6. Les équations différentielles

Concepts de base

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Équation avec dérivée

Chute libre $mg - kv^2 = ma$

$$mg - k\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Isole y…

C'est ce qu'on va apprendre ici

Équations différentielles ordinaires : fonctions d'une seule variable

On pourrait avoir équation aux dérivées partielles pour des fonctions de plusieurs variables

Peut avoir des dérivées d'ordre supérieur à 1

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

Quelques exemples

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^{28}y}{dx^{28}} + 2e^{x} = x$$

$$y'' + 4y = 0$$

$$x^2 y''' y' + 2e^{x} y'' = \left(x^2 + 2\right) y^2$$

$$(3x+2)\,dx + \sin y\,dy = 0$$

L’ordre d’une équation différentielle

Plus grande valeur de n dans $\dfrac{d^n y}{dx^n}$

$\dfrac{dy}{dx} = \cos x$	1
$\dfrac{d^{28} y}{dx^{28}} + 2e^x = x$	28
$y'' + 4y = 0$	2
$x^2 y''' y' + 2e^x y'' = \left(x^2 + 2\right) y^2$	3
$\left(3x+2\right) dx + \sin y dy = 0$	1

Le degré d'une équation différentielle

Exposant de la dérivée du plus grand ordre

$\dfrac{dy}{dx} = \cos x$	1
$\dfrac{d^{28}y}{dx^{28}} + 2e^{x} = x$	1
$\left(y''\right)^2 + 4y' = 0$	2
$\left(y''\right)^2 + 4\left(y'\right)^3 = 0$	2
$x^2\left(y'''\right)^3\left(y'\right)^5 + 2e^{x}\left(y''\right)^4 = y^2$	3

Parfois degré pas défini

$$e^{y''} + y = 0$$

La solution d'une équation différentielle

Fonction qui satisfait l'équation

Facile de vérifier si fonction est solution

exemple: vérifions si $y = x^2$ est solution de $xy' = 2y$

$$xy' = 2y$$
$$x(2x) = 2(x^2)$$
$$2x^2 = 2x^2$$

Mais est-ce la seule solution ?

Est-ce que $y = x^2 + 1$ est aussi solution ?

$$xy' = 2y$$
$$x(2x) = 2(x^2 + 1)$$
$$2x^2 = 2x^2 + 2$$

Est-ce que $y = Ax^2$ est aussi solution ?

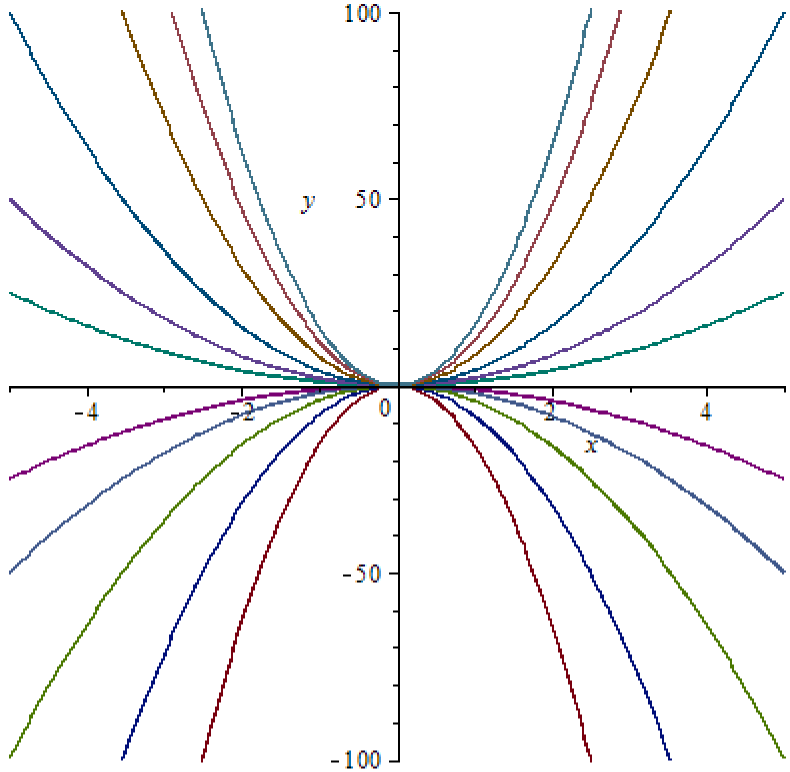
$$xy' = 2y$$
$$x(2Ax) = 2(Ax^2)$$
$$2Ax^2 = 2Ax^2$$

Solution générale

Il y a plusieurs fonctions qui peuvent être solution

= Famille de solution

Ici, la famille de solution est $y = Ax^2$



Y a-t-il d'autres solutions ?

Nombre de paramètres = ordre de l'équation

Ici, un seul paramètre pour $y = Ax^2$ pour l'équation $xy' = 2y$

(Il y a parfois d'autres solutions, appelées solutions singulières, qui seront rarement celles qu'on cherche)

$y = Ax^2$ est la solution générale

Si on donne une valeur à A, on a une solution particulière

Ex: $y = 2x^2$

Pour obtenir une solution particulière, on doit nous donner de l'information

Cette info porte le nom de *conditions initiales*

Par exemple, on va demander la solution de $xy' = 2y$ sachant que $y = 1$ quand $x = 2$

La solution générale est $y = Ax^2$

Avec la condition initiale, on a

$$1 = A\,(2)^2$$

$$A = \tfrac{1}{4}$$

La solution particulière est donc $y = \tfrac{1}{4}x^2$

Exemple

Vérifiez que $y=\ln(x)+\dfrac{A}{x}+B$ est la solution de $x^2y''+2xy'=1$

et trouver la solution particulière pour laquelle $y = 4$ et $y' = 3$ quand $x = 1$

$$y'=\frac{1}{x}-\frac{A}{x^2}$$

$$y''=-\frac{1}{x^2}+\frac{2A}{x^3}$$

$$\begin{aligned}x^2y''+2xy' &= x^2\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{2A}{x^3}\right)+2x\left(\frac{1}{x}-\frac{A}{x^2}\right)\\ &=-1+\frac{2A}{x}+2-\frac{2A}{x}\\ &=1\end{aligned}$$

Exemple

Vérifiez que $y=\ln\left(x\right)+\dfrac{A}{x}+B$ est la solution de $x^2y''+2xy'=1$

et trouver la solution particulière pour laquelle y = 4 et y' = 2 quand x = 1

$$y=\ln\left(x\right)+\frac{A}{x}+B$$

$$4=A+B$$

$$y'=\frac{1}{x}-\frac{A}{x^2}$$

$$3=1-A$$

A = -2
B = 6

$$y=\ln\left(x\right)-\frac{2}{x}+6$$

Reste à trouver la solution générale…

Les équations d'ordre 1 et de degré 1

Les équations à variables séparables

Équation différentielle à variables séparables

$$P(y)\,dy = Q(x)\,dx$$

Solution : intègre de chaque côté

$$\int P(y)\,dy = \int Q(x)\,dx$$

Exemple

Trouvez la solution générale de $9yy' + 4x = 0$

$$9y\frac{dy}{dx} + 4x = 0$$

$$9y\frac{dy}{dx} = -4x$$

$$9ydy = -4xdx$$

$$\int 9ydy = -\int 4xdx$$

$$\frac{9y^2}{2} = -2x^2 + C$$

Pas besoin de 2 constantes

$$y^2 = -\frac{4}{9}x^2 + C$$

Nouvelle constante…

$$y^2 = -\frac{4}{9}x^2 + C$$ Solution implicite

$$y = \pm\sqrt{C - \frac{4}{9}x^2}$$ Solution explicite

Exemple

Trouvez la solution générale de $y' = 1 + y^2$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$

$$\arctan y = x + C$$

$$y = \tan(x + C)$$

Parfois il y a une condition initiale qui permet de trouver une solution particulière.

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante si $y = 1$ quand $x = 0$.

$$\left(1+x^2\right)y' + y^2 + 1 = 0$$

$$\left(1+x^2\right)y' = -y^2 - 1$$

$$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = -y^2 - 1$$

$$-\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$-\int\frac{dy}{1+y^2} = \int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$-\arctan y = \arctan x + C$$

$$\arctan x + \arctan y = C$$

$$\tan\left(\arctan x + \arctan y\right) = C$$

$$\tan\left(A+B\right) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\tan\left(\arctan x + \arctan y\right) = C$$

$$\frac{\tan\left(\arctan x\right) + \tan\left(\arctan y\right)}{1-\tan\left(\arctan x\right)\tan\left(\arctan y\right)} = C$$

$$\frac{x+y}{1-xy} = C$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante si $y = 1$ quand $x = 0$.

$$\left(1+x^2\right)y' + y^2 + 1 = 0$$

$$\frac{x+y}{1-xy} = C \qquad y = 1 \text{ quand } x = 0.$$

$$\frac{0+1}{1-0\cdot 1} = C$$

$$C = 1$$

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1$$

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1$$

$$x + y = 1 - xy$$

$$y + xy = 1 - x$$

$$y\left(1+x\right) = 1 - x$$

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

Exercice

Trouver la solution de l'équation différentielle suivante.

$$\frac{dx}{dt} = 8 - 2x^2$$

si $x = 0$ quand $t = 0$

Réponse : $x = 2\tanh(4t)$

$$\frac{dx}{dt} = 8 - 2x^2$$

$$\frac{dx}{4 - x^2} = 2dt$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\left(\frac{x}{2}\right) = 2t + C$$

$x = 0$ si $t = 0$

$C = 0$

$$\frac{1}{2}\operatorname{artanh}\left(\frac{x}{2}\right) = 2t$$

$$\frac{x}{2} = \tanh 4t$$

$$x = 2\tanh\left(4t\right)$$

Changement de variables pour arriver à une équation à variables séparables

Arrive souvent par tâtons

Mais voici 2 trucs

Les équations homogènes

Équation homogène

$$f\left(\lambda x, \lambda y\right) = \lambda^n f\left(x, y\right)$$

n est appelé le degré.

La fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ est homogène de degré 2 puisqu'on a

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 \\ &= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 \\ &= \lambda^2 (x^2 + y^2) \\ &= \lambda^2 f(x, y) \end{aligned}$$

La fonction $f(x,y)=\sqrt{x^2+3y^2}$ est homogène de degré 1 puisqu'on a

$$\begin{aligned}
f(\lambda x,\lambda y) &= \sqrt{(\lambda x)^2+3(\lambda y)^2} \\
&= \sqrt{\lambda^2 x^2+3\lambda^2 y^2} \\
&= \sqrt{\lambda^2\left(x^2+3y^2\right)} \\
&= \lambda\sqrt{\left(x^2+3y^2\right)} \\
&= \lambda f(x,y)
\end{aligned}$$

La fonction $f\left(x,y\right)=\dfrac{x+y}{x-y}$ est homogène de degré 0 puisqu'on a

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda x,\lambda y\right) &= \frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y} \\
&= \frac{\lambda\left(x+y\right)}{\lambda\left(x-y\right)} \\
&= \frac{x+y}{x-y} \\
&= \lambda^0 f\left(x,y\right)
\end{aligned}$$

La fonction $f(x, y) = x^2 + y$ n'est pas homogène puisqu'on a

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + (\lambda y) \\
&= \lambda^2 x^2 + \lambda y
\end{aligned}
$$

Équation différentielle homogène

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

où $M(x,y)$ et $N(x,y)$ sont homogènes de même degré.

