30}kg\right)^2\left(6\times10^{30}kg\right)^3}{5\left(3\times10^{8}\,\frac{m}{s}\right)^5\left(2,798\times10^{9}m\right)^5\left(1-0,8^2\right)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}0,8^2+\frac{37}{96}0,8^4\right)$$

$$=3,762\times10^{25}W\cdot\frac{5821}{1875}$$

$$=1,168\times10^{26}W$$

c) Le rythme de diminution est

$$\overline{\left(\frac{dT}{dt}\right)} = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5\left(m_1+m_2\right)^{1/3}\left(1-e^2\right)^{7/2}}\left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)$$

$$= \frac{192\pi\left(4\times10^{30}kg\right)\left(6\times10^{30}kg\right)}{5\left(3\times10^8\,\tfrac{m}{s}\right)^5\left(10\times10^{30}kg\right)^{1/3}\left(1-e^2\right)^{7/2}}\left(\frac{2\pi\left(6,674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\right)}{36\,000s}\right)^{5/3}\frac{5821}{1875}$$

$$= 3,671\times10^{-11}$$

e) On va trouver la période en fonction du temps avec

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5\left(m_1+m_2\right)^{1/3}\left(1-e^2\right)^{7/2}}\left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)$$

$$T^{5/3}dT = -kdt$$

où

$$k = \frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5\left(m_1+m_2\right)^{1/3}\left(1-e^2\right)^{7/2}}\left(2\pi G\right)^{5/3}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)$$

$$= \frac{192\pi\left(4\times10^{30}kg\right)\left(6\times10^{30}kg\right)}{5\left(3\times10^8\,\tfrac{m}{s}\right)^5\left(10\times10^{30}kg\right)^{1/3}\left(1-0,8^2\right)^{7/2}}\left(2\pi\left(6,674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\right)\right)^{5/3}\frac{5821}{1875}$$

$$= 1,4408\times10^{-3}s^{5/3}$$

On a alors

$$\frac{3T^{8/3}}{8} + cst = -kt$$

On trouve la constante en sachant qu'à $t = 0$, la période correspond à la période actuelle (qu'on va appeler T_0). On a donc

$$\frac{3T_0^{8/3}}{8} + cst = 0$$

Notre équation est donc

$$\frac{3T^{8/3}}{8} - \frac{3T_0^{8/3}}{8} = -kt$$

On peut alors trouver le temps

$$\frac{3\left(3\,600s\right)^{8/3}}{8}-\frac{3\left(36\,000s\right)^{8/3}}{8}=-1,441\times10^{-3}s^{5/3}\cdot t$$
$$5,287\times10^{11}s^{8/3}=-1,441\times10^{-3}s^{5/3}\cdot t$$
$$t=3,669\times10^{14}s$$
$$t=11,6\times10^{6}a$$

12. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S&=\frac{2GM}{c^2}\\&=\frac{2\cdot6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,98\times10^{24}kg}{\left(3\times10^{8}\,\frac{m}{s}\right)^2}\\&=8,87mm\end{aligned}$$

13. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S&=2,953\tfrac{km}{M_\odot}\times M\\&=2,953\tfrac{km}{M_\odot}\times1M_\odot\\&=2,953km\end{aligned}$$

Le rapport des temps est donc

$$\begin{aligned}\Delta t_{espace}&=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r}}}\\&=\frac{1an}{\sqrt{1-\frac{2,953km}{8km}}}\\&=1,259an\end{aligned}$$

14. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned} R_S &= 2{,}953 \tfrac{km}{M_\odot} \times M \\ &= 2{,}953 \tfrac{km}{M_\odot} \times 1M_\odot \\ &= 2{,}953km \end{aligned}$$

Le rapport des longueurs est donc

$$\begin{aligned} \Delta L_{espace} &= \Delta L \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} \\ 50m &= \Delta L \sqrt{1 - \frac{2{,}953km}{8km}} \\ \Delta L &= 62{,}95m \end{aligned}$$

15. L'angle de déviation est

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{4GM}{bc^2} \\ &= \frac{4 \cdot 6{,}674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \left(2{,}19 \cdot 1{,}9885 \times 10^{30} kg\right)}{\left(1{,}73 \cdot 6{,}955 \times 10^{8} m\right) \cdot \left(3 \times 10^{8} \frac{m}{s}\right)^2} \\ &= 1{,}07 \times 10^{-5} rad \\ &= 2{,}21'' \end{aligned}$$

16. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned} R_S &= 2{,}953 \tfrac{km}{M_\odot} \times M \\ &= 2{,}953 \tfrac{km}{M_\odot} \times 1M_\odot \\ &= 2{,}953km \end{aligned}$$

Le changement de longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned}\lambda_{espace} &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r}}}\\ &= \frac{450nm}{\sqrt{1-\frac{2,953km}{8km}}}\\ &= 567nm\end{aligned}$$

17. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S &= 2,953\tfrac{km}{M_\odot}\times M\\ &= 2,953\tfrac{km}{M_\odot}\times 2M_\odot\\ &= 5,906km\end{aligned}$$

Le changement de longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned}\lambda_{espace} &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r}}}\\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{5,906km}{13km}}}\\ &= 1,354\cdot\lambda\end{aligned}$$

Le décalage est donc

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\lambda'}{\lambda}\\ &= \frac{1,354\lambda}{\lambda}\\ &= 1,354\end{aligned}$$

18. La séquence principale se termine à une magnitude de 20. Déterminons premièrement à quelle magnitude absolue cela correspond

$$\begin{aligned} M &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ &= 20 + 5\log\left(\frac{32,62al}{33\,900al}\right) \\ &= 4,92 \end{aligned}$$

La luminosité de l'étoile qui vient juste de mourir est donc

$$M = 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right)$$
$$4,92 = 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right)$$
$$L = 0,851L_\odot$$

La masse de cette étoile est donc

$$L = M^{3,8}$$
$$0,851 = M^{3.8}$$
$$M = 0,958$$

La durée de vie de cette étoile est donc

$$\begin{aligned} t_{vie} &= 10,9Ga \times \frac{M}{L} \\ &= 10,9Ga \times \frac{0,958}{0,851} \\ &= 12,3Ga \end{aligned}$$

L'amas a donc environ 12,3 milliards d'années.