Changement de variables à faire pour transformer une équation homogène en équation à variables séparables

$$y = ux$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

$$\left(-y^2 + x^2\right)dx + \left(2xy\right)dy = 0$$

Pas variables séparables,
mais homogène

Pose $y = ux$

$$dy = udx + xdu$$

$$\left(-y^2 + x^2\right)dx + \left(2xy\right)dy = 0$$

$$\left(-u^2x^2 + x^2\right)dx + \left(2xux\right)\left(udx + xdu\right) = 0$$

$$x^2\left(-u^2 + 1\right)dx + x^2\left(2u\right)\left(udx + xdu\right) = 0$$

$$\left(-u^2 + 1\right)dx + \left(2u\right)\left(udx + xdu\right) = 0$$

$$\left(-u^2 + 1\right)dx + 2u^2dx + 2uxdu = 0$$

$$\left(u^2 + 1\right)dx + 2uxdu = 0$$

$$\frac{2udu}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

$$\int \frac{2u}{u^2+1}\,du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left(1+u^2\right) = -\ln|x| + C$$

$$\ln\left(1+u^2\right) = -\ln|x| + \ln C'$$

$$\ln\left(1+u^2\right) = \ln\left(\frac{C'}{x}\right)$$

$$1+u^2 = \frac{C'}{x}$$

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C'}{x}$$

$$x^2 + y^2 = C'x$$

Équations toujours formées de la même combinaison linéaire $Ax+By$

Remarque que M et N dans

$$M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$$

sont formés de la même combinaison $Ax + By$

$$\left(x+3y+3\right)dx+\left(3x+9y+5\right)dy=0$$

M et N formés de $x + 3y$

$$\left(\left(x+3y\right)+3\right)dx+\left(3\left(x+3y\right)+5\right)dy=0$$

Changement de variables à faire pour transformer une équation toujours formée de la combinaison $Ax + By$ en équation à variables séparables

$$u = Ax + By$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$\left(2x-4y+5\right)y'+x-2y+3=0$$

$$\left(x-2y+3\right)dx+\left(2x-4y+5\right)dy=0$$

M et N formé de $x - 2y$

$$u=x-2y$$

$$du=dx-2dy$$

$$dy=\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}du$$

$$\left(u+3\right)dx+\left(2u+5\right)\left(\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}du\right)=0$$

$$2\left(u+3\right)dx+\left(2u+5\right)\left(dx-du\right)=0$$

$$\left(4u+11\right)dx-\left(2u+5\right)du=0$$

$$\frac{2u+5}{4u+11}du=dx$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$(2x-4y+5)\,y'+x-2y+3=0$$

$$\int \frac{2u+5}{4u+11}\,du=\int dx$$

$$\int \frac{4u+10}{4u+11}\,du=\int 2dx$$

$$\int \frac{4u+11-1}{4u+11}\,du=\int 2dx$$

$$\int \left(\frac{4u+11}{4u+11}-\frac{1}{4u+11}\right)du=\int 2dx$$

$$\int \left(1-\frac{1}{4u+11}\right)du=\int 2dx$$

$$u-\frac{1}{4}\ln\left|4u+11\right|=2x+C$$

$$(x-2y)-\frac{1}{4}\ln\left|4(x-2y)+11\right|=2x+C$$

Exercice

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$y(\ln x - \ln y + 1)\,dx - x\,dy = 0$$

Réponse : $y = xe^{C/x}$

$$y\left(\ln\frac{x}{y}+1\right)dx - xdy = 0$$

$$y = ux \qquad dy = udx + xdu$$

$$ux\left(\ln\frac{x}{ux}+1\right)dx - x\left(xdu+udx\right)=0$$

$$ux\ln\frac{1}{u}dx + uxdx - x^2du - xudx = 0$$

$$ux\ln\frac{1}{u}dx - x^2du = 0$$

$$-ux\ln u dx - x^2du = 0$$

$$-u\ln u dx = xdu$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{du}{u\ln u}$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \int\frac{du}{u\ln u}$$

$$-\ln(x) = \ln\left(\ln(u)\right) + \ln(C)$$

$$\ln\left(x^{-1}\right) = \ln\left(C\ln(u)\right)$$

$$x^{-1} = C\ln(u)$$

$$x^{-1} = C\ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$e^{C/x} = \frac{y}{x}$$

$$y = xe^{C/x}$$

Les équations linéaires

Équation linéaire

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + (\cos x \tan x)\,y = e^{x}$$

Parfois un peu camouflé

$$x^2 dy + \left(\tan x^2 + y \cosh x\right) dx = 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + \tan x^2 + y \cosh x = 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y \cosh x = -\tan x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\cosh x}{x^2} y = -\frac{\tan x^2}{x^2}$$

Pas linéaire

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y^2 = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

Homogène si $Q = 0$

(alors à variables séparables)

Non-homogène si $Q \neq 0$

Pour résoudre, on multiplie par $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)\,y=e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$e^{\int P(x)dx}dy+e^{\int P(x)dx}P(x)\,ydx=e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}d\left(e^{\int P(x)dx}y\right)&=e^{\int P(x)dx}dy+d\left(e^{\int P(x)dx}\right)y\\&=e^{\int P(x)dx}dy+e^{\int P(x)dx}P(x)\,dx\cdot y\end{aligned}$$

$$e^{\int P(x)dx}dy+e^{\int P(x)dx}P(x)\,ydx=e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx$$

$$d\left(e^{\int P(x)dx}P(x)\,y\right)=e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx$$

Intègre de chaque côté

$$\int d\left(e^{\int P(x)dx} P(x)\, y\right) = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)\, dx$$

Solution d'une équation linéaire non-homogène

$$e^{\int P(x)dx} P(x)\, y = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)\, dx$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$y' - y = e^{2x}$$

$P(x) = -1$ et $Q(x) = e^{2x}$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int (-1)dx}$$

$$= e^{-x} \qquad \text{Constante inutile}$$

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = e^{-x}e^{2x}$$

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = e^{x}$$

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = e^{x}$$

$$e^{-x}dy - e^{-x}ydx = e^{x}dx$$

$$d\left(e^{-x}y\right) = \frac{\partial\left(e^{-x}y\right)}{\partial y}dy + \frac{\partial\left(e^{-x}y\right)}{\partial x}dx$$

$$= e^{-x}dy - e^{-x}ydx$$

$$d\left(e^{-x}y\right) = e^{x}dx$$

$$\int d\left(e^{-x}y\right) = \int e^{x}dx$$

$$e^{-x}y = e^{x} + C$$

$$y = e^{2x} + Ce^{x}$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante si on a $y\ (0) = 1$.

$$y' + (\tan x)\, y = \sin 2x$$

$P\ (x) = \tan x$ et $Q\ (x) = \sin 2x$

$$\begin{aligned} e^{\int P(x)dx} &= e^{\int \tan x dx} \\ &= e^{-\ln|\cos x|} \\ &= e^{\ln|\sec x|} \\ &= \sec x \end{aligned}$$

$$(\sec x)\, y' + (\sec x \tan x)\, y = \sec x \sin 2x$$

$$(\sec x)\frac{dy}{dx} + (\sec x \tan x)\, y = \sec x \sin 2x$$

$$(\sec x)\, dy + (\sec x \tan x)\, y dx = \sec x \sin 2x dx$$

$$d\,(y \cdot \sec x) = \sec x \sin 2x dx$$

$$\int d\,(y \cdot \sec x) = \int \sec x \sin 2x dx$$

$$y \cdot \sec x = \int \sec x \sin 2x dx$$

$$\begin{aligned} \int \sec x \sin 2x dx &= \int \sec x (2 \sin x \cos x)\, dx \\ &= \int \frac{1}{\cos x}(2 \sin x \cos x)\, dx \\ &= \int 2 \sin x dx \\ &= -2 \cos x + C \end{aligned}$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante si on a $y\ (0) = 1$.

$$y' + (\tan x)\, y = \sin 2x$$

$$y \cdot \sec x = -2\cos x + C$$

$$y = -2\cos^2 x + C\cos x$$

$y\ (0) = 1$

$$1 = -2\cos^2 0 + C\cos 0$$

$$1 = -2 + C$$

$$C = 3$$

$$y = -2\cos^2 x + 3\cos x$$

Seule obstacle : intégrales…

Exercice

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$2x(x-1)\,y' + y = 4x\sqrt{x}\,(x-1)$$

Réponse : $y = \frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x} + C\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

$$y' + \frac{1}{2x(x-1)}\, y = 2\sqrt{x}$$

P (x) = 1/2x(x-1) et Q (x) = 2x

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{2x(x-1)}dx}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x}}$$

$$= \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}y' + \sqrt{\frac{x-1}{x}}\,\frac{1}{2x(x-1)}\,y = \sqrt{\frac{x-1}{x}}2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}dy + \sqrt{\frac{x-1}{x}}\,\frac{1}{2x(x-1)}\,ydx = 2\sqrt{x-1}dx$$

$$d\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}y\right) = 2\sqrt{x-1}dx$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}y = \frac{4}{3}(x-1)^{3/2} + C$$

$$y = \frac{4}{3}\frac{(x-1)^{3/2}\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} + C\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$y = \frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x} + C\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

Les équations de Bernoulli

Équation de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

Peut transformer en linéaire

Divise par y^n

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}P(x)\,y=Q(x)$$

Ensuite, on pose $z = y^{1\text{-}n}$.

$$dz=(1-n)\,y^{-n}dy$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+P(x)\,z=Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)\,z=(1-n)Q(x)$$

Linéaire

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$2y' + y = (1-2x)\,y^4$$

Divise par y^4

$$2y^{-4}\frac{dy}{dx} + y^{-3} = (1-2x)$$

$z = y^{-3}$ On a alors $dz = -3y^{-4}dy$

$$-\frac{2}{3}\frac{dz}{dx} + z = (1-2x)$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{3}{2}z = -\frac{3}{2}(1-2x)$$

$P(x) = -3/2$ et $Q(x) = -3(1-2x)/2$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{3}{2}dx}$$

$$= e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$e^{-\frac{3}{2}x}\frac{dz}{dx} - \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}z = -\frac{3}{2}(1-2x)e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$e^{-\frac{3}{2}x}dz - \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}zdx = -\frac{3}{2}(1-2x)e^{-\frac{3}{2}x}dx$$

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$2y' + y = (1-2x)\,y^4$$

$$e^{-\frac{3}{2}x}dz - \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}zdx = -\frac{3}{2}(1-2x)e^{-\frac{3}{2}x}dx$$

$$d\left(e^{-\frac{3}{2}x}z\right) = -\frac{3}{2}(1-2x)e^{-\frac{3}{2}x}dx$$

$$\int d\left(e^{-\frac{3}{2}x}z\right) = -\int \frac{3}{2}(1-2x)e^{-\frac{3}{2}x}dx$$

$$e^{-\frac{3}{2}x}z = -\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}x}(1+6x) + C$$

$$z = -\frac{1}{3}(1+6x) + Ce^{\frac{3}{2}x}$$

$$y^{-3} = -\frac{1}{3}(1+6x) + Ce^{\frac{3}{2}x}$$

$$y = \left(Ce^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3}(1+6x)\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Exercice

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$y' + xy = xy^{-1}$$

Réponse : $y^2 = 1 + Ce^{-x^2}$

$$y' + xy = xy^{-1}$$

Divise par y^{-1}

$$y\frac{dy}{dx} + xy^2 = x$$

$z = y^2$ On a alors $dz = 2ydy$

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + xz = x$$

$$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2x$$

$P(x) = 2x$ et $Q(x) = 2x$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2xdx}$$

$$= e^{x^2}$$

$$e^{x^2}\frac{dz}{dx} + 2xe^{x^2}z = 2xe^{x^2}$$

$$e^{x^2}dz + 2xe^{x^2}zdx = 2xe^{x^2}dx$$

$$d\left(e^{x^2}z\right) = 2xe^{x^2}dx$$

$$e^{x^2}z = e^{x^2} + C$$

$$z = 1 + Ce^{-x^2}$$

$$y^2 = 1 + Ce^{-x^2}$$

Les équations exactes

Équation exacte

Une équation de la forme

$$M\left(x, y\right)dx + N\left(x, y\right)dy = 0$$

est exacte s'il existe une fonction $f\,(x,y) = 0$ pour laquelle

$$df\;= Mdx + Ndy$$

$$\left(2x+4\right)dx+2dy=0$$

est exacte car

$$f=x^{2}+4x+2y=0$$

donne

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$0=\left(2x+4\right)dx+2dy$$

Si f existe

$$Mdx + Ndy = 0$$

$$d\left(f\right) = 0$$

Intègre

Solution d'une équation exacte

$$f = C$$

Donc, solution de

$$0 = (2x + 4)\,dx + 2dy$$

$$x^2 + 4x + 2y = C$$

On avait trouvé

$$f = x^2 + 4x + 2y = 0$$

Comment savoir si f existe

Si f existe, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

qui doit être identique à

$$Mdx + Ndy = 0$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$

On a alors $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Donc, si f existe, on a

Condition pour que f existe.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

On vérifie si f existe. Si oui, on sait que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

On peut alors trouver f avec les intégrales partielles

Comment trouver la fonction f

$$f = \int M dx \qquad\qquad f = \int N dy$$

$$f = \int M dx \qquad\qquad f = \int N dy$$

Un suffisant ? : Non

$$f = \int M dx$$

Ce qui dépend de x uniquement et de x et y

$$f = \int N dy$$

Ce qui dépend de y uniquement et de x et y

Reconstruit f avec ces deux intégrales

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$(x+2)\,y' + y + 4 = 0$$

Variables séparables, mais aussi exacte

$$(x+2)\frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$$
$$(x+2)\,dy + (y+4)\,dx = 0$$

$$M = y+4 \qquad N = x+2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$f = \int M dx = \int (y+4)\, dx = xy + 4x + K_1$$

$$f = \int N dy = \int (x+2)\, dy = xy + 2y + K_2$$

$$f = xy + 4x + 2y$$

$$xy + 4x + 2y = C$$

$$(x+2)\, y + 4x = C$$

$$(x+2)\, y = C - 4x$$

$$y = \frac{C - 4x}{x+2}$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$(2x\sin 3y)\,dx + \left(3x^2\cos 3y + 2y\right)dy = 0$$

$$M = 2x\sin 3y \qquad\qquad N = 3x^2\cos 3y + 2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x\cdot\cos 3y \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x\cdot\cos 3y$$

$$f = \int M dx = \int \left(2x \sin 3y\right) dx = x^2 \sin 3y + K_1$$

$$f = \int N dy = \int \left(3x^2 \cos 3y + 2y\right) dy = x^2 \sin 3y + y^2 + K_2$$

$$f = x^2 \sin 3y + y^2$$

$$x^2 \sin 3y + y^2 = C$$

Exemple

Trouver la solution particulière de l'équation différentielle suivante si $y(0) = 0$.

$$(\cos x \sinh y)\, y' = (\sin x \cosh y)$$

$$(\cos x \sinh y)\frac{dy}{dx} = (\sin x \cosh y)$$

$$(\cos x \sinh y)\, dy = (\sin x \cosh y)\, dx$$

$$(\sin x \cosh y)\, dx - (\cos x \sinh y)\, dy = 0$$

$$M = \sin x \cosh y \qquad N = -\cos x \sinh y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sin x \sinh y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \sin x \sinh y$$

$$f = \int M dx = \int (\sin x \cosh y)\, dx = -\cos x \cosh y + K_1$$

$$f = \int N dy = \int (-\cos x \sinh y)\, dy = -\cos x \cosh y + K_2$$

$$f = -\cos x \cosh y$$

$$-\cos x \cosh y = C$$

$y = 0$ quand $x = 0$

$$-\cos 0 \cosh 0 = C$$

$$-1 = C$$

$$\cos x \cosh y = 1$$

Exercice

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$xe^{y}dy-\left(\left(x+1\right)e^{x}-e^{y}\right)dx=0$$

Réponse : $y=\ln\left(\dfrac{C}{x}+e^{x}\right)$

$$M = -\left(\left(x+1\right)e^{x} - e^{y}\right) \qquad N = xe^{y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{y}$$

$$\begin{aligned} f &= -\int\left(\left(x+1\right)e^{x} - e^{y}\right)dx \\ &= -\int\left(xe^{x} + e^{x} - e^{y}\right)dx \\ &= -\left(e^{x}\left(x-1\right) + e^{x} - xe^{y}\right) \\ &= -xe^{x} + xe^{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \int xe^{y}dy \\ &= xe^{y} \end{aligned}$$

$$f = -xe^{x} + xe^{y}$$

$$-xe^{x} + xe^{y} = C$$

$$e^{y} = \frac{C}{x} + e^{x}$$

$$y = \ln\left(\frac{C}{x} + e^{x}\right)$$

Méthode de résolution pour des équations d'ordre 1 et de degré 1

Nous avons vu plusieurs méthodes pour résoudre des équations d'ordre 1 et de degré 1. Quand on tombe sur une de ces équations, on suggère de vérifier les différentes méthodes possibles en suivant cette liste.

1) L'équation est-elle à variables séparables ?
2) L'équation est-elle exacte ?
3) L'équation est-elle linéaire ?
4) L'équation est-elle une équation de Bernoulli ?
5) Essayez finalement des changements de variables pour arriver à une des formes précédentes.

Applications pour des équations d'ordre 1 et de degré 1

Situations qui mènent à des équations différentielles

Exemple

La loi du refroidissement de Newton dit que le taux de refroidissement d'un objet est proportionnel à la différence de température entre l'objet et le milieu environnant.

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_0\right)$$

Un objet a une température de 100°C dans un milieu à 20°C. Au bout de 5 minutes, la température de l'objet est de 80°C. Combien faudra-t-il de temps pour la température atteigne 40°C si le taux de refroidissement de l'objet est donné par la loi du refroidissement de Newton ?

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - 20°C\right)$$

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - 20°C\right)$$

$$\frac{dT}{k\left(T - 20°C\right)} = -dt$$

$$\int \frac{dT}{\left(T - 20°C\right)} = -\int k\,dt$$

$$\ln\left(T - 20°C\right) = -kt + C$$

$$\ln\left(T-20°C\right)=-kt+C$$

$t = 0$, $T = 100$ °C

$$\ln\left(100°C-20°C\right)=-k\cdot 0+C$$
$$C=\ln\left(80°C\right)$$
$$\ln\left(T-20°C\right)=-kt+\ln\left(80°C\right)$$
$$\ln\left(\frac{T-20°C}{80°C}\right)=-kt$$

Trouve k avec $T = 80$°C au bout de 5 min

$$\ln\left(\frac{80°C-20°C}{80°C}\right)=-k\cdot 5\,\text{min}$$
$$k=\frac{-\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{5\,\text{min}}$$
$$k=0{,}057536\,\text{min}^{-1}$$

$$\ln\left(\frac{T-20°C}{80°C}\right) = -0,057536\,\text{min}^{-1}\cdot t$$

$$\frac{T-20°C}{80°C} = e^{-0,057536\,\text{min}^{-1}\cdot t}$$

$$T = 80°C \cdot e^{-0,057536\,\text{min}^{-1}\cdot t} + 20°C$$

Temps pour 40°C

$$40°C = 80°C \cdot e^{-0,057536\,\text{min}^{-1}\cdot t} + 20°C$$

$$20°C = 80°C \cdot e^{-0,057536\,\text{min}^{-1}\cdot t}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-0,057536\,\text{min}^{-1}\cdot t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -0,057536\,\text{min}^{-1}\cdot t$$

$$t = \frac{-\ln\left(1/4\right)}{0,057536\,\text{min}^{-1}}$$

$$t = 24,0942\,\text{min}$$

Exemple

Timmy aimerait bien aller patiner sur la surface d'un lac. Toutefois, son papa veut s'assurer que la glace est assez épaisse. Il a fallu 10 heures pour qu'il se forme une couche de glace de 1 cm d'épaisseur. Dans combien de temps l'épaisseur de la glace sera-t-elle de 10 cm si le rythme d'épaississement de la glace suit une équation de la forme suivante.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k}{h}$$

(Autrement dit, l'épaisseur de la glace augment deux fois moins vite si la glace est deux fois plus épaisse. Dans cette équation, k est une constante.)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k}{h}$$

$$hdh = kdt$$

$$\int hdh = \int kdt$$

$$\frac{h^2}{2} = kt + C$$

$h = 0$ à $t = 0$

$$C = 0$$

$$\frac{h^2}{2} = kt$$

$$h = \sqrt{2kt}$$

$$h = \sqrt{2kt}$$

h = 1 cm au bout de 10 heures

$$1cm = \sqrt{2k \cdot 10h}$$
$$k = 0,05\,\tfrac{cm^2}{h}$$

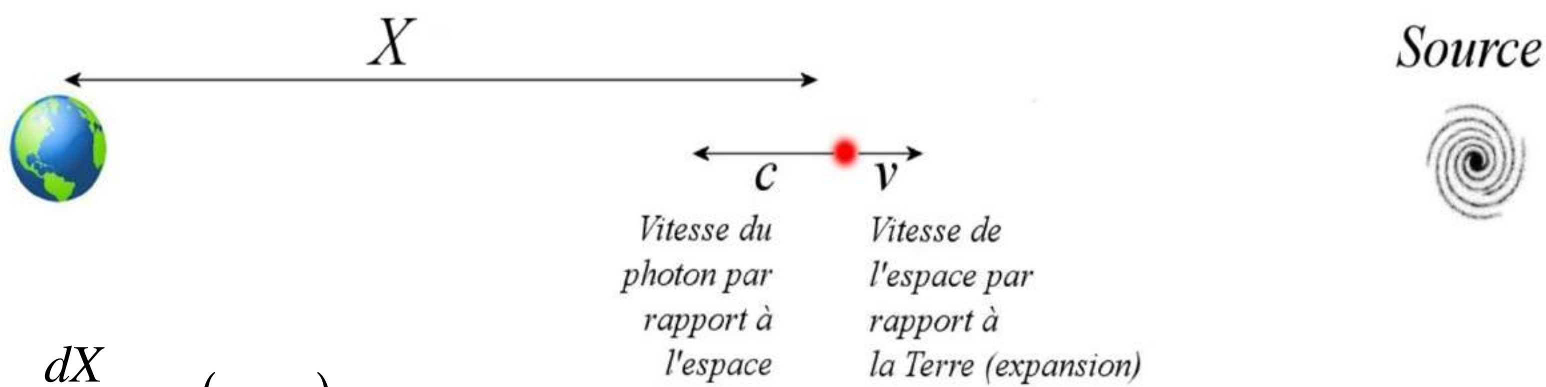
$$h = \sqrt{2 \cdot 0,05\,\tfrac{cm^2}{h} \cdot t}$$
$$h = \sqrt{0,1\,\tfrac{cm^2}{h} \cdot t}$$

Temps pour 10 cm

$$10cm = \sqrt{0,1\,\tfrac{cm^2}{h} \cdot t}$$
$$t = 1000h$$

Exemple

Dans cet exemple, on va calculer le temps que va prendre un photon pour arriver d'une galaxie située à 8 milliards d'années-lumière de nous, en tenant compte de l'expansion de l'univers.



$$\frac{dX}{dt} = -(c - v)$$

v augmente avec la distance $v = HX$

$$\frac{dX}{dt} = -(c - HX)$$

Mais H change avec le temps

$$H = \frac{2}{3t}$$

On est 9,61 Ga

(3,033 x 10^{17} s)

$$\frac{dX}{dt} = -\left(c - \frac{2X}{3t}\right)$$

$$\frac{dX}{dt} = -\left(c - \frac{2X}{3t}\right)$$

Temps pour arriver ($X = 0$) si part de 8 Gal ($7{,}568 \times 10^{25}$ m)

Équation linéaire

$$\frac{dX}{dt} - \frac{2}{3t}X = -c$$

$P = -2/3t$ et $Q = -c$

$$e^{\int P dt} = e^{\int \frac{-2}{3t} dt}$$

$$= e^{\frac{-2}{3}\ln t}$$

$$= e^{\ln(t)^{-2/3}}$$

$$= t^{-\frac{2}{3}}$$

$$t^{-\frac{2}{3}}\frac{dX}{dt} - t^{-\frac{2}{3}}\frac{2}{3t}X = -t^{-\frac{2}{3}}c$$

$$t^{-\frac{2}{3}}\frac{dX}{dt} - \frac{2}{3}t^{-\frac{5}{3}}X = -t^{-\frac{2}{3}}c$$

$$d\left(t^{-\frac{2}{3}}X\right) = -ct^{-\frac{2}{3}}dt$$

$$\int d\left(t^{-\frac{2}{3}}X\right) = -c\int t^{-\frac{2}{3}}dt$$

$$t^{-\frac{2}{3}}X = -3ct^{\frac{1}{3}} + C$$

$$X = -3ct + Ct^{\frac{2}{3}}$$

$$X = -3ct + Ct^{\frac{2}{3}}$$

En ce moment (t = 3,033 x 10^{17} s), la distance du photon est de 8 Gal (7,568 x 10^{25} m).

$$7{,}568\times10^{25}\,m = -3c\left(3{,}033\times10^{17}\,s\right) + C\left(3{,}033\times10^{17}\,s\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$7{,}568\times10^{25}\,m = -3\cdot 3\times10^{8}\,\tfrac{m}{s}\left(3{,}033\times10^{17}\,s\right) + C\left(3{,}033\times10^{17}\,s\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$7{,}568\times10^{25}\,m = -2{,}7297\times10^{26}\,m + C\left(3{,}033\times10^{17}\,s\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$3{,}4865\times10^{26}\,m = C\left(3{,}033\times10^{17}\,s\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$C = 7{,}7234\times10^{14}\,\tfrac{m}{s^{2/3}}$$

Donc

$$X = -3ct + 7{,}7234\times10^{14}\,\tfrac{m}{s^{2/3}}\cdot t^{\frac{2}{3}}$$

$$X = -9\times10^{8}\,\tfrac{m}{s}\cdot t + 7{,}7234\times10^{14}\,\tfrac{m}{s^{2/3}}\cdot t^{\frac{2}{3}}$$

Temps pour arriver à nous ($X = 0$)

$$0 = -9\times10^{8}\ \tfrac{m}{s}\cdot t + 7,7234\times10^{14}\ \tfrac{m}{s^{2/3}}\cdot t^{\frac{2}{3}}$$

$$9\times10^{8}\ \tfrac{m}{s}\cdot t = 7,7234\times10^{14}\ \tfrac{m}{s^{2/3}}\cdot t^{\frac{2}{3}}$$

$$t = \left(\frac{7,7234\times10^{14}\ \tfrac{m}{s^{2/3}}}{9\times10^{8}\ \tfrac{m}{s}}\right)^{3}$$

$$t = 6,3197\times10^{17}\, s$$

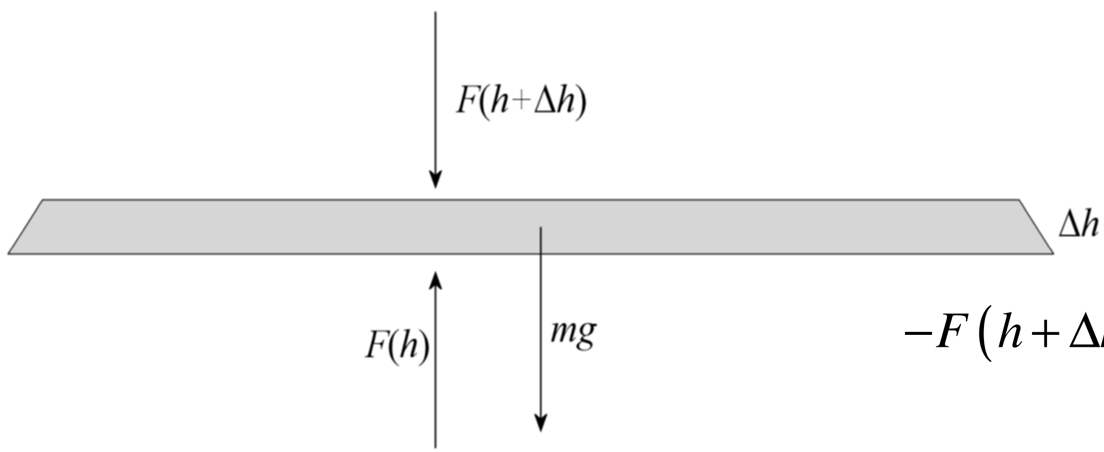
$$t = 20,03 Ga$$

Comme on est en ce moment à t = 9,61 Ga et que le photon arrivera à t = 20,03 Ga, alors le photon voyage pendant 20,03 Ga - 9,61 Ga = 10,42 Ga.

Parfois, on doit trouver l’équation différentielle

Exemple

On veut construite une tour en béton de 100 m de haut qui supporte une masse de 1000 tonnes. La masse volumique du béton est de 2300 kg/m³. On veut que la contrainte (l'équivalent de la pression pour les solides) soit la même partout dans la tour. Quel doit être le diamètre de la base de la tour si le diamètre du haut de la tour est de 4 m ?



$$-F\left(h+\Delta h\right)+F\left(h\right)-mg=0$$

$$\begin{aligned} m &= \rho \cdot volume \\ &= \rho \pi r^2 \Delta h \end{aligned}$$

$$-\rho g \pi r^2 = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{F\left(h+\Delta h\right)-F\left(h\right)}{\Delta h}$$

$$-\rho g \pi r^2 = \frac{dF}{dh}$$

$$-\rho g \pi r^2 = \frac{dF}{dh}$$

$$F = \sigma \pi r^2$$

$$dF = \sigma \pi 2 r dr$$

$$-\rho g \pi r^2 = \frac{\sigma \pi 2 r dr}{dh}$$

$$-\rho g r = \frac{\sigma 2 dr}{dh}$$

$$-\frac{\rho g}{2\sigma} dh = \frac{dr}{r}$$

$$-\frac{\rho g}{2\sigma} h = \ln(r) + C$$

On sait que r = 2 m à 100 m

$$-\frac{\rho g}{2\sigma} 100m = \ln(2m) + C$$

$$C = -\frac{\rho g}{2\sigma} 100m - \ln(2m)$$

$$-\frac{\rho g}{2\sigma}h = \ln(r) + -\frac{\rho g}{2\sigma}100m - \ln(2m)$$

$$-\frac{\rho g}{2\sigma}(h-100m) = \ln\left(\frac{r}{2m}\right)$$

Peut trouver contrainte car on sait qu'on supporte 1000 kg au sommet

$$\sigma = \frac{mg}{A}$$

$$= \frac{10^6 kg \cdot g}{\pi(2m)^2}$$

$$-\frac{\rho g}{2} \cdot \frac{\pi(2m)^2}{10^6 kg \cdot g}(h-100m) = \ln\left(\frac{r}{2m}\right)$$

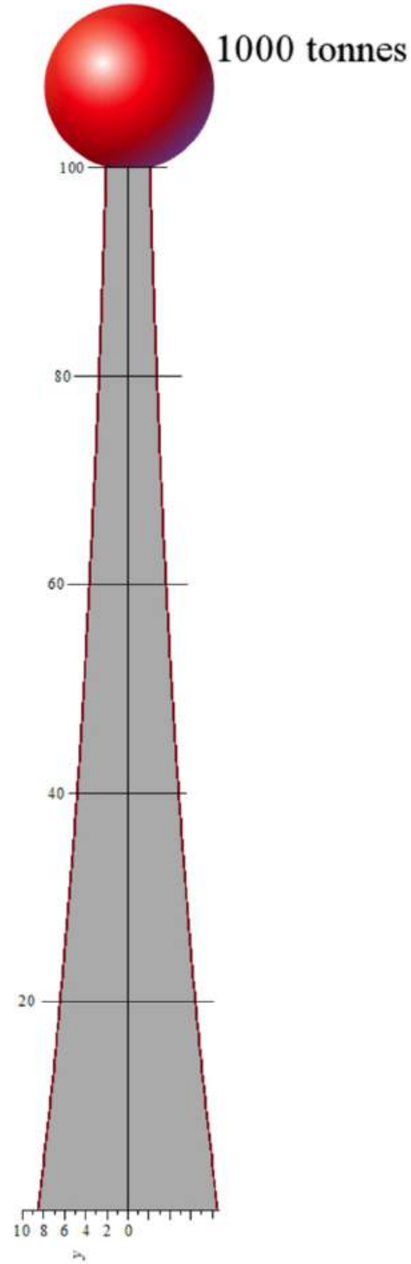
$$-\frac{\pi\rho(2m)^2}{2\times 10^6 kg}(h-100m) = \ln\left(\frac{r}{2m}\right)$$

$$-\frac{\pi \cdot 2300\,\frac{kg}{m^3} \cdot (2m)^2}{2\times 10^6 kg}(h-100m) = \ln\left(\frac{r}{2m}\right)$$

$$-\frac{23\pi}{5000m}(h-100m) = \ln\left(\frac{r}{2m}\right)$$

$$-\frac{23\pi}{5000m}(h-100m)=\ln\left(\frac{r}{2m}\right)$$

Donne la forme de la tour



Base ($h = 0$)

$$-\frac{23\pi}{5000m}(-100m)=\ln\left(\frac{r}{2m}\right)$$

$$r \approx 8,485m$$

Exemple

Dans cet exemple, on va étudier le niveau de pollution dans un grand lac ayant un volume de 1600 km³ (ce qui correspond à un lac de la taille du lac Ontario). Supposons que ce lac se vide au rythme de D = 7500 m³/s par un fleuve et qu'il se remplie au même rythme avec les eaux de pluie et l'eau provenant de rivières qui se jettent dans le lac. On va supposer que l'eau qui arrive dans le lac ne contient aucune pollution.

a) On va premièrement supposer qu'il y a eu un déversement soudain de pollution dans le lac et que la concentration de polluant a atteint c = 50 mg/m³ (répartie uniformément dans le lac). Sachant que le polluant quitte le lac par le fleuve, dans combien de temps le niveau de polluant sera-t-il de 20 mg/m³ ?

Perte de polluant $\quad \Delta m = -c \cdot \Delta volume \quad$ Négatif car m diminue

Taux $$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{\Delta volume}{\Delta t} \cdot c$$

Taux instantané $$\frac{dm}{dt} = -\frac{d\left(volume\right)}{dt} \cdot c$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{d\left(volume\right)}{dt} \cdot c$$

d(volume)/dt = débit

$$\frac{dm}{dt} = -D \cdot c$$

$$c = \frac{m}{V}$$

V est le volume du lac, une constante

$$\frac{dm}{dt} = -D \cdot \frac{m}{V}$$

$$\frac{dm}{m} = -\frac{D}{V} dt$$

$$\int \frac{dm}{m} = -\int \frac{D}{V} dt$$

$$\ln\left(m\right) = -\frac{D}{V} t + C_1$$

$$\ln\left(m\right) - \ln C_2 = -\frac{D}{V} t$$

$$\ln\left(\frac{m}{C_2}\right) = -\frac{D}{V} t$$

$$\frac{m}{C_2} = e^{-\frac{D}{V} t}$$

$$m = C_2 e^{-\frac{D}{V} t}$$

Concentration

$$\frac{m}{V}=\frac{C_2}{V}e^{-\frac{D}{V}t}$$

$$c=C_3e^{-\frac{D}{V}t}$$

Constante avec c = 50 mg/m³ à t = 0

$$50\,\tfrac{mg}{m^3}=C_3e^{-\frac{D}{V}\cdot 0}$$

$$50\,\tfrac{mg}{m^3}=C_3$$

$$c=50\,\tfrac{mg}{m^3}\,e^{-\frac{D}{V}t}$$

Temps pour avoir 20 mg/m³

$$20\,\tfrac{mg}{m^3}=50\,\tfrac{mg}{m^3}\,e^{-\frac{D}{V}t}$$

$$0,4=e^{-\frac{D}{V}t}$$

$$\ln(0,4)=-\frac{D}{V}t$$

$$t=-\frac{V}{D}\ln(0,4)$$

$$t=-\frac{1,6\times10^{12}\,m^3}{7500\,\tfrac{m^3}{s}}\ln(0,4)$$

$$t=1,9547\times10^{8}\,s$$

$$t=6,194\,ans$$

b) On va maintenant supposer qu'il y a une usine qui ajoute 1 kilogramme de polluant par seconde et que le lac ne contient pas de polluant au départ. On va supposer que le polluant se mélange uniformément dans le lac quasi instantanément. Quelle sera la concentration de polluant au bout de 10 ans ?

On avait $$\frac{dm}{dt} = -\frac{D}{V} \cdot m$$

On a maintenant $$\frac{dm}{dt} = -\frac{D}{V} \cdot m + R$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{D}{V} \cdot \left(m - \frac{VR}{D} \right)$$

$$\frac{dm}{m - \frac{VR}{D}} = -\frac{D}{V} \cdot dt$$

$$\int \frac{dm}{m - \frac{VR}{D}} = -\int \frac{D}{V} \cdot dt$$

$$\ln\left(m - \frac{VR}{D} \right) = -\frac{D}{V} t + C_1$$

$$\ln\left(m - \frac{VR}{D} \right) - \ln\left(C_2 \right) = -\frac{D}{V} t$$

$$\ln\left(\frac{m - \frac{VR}{D}}{C_2} \right) = -\frac{D}{V} t$$

$$\frac{m-\frac{VR}{D}}{C_2}=e^{-\frac{D}{V}t}$$

$$m-\frac{VR}{D}=C_2e^{-\frac{D}{V}t}$$

$$m=C_2e^{-\frac{D}{V}t}+\frac{VR}{D}$$

Concentration $$\frac{m}{V}=\frac{C_2}{V}e^{-\frac{D}{V}t}+\frac{R}{D}$$

$$c=C_3e^{-\frac{D}{V}t}+\frac{R}{D}$$

$c=0$ à $t=0$ $$0=C_3e^{-\frac{D}{V}\cdot 0}+\frac{R}{D}$$

$$0=C_3+\frac{R}{D}$$

$$C_3=-\frac{R}{D}$$

$$c = -\frac{R}{D} e^{-\frac{D}{V}t} + \frac{R}{D}$$

$$c = \frac{R}{D}\left(1 - e^{-\frac{D}{V}t}\right)$$

À t = 10 ans

$$c = \frac{1\,\frac{kg}{s}}{7500\,\frac{m^3}{s}}\left(1 - e^{-\frac{7500\frac{m^3}{s}}{1{,}6\times10^{12}\,m^3}\cdot 3{,}15576\times10^{8}\,s}\right)$$

$$= 0{,}00010296\,\frac{kg}{m^3}$$

$$= 102{,}96\,\frac{mg}{m^3}$$

Stabilise à 133,3 mg/m³

c) On va maintenant supposer que l'usine prend de l'expansion, de sorte que la quantité de polluant rejeté augmente avec le temps. Supposons que le rythme à lequel on rejette le polluant est donné par

$$R = 1\tfrac{kg}{s} \cdot \left(\frac{t}{10^8 s} \right)$$

Quelle sera la concentration de polluant au bout de 10 ans ?

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{D}{V} \cdot m + 1\tfrac{kg}{s} \left(\frac{t}{10^8 s} \right)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{D}{V} \cdot m + 10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2} \cdot t$$

$$\frac{dm}{dt} + \frac{D}{V} \cdot m = 10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2} \cdot t \qquad \text{Linéaire}$$

$$\frac{dm}{dt}+\frac{D}{V}\cdot m=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\cdot t$$

$$e^{\int\frac{D}{V}dt}=e^{\frac{D}{V}t}$$

$$e^{\frac{D}{V}t}\,\frac{dm}{dt}+\frac{D}{V}e^{\frac{D}{V}t}\cdot m=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\cdot t\cdot e^{\frac{D}{V}t}$$

$$e^{\frac{D}{V}t}dm+\frac{D}{V}e^{\frac{D}{V}t}\cdot mdt=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\cdot t\cdot e^{\frac{D}{V}t}dt$$

$$d\left(e^{\frac{D}{V}t}m\right)=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\cdot t\cdot e^{\frac{D}{V}t}dt$$

$$\int d\left(e^{\frac{D}{V}t}m\right)=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\cdot\int t\cdot e^{\frac{D}{V}t}dt$$

$$e^{\frac{D}{V}t}m=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\frac{V\left(Dt-V\right)}{D^2}e^{\frac{D}{V}t}+C_1$$

$$m=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\frac{V\left(Dt-V\right)}{D^2}+C_1e^{-\frac{D}{V}t}$$

Concentration

$$\frac{m}{V}=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\frac{V\left(Dt-V\right)}{VD^2}+\frac{C_1}{V}e^{-\frac{D}{V}t}$$

$$c=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\frac{Dt-V}{D^2}+C_2e^{-\frac{D}{V}t}$$

$c=0$ à $t=0$

$$0=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\frac{0-V}{D^2}+C_2e^{-\frac{D}{V}\cdot 0}$$

$$0=-10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\frac{V}{D^2}+C_2$$

$$C_2=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\frac{V}{D^2}$$

$$c=10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\frac{Dt-V}{D^2}+10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\frac{V}{D^2}e^{-\frac{D}{V}t}$$

$$c=\frac{V}{D^2}10^{-8}\,\tfrac{kg}{s^2}\left(\frac{Dt}{V}-1+e^{-\frac{D}{V}t}\right)$$

À t = 10 ans

$$c = \frac{1,6\times10^{12}\,m^3}{\left(7500\,\frac{m^3}{s}\right)^2}10^{-8}\,\frac{kg}{s^2}\left(\frac{7500\,\frac{m^3}{s}\cdot3,15576\times10^{8}\,s}{1,6\times10^{12}\,s}-1+e^{-\frac{7500\frac{m^3}{s}}{1,6\times10^{12}\,m^3}3,15576\times10^{8}\,s}\right)$$

$$= 0,00020112\,\frac{kg}{m^3}$$

$$= 201,1\frac{mg}{m^3}$$

Exercice

Une sphère de naphtalène se sublime lentement de sorte que son rayon est passé de 3 cm à 2 cm en 2 mois

Sachant que le rythme de perte de masse due à la sublimation est proportionnel à la surface de la sphère, déterminez combien de temps il faudra pour que la boule soit complètement sublimée.

Réponse = 6 mois

$$\frac{dm}{dt} = -kA$$

$$\frac{d\left(\rho \frac{4}{3}\pi r^3\right)}{dt} = -k4\pi r^2$$

$$\frac{dr^3}{dt} = -k_2 r^2$$

$$3r^2 \frac{dr}{dt} = -kr^2$$

$$\frac{dr}{dt} = -k_3$$

$$r = -k_3 t + C$$

r = 3 cm à t = 0….C = 3 cm

$$r = -k_3 t + 3cm$$

r = 1 cm à 3 mois

$$2cm = -k_3 \cdot 2mois + 3cm$$

$$k = 0,5\tfrac{cm}{mois}$$

$$r = -0,5\tfrac{cm}{mois} \cdot t + 3cm$$

Temps pour avoir r = 0 cm

$$0cm = -0,5\tfrac{cm}{mois} \cdot t + 3cm$$

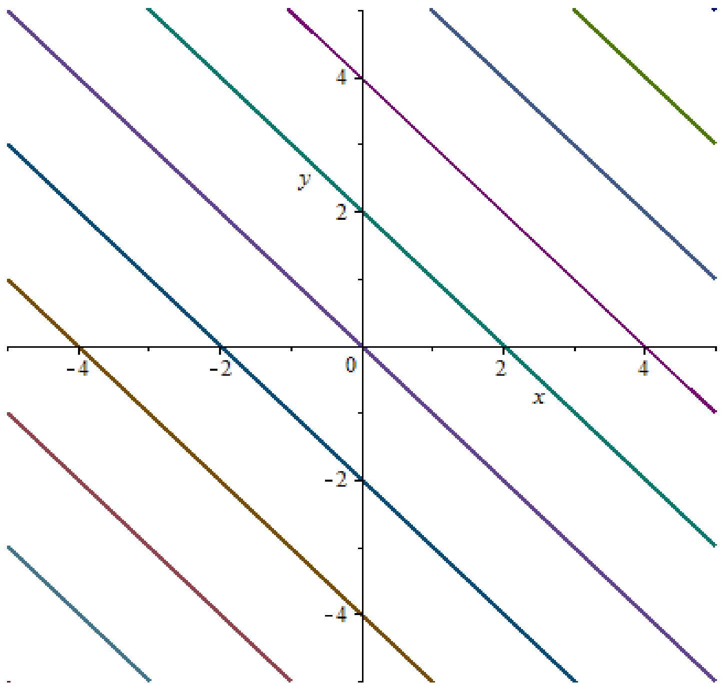
$$0,5\tfrac{cm}{mois} \cdot t = 3cm$$

$$t = 6mois$$

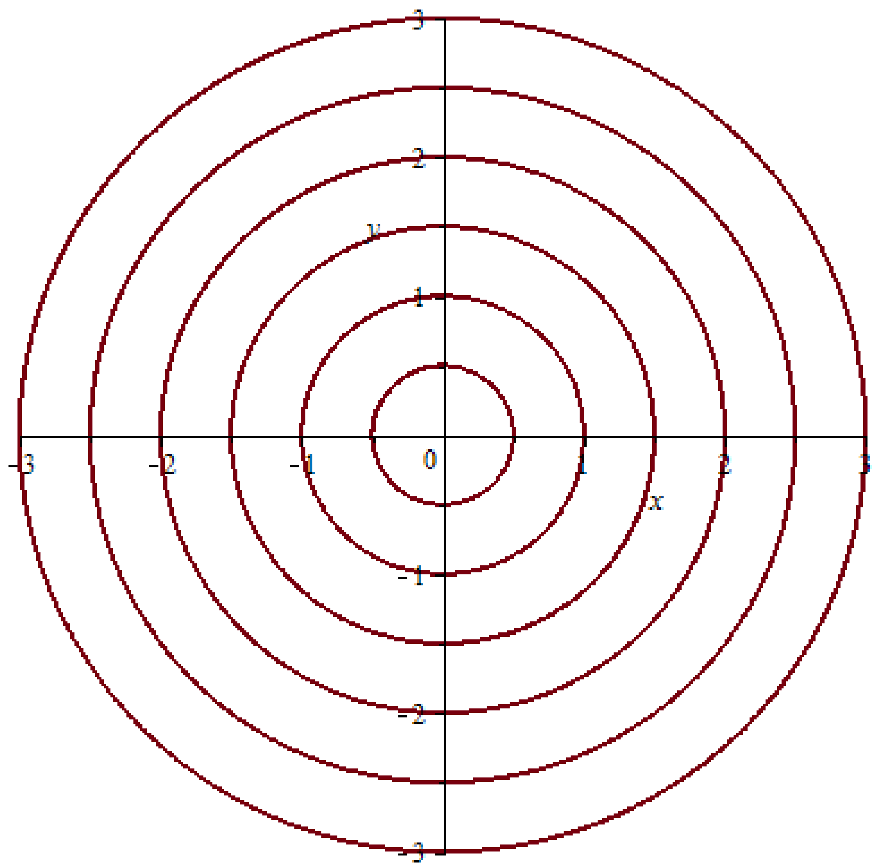
Les familles de courbes

Équation avec constante *C :* représente plusieurs courbes

On a famille de courbes



$$x + y + C = 0$$

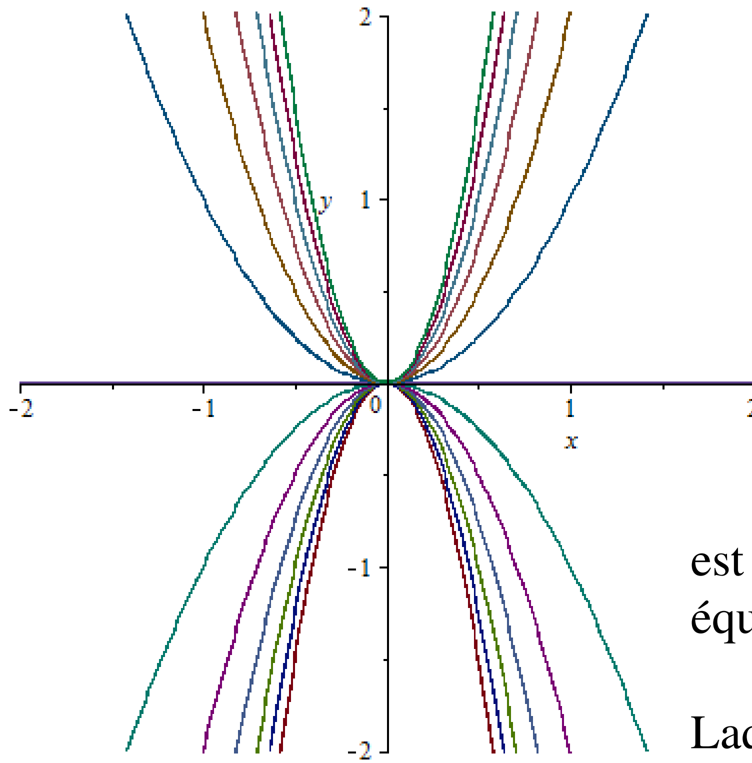


$$x^2 + y^2 - C^2 = 0$$

Solution d'une équation différentielle d'ordre 1 a justement constante

Famille va avec équation différentielle

Exemple : $y = Cx^2$



est associé à une équation différentielle

Laquelle ?

Doit éliminer C avec y et y'

$$y = Cx^2 \qquad\qquad y' = 2Cx$$

$$C = y/x^2$$

$$y' = \left(\frac{y}{x^2}\right)2x$$

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Autre façon

$$C = \frac{y}{x^2}$$

$$dC = \frac{\partial C}{\partial x}dx + \frac{\partial C}{\partial y}dy$$

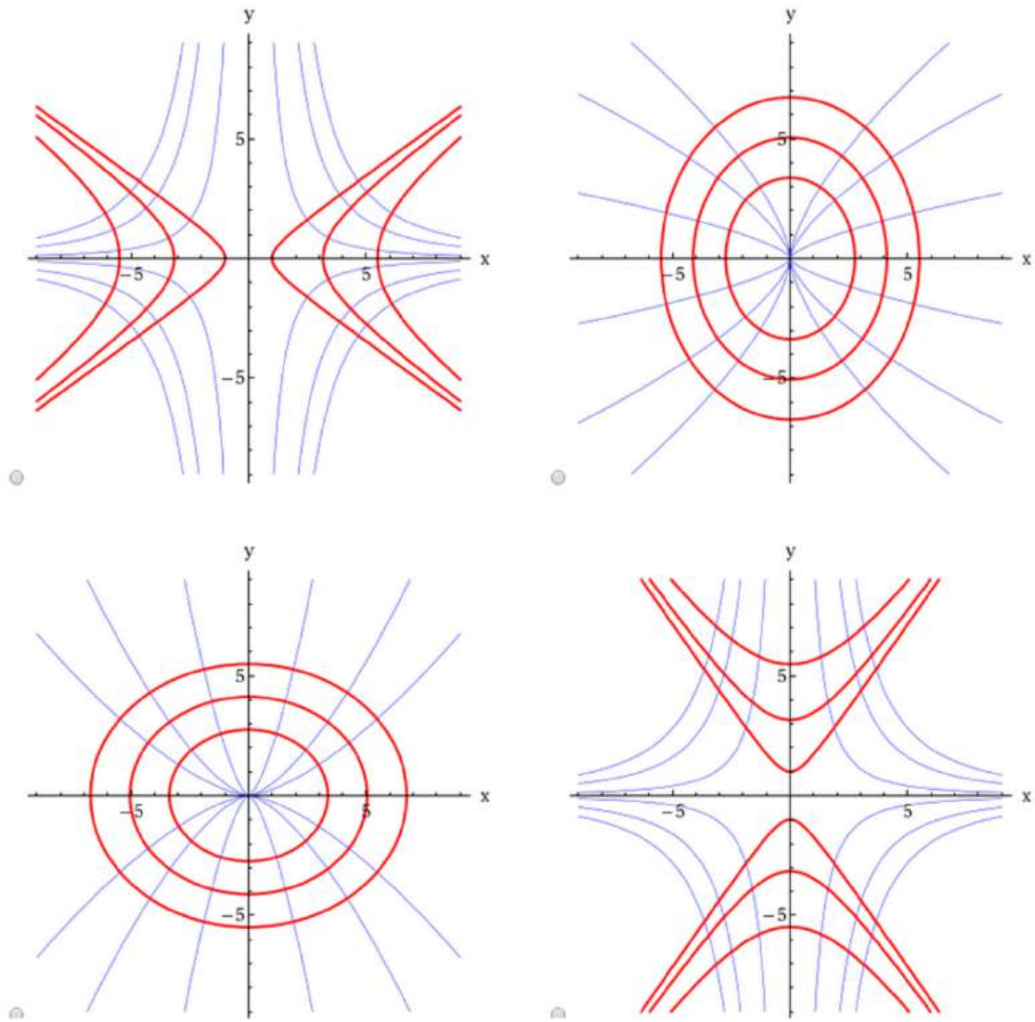
$$0 = \frac{-2y}{x^3}dx + \frac{1}{x^2}dy$$

$$\frac{1}{x^2}dy = \frac{2y}{x^3}dx$$

$$dy = \frac{2y}{x}dx$$

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Famille de courbes orthogonales



Comment trouver ?

Famille à pente m

Orthogonale doit avoir pente $-1/m$

Trajectoires orthogonales

Si la pente d'une famille de courbe est donnée par

$$y' = f(x, y)$$

Alors la pente des trajectoires orthogonales est

$$y' = \frac{-1}{f(x, y)}$$

Exemple

Trouvez l'équation des trajectoires orthogonales de la famille de courbes donnée par $y = Cx^2$.

Départ $\quad y' = \dfrac{2y}{x}$

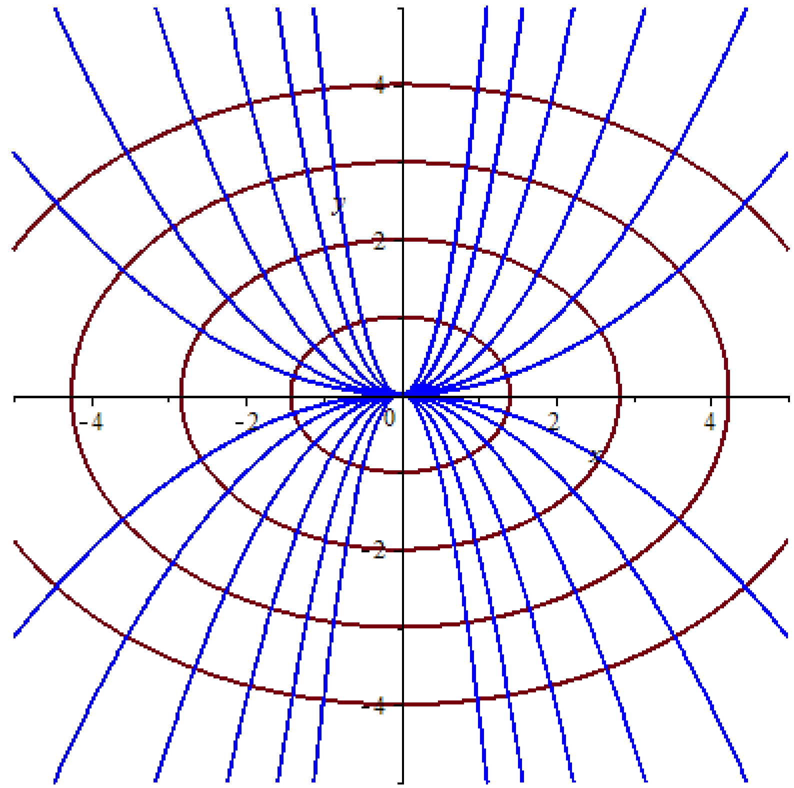
Orthogonales $\quad y' = \dfrac{-x}{2y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2y}$$

$$2y\,dy = -x\,dx$$

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = c$$

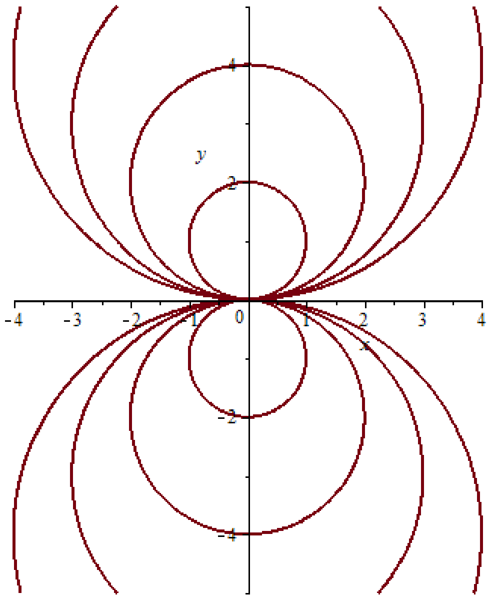


Exemple

Trouvez l'équation des trajectoires orthogonales de la famille de courbes donnée par l'équation suivante.

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2$$

Cette famille est



Doit trouver équation de cette famille

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yC + C^2 = C^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yC = 0$$

$$C = \frac{x^2 + y^2}{2y}$$

$$dC = \frac{\partial\left(\frac{x^2 + y^2}{2y}\right)}{\partial x} dx + \frac{\partial\left(\frac{x^2 + y^2}{2y}\right)}{\partial y} dy$$

$$0 = \frac{2x}{2y} dx + \frac{2y \cdot 2y - 2\left(x^2 + y^2\right)}{(2y)^2} dy$$

$$0 = \frac{x}{y} dx + \frac{y^2 - x^2}{2y^2} dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{y^2 - x^2}$$

Départ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2xy}{y^2 - x^2}$

Orthogonales $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$

$$\left(x^2 - y^2\right)dx + \left(2xy\right)dy = 0$$

Homogène

$$\left(x^2 - u^2x^2\right)dx + \left(2xux\right)\left(udx + xdu\right) = 0$$
$$\left(x^2 - u^2x^2 + 2u^2x^2\right)dx + \left(2x^3u\right)du = 0$$
$$x^2\left(1 + u^2\right)dx + \left(2x^3u\right)du = 0$$
$$\left(1 + u^2\right)dx + \left(2xu\right)du = 0$$

$$-\frac{1}{x}dx = \frac{2u}{1+u^2}du$$
$$-\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{2u}{1+u^2}du$$
$$-\ln\left|x\right| = \ln\left(1+u^2\right) + c_1$$

$$-\ln|x| = \ln\left(1+u^2\right) + c_1$$

$$-\ln|x| = \ln\left(1+u^2\right) + \ln c_2$$

$$\ln\left|\frac{1}{x}\right| = \ln\left(c_2 \cdot \left(1+u^2\right)\right)$$

$$\frac{1}{x} = c_2 \cdot \left(1+u^2\right)$$

$$\frac{1}{x} = c_2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$x = c_2 x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$x = c_2\left(x^2+y^2\right)$$

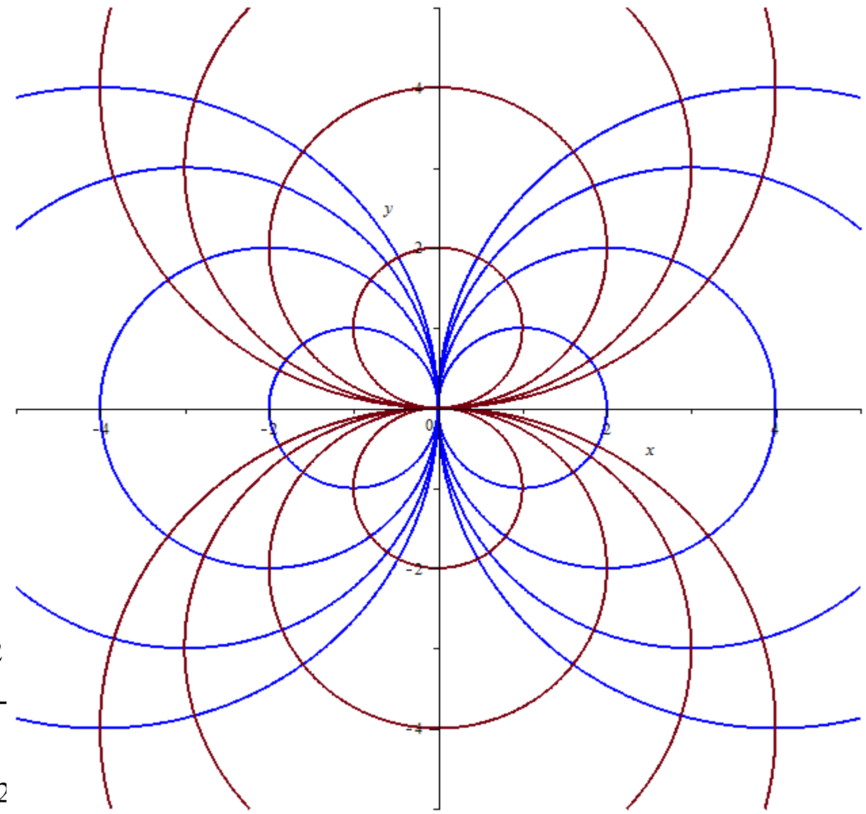
$$c_3 x = x^2 + y^2$$

$$x^2 - c_3 x + y^2 = 0$$

$$x^2 - c_3 x + \frac{c_3^2}{4} + y^2 = \frac{c_3^2}{4}$$

$$\left(x-\frac{c_3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c_3}{2}\right)^2$$

$$\left(x-c\right)^2 + y^2 = c^2$$



Exercice

Trouvez l'équation des trajectoires orthogonale de la famille de courbes

$$y = Cx$$

Réponse : $x^2 + y^2 = c$

Départ

$$y = Cx$$

$$C = \frac{y}{x}$$

$$y' = C$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

Orthogonales

$$y' = \frac{-x}{y}$$

$$ydy = -xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$x^2 + y^2 = c$$

Cercles

Les équations d’ordre 1 et de degré supérieur à 1

genre

$$\left(y'\right)^2 + 5xy' + \ln\left(x\right) = 0$$

Les équations résolubles en y'

$$\left(y'\right)^n + P_1\left(y'\right)^{n-1} + P_2\left(y'\right)^{n-2} + \ldots + P_{n-1}\left(y'\right) + P_n = 0$$

factorise $\left(y' - f_1\right)\left(y' - f_2\right)\left(y' - f_3\right)\ldots\left(y' - f_n\right) = 0$

$$\left(y' - f_1\right) = 0$$
$$\left(y' - f_2\right) = 0$$
$$\left(y' - f_3\right) = 0$$
$$\ldots$$
$$\left(y' - f_n\right) = 0$$

Plusieurs équations de degré 1

Solutions sont

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ F_3 = 0, \ldots, F_n = 0$$

Peut écrire

$$F_1 \times F_2 \times F_3 \times \ldots \times F_n = 0$$

Exemple

$$xy\left(\left(y'\right)^2+1\right)=\left(x^2+y^2\right)y'$$

$$xy\left(y'\right)^2+xy-\left(x^2+y^2\right)y'=0$$

$$\left(y'\right)^2+1-\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)y'=0$$

$$\left(y'\right)^2-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)y'+1=0$$

$$\left(y'-\frac{y}{x}\right)\left(y'-\frac{x}{y}\right)=0$$

$$y'-\frac{y}{x}=0 \qquad\qquad y'-\frac{x}{y}=0$$

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_3$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_4$$

$$\ln|y| = \ln C_4 |x|$$

$$y = C_4 x$$

$$y' - \frac{x}{y} = 0$$

$$ydy = xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 = x^2 + C_2$$

$$y^2 = x^2 + C \quad \text{et} \quad y = Cx$$

$$\left(y^2 - x^2 - C\right)\left(y - Cx\right) = 0$$

Factorisation

peut utiliser $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$(y')^2 - \left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) y' + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^2 - 4}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2y^2} - 4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2y^2} - \frac{4x^2y^2}{x^2y^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \sqrt{\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2y^2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) + \left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2}{xy}\right) \\
&= \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) - \left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2y^2}{xy}\right) \\
&= \frac{y}{x}
\end{aligned}$$

Souvent plus facile

$$\left(y' - f_1\right)\left(y' - f_2\right) = 0$$

$$\left(y'\right)^2 - \left(f_1 + f_2\right) y' + f_1 f_2 = 0$$

2e terme : somme des deux racines !

Exemple

$$xy\left(\left(y'\right)^2+1\right)=\left(x^2+y^2\right)y'$$

$$\left(y'\right)^2+1=\frac{\left(x^2+y^2\right)y'}{xy}$$

$$\left(y'\right)^2+1=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)y'$$

$$\left(y'\right)^2-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)y'+1=0$$

$$\frac{x}{y} \text{ et } \frac{y}{x}$$

Doit s'assurer que 3e terme est produit des 2 racines

$$\left(y'\right)^2 - \left(f_1 + f_2\right) y' + f_1 f_2 = 0$$

$$\left(y'\right)^2 - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) y' + 1 = 0 \qquad \frac{x}{y} \text{ et } \frac{y}{x}$$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$$

Oui : on a les deux racines

Attention au signe négatif au 2[e] terme

$$\left(y'\right)^2 - \left(f_1 + f_2\right) y' + f_1 f_2 = 0$$

$$\left(y'\right)^2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) y' + 1 = 0$$

$$-\frac{x}{y} \quad \text{et} \quad -\frac{y}{x}$$

Constantes d'intégration

Même constante pour les 2 solutions

$$\left(y^2 - x^2 - C\right)\left(y - Cx\right) = 0$$

On pourrait montrer qu'on couvre exactement la même famille de courbe en utilisant la même constante que si on utilise des constantes différentes pour chacune des solutions.

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$(y')^2 - \left(2\sin(x) + \cos(x)\right) y' + \sin(2x) = 0$$

$$2\sin x \quad \text{et} \quad \cos x$$

$$(y' - 2\sin x)(y' - \cos x) = 0$$

$$(y' - 2\sin x)(y' - \cos x) = 0$$

$$y' = 2\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin x$$

$$dy = 2\sin x dx$$

$$y = -2\cos x + C$$

$$y' = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$dy = \cos x dx$$

$$y = \sin x + C$$

$$(y + 2\cos x - C)(y - \sin x - C) = 0$$

Les solutions singulières

Voit apparaître autres solutions

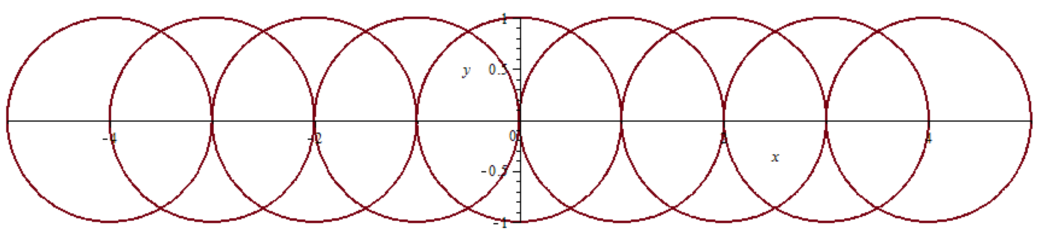
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1-y^2}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$$

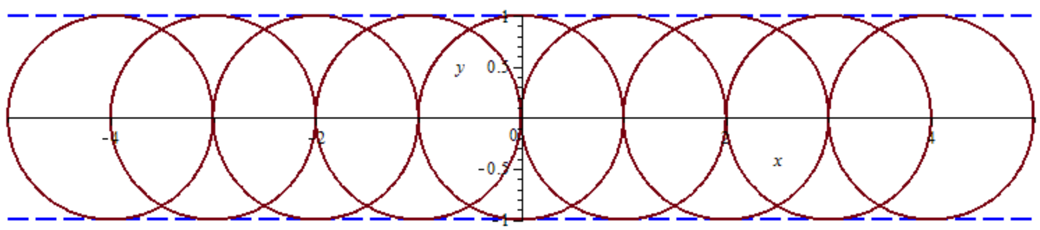
$$\pm\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int dx$$

$$\pm\sqrt{1-y^2} = x + C$$

$$(x+C)^2 + y^2 = 1$$



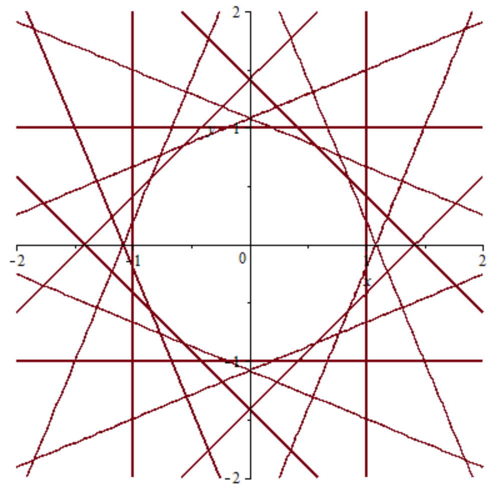
Toutefois $y = 1$ et $y = -1$ sont aussi solutions de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1-y^2}{y^2}$



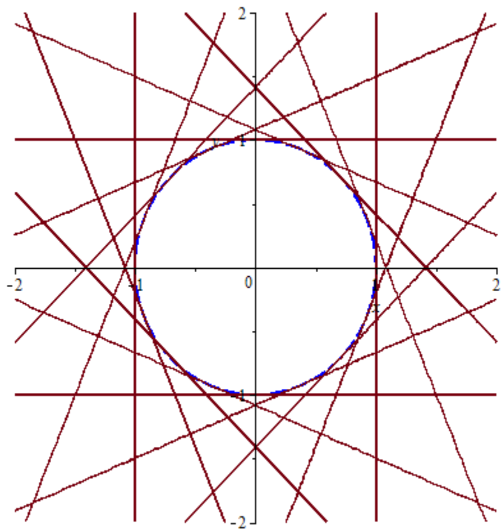
Enveloppe des solutions

Solutions pas dans solution générale : solutions singulières

Ex : Si solution est famille



On a aussi solution singulière



Comment trouver : Vient de division

Restriction sur division donne solution singulière

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$$

On a divisé par $\sqrt{1-y^2}$

$$\pm\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int dx$$

Vérifie ce qui arrive si $y = 1$

$$\pm\sqrt{1-y^2} = x + C$$

Ici, ce sont des solutions

$$(x+C)^2 + y^2 = 1$$

Exercice

$$(y')^2+(x+y)\,y'+xy=0$$

Réponse $\left(y+\dfrac{x^2}{2}+C\right)\left(y-Ce^{-x}\right)=0$

$$p^2+(x+y)p+xy=0$$

$$p=\frac{-(x+y)\pm\sqrt{(x+y)^2-4xy}}{2}$$

$$p=\frac{-(x+y)\pm\sqrt{x^2+2xy+y^2-4xy}}{2}$$

$$p=\frac{-(x+y)\pm\sqrt{x^2-2xy+y^2}}{2}$$

$$p=\frac{-(x+y)\pm\sqrt{(x-y)^2}}{2}$$

$$p=\frac{-(x+y)\pm(x-y)}{2}$$

$$p=-x \quad \text{et} \quad p=-y$$

$$\frac{dy}{dx}=-x$$

$$y=-\frac{x^2}{2}+C$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\frac{dy}{y}=-dx$$

$$\ln|y|=-x+C$$

$$y=Ce^{-x}$$

Les équations résolubles en *y*

$$y = f\left(x, y'\right)$$

$$y' = p$$

$$y = f\left(x, p\right)$$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

O =1 D = 1 : résout pour obtenir p

Remplace ensuite p dans équation de départ

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$x\left(y'\right)^2 - y + 1 = 0$$

Isole y

$$xp^2 - y + 1 = 0$$

$$y = xp^2 + 1$$

$$dy = \frac{\partial\left(xp^2+1\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(xp^2+1\right)}{\partial p}dp$$

$$dy = p^2dx + 2pxdp$$

$$\frac{dy}{dx} = p^2 + 2px\frac{dp}{dx}$$

$$p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx}$$

$$1 = p + 2x\frac{dp}{dx}$$

Résout

$$1-p=2x\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dp}{1-p}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|x|=\ln|1-p|+C_1$$

$$-\frac{1}{2}\ln|x|=\ln|1-p|+\ln C_2$$

$$\ln\frac{1}{\sqrt{|x|}}=\ln\left(C_2(1-p)\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}}=C_2(1-p)$$

$$p=1+\frac{C_3}{\sqrt{|x|}}$$

$$y=xp^2+1$$

$$y=x\left(1+\frac{C}{\sqrt{|x|}}\right)^2+1$$

On a divisé par $1-p$ et par p.
Vérifie si $p=1$ et $p=0$ sont solutions

Donne $y=1$ et $y=x+1$ (déjà inclu)

Simple si $y = xp + f(p)$ Clairault

$$dy = \frac{\partial\left(xp + f(p)\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(xp + f(p)\right)}{\partial p}dp$$

$$dy = pdx + \left(x + \frac{\partial f}{\partial p}\right)dp$$

$$\frac{dy}{dx} = p + \left(x + \frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$p = p + \left(x + \frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\left(x + \frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\left(x + \frac{\partial f}{\partial p}\right) = 0$$

Singulière

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

Générale

$$\left(1+\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{dp}{dx}=0 \qquad \left(1+\frac{\partial f}{\partial p}\right)=0$$

Singulière

$$\frac{dp}{dx}=0$$

Générale $\quad \dfrac{dp}{dx}=0$

$$p=C$$

$$y=xp+f\left(p\right)$$

devient

$$y=Cx+f\left(C\right)$$

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$(y')^5 - xy' + y = 0$$

$$p^5 - xp + y = 0$$

$$y = xp - p^5$$

Clairault : $p = C$

$$y = xC - C^5$$

Les équations résolubles en x

$$x = f\left(y, p\right)$$

Utilise $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{p}$

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$y + \log y' = xy'$$

$$y + \log p = xp$$

$$x = \frac{y + \log p}{p}$$

$$x = \frac{y}{p} + \frac{\log p}{p}$$

$$dx = \frac{\partial\left(\frac{y}{p} + \frac{\log p}{p}\right)}{\partial y} dy + \frac{\partial\left(\frac{y}{p} + \frac{\log p}{p}\right)}{\partial p} dp$$

$$dx = \frac{1}{p} dy + \left(-\frac{y}{p^2} - \frac{\log p}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right) dp$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} + \left(-\frac{y}{p^2} - \frac{\log p}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right) \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \left(-\frac{y}{p^2} - \frac{\log p}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right) \frac{dp}{dy}$$

$$\left(-\frac{y}{p^2} - \frac{\log p}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right) \frac{dp}{dy} = 0$$

$$\left(-\frac{y}{p^2}-\frac{\log p}{p^2}+\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}=0$$

Solution générale $\quad \dfrac{dp}{dy}=0$

$p=C$ Pas étonnant car aussi Clairault

$$y+\log y'=xy'$$

devient

$$y+\log C=Cx$$

Exercice

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

a) En isolant y
b) En isolant x

Réponse $y = Cx - C^2$

a)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$p^2 + y = x \cdot p$$

$$y = xp - p^2$$

Clairault : $p = C$

$$y = Cx - C^2$$

Singulière $\left(x + \frac{\partial f}{\partial p}\right) = 0$

$$x - 2p = 0$$

$$p = \frac{x}{2}$$

$$p^2 + y = x \cdot p$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y = x \cdot \frac{x}{2}$$

$$y = x \cdot \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}$$

$$y = \frac{x^2}{4}$$

b)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$p^2 + y = x\cdot p$$

$$x = \frac{p^2 + y}{p}$$

$$x = p + \frac{y}{p}$$

$$dx = \frac{1}{p}dy + \left(1 - \frac{y}{p^2}\right)dp$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} + \left(1 - \frac{y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \left(1 - \frac{y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\left(1 - \frac{y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy} = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = 0$$

$$p = C$$

$$C^2 + y = x\cdot C$$

$$y = Cx - C^2$$

Solution singulière est $p^2 = y$

qui donne $y + y = x\cdot\sqrt{y}$

$$\frac{2y}{\sqrt{y}} = x$$

$$\frac{4y^2}{y} = x^2$$

$$y = \frac{x^2}{4}$$

Les équations d’ordre 2 et de degré 1

Équations dans lesquelles y et y' sont absents

$$y'' = f\left(x\right)$$

Intègre 2 fois…

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$y'' = 6x$$

$$y' = 3x^2 + C_1$$
$$y = x^3 + C_1 x + C_2$$

Il y a maintenant 2 constantes d'intégration

Équations dans lesquelles x et y' sont absents

$$y'' = f(y)$$

Pose $p = y'$ $$\frac{dp}{dx} = f(y)$$

$$\frac{dp}{dx} dy = f(y) dy$$

$$\frac{dy}{dx} dp = f(y) dy$$

$$p dp = f(y) dy$$

Intègre pour obtenir p

Avec p, on trouve y

Exemple

Quelle est la solution particulière de l'équation suivante si $y = 1$ et $y' = 0$ quand $x = 0$.

$$y'' = \frac{1}{y^3}$$

Pose $p = y'$ $\qquad \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{1}{y^3}$

Multiplie par dy de chaque côté

$$\frac{dp}{dx}dy = \frac{1}{y^3}dy$$

$$\frac{dy}{dx}dp = \frac{1}{y^3}dy$$

$$pdp = \frac{1}{y^3}dy$$

$$\int p\,dp = \int \frac{1}{y^3}\,dy$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{-1}{2y^2} + C_1$$

$p = 0$ quand $y = 1$

$$\frac{0^2}{2} = \frac{-1}{2 \cdot 1^2} + C_1$$

$$C_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{-1}{2y^2} + \frac{1}{2}$$

$$p^2 = \frac{-1}{y^2} + 1$$

$$p = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}} = \pm dx$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}} = \pm dx$$

$$\sqrt{y^2-1} = \pm x + C_2$$

$y = 1$ quand $x = 0$

$$\sqrt{1^2-1} = \pm 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

$$\sqrt{y^2-1} = \pm x$$

$$y^2 - 1 = x^2$$

$$y^2 = x^2 + 1$$

2e intégrale pas toujours facile à cause de la racine

Exercice

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Réponse $y = C_1 \sin\left(x + C_2\right)$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = -y$$

$$\frac{dp}{dx} dy = -y dy$$

$$p dp = -y dy$$

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$$

$$p^2 = -y^2 + C$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{C - y^2}} = \pm dx$$

$$\arcsin\left(\frac{y}{C_1}\right) = \pm x + C_2$$

$$y = C_1 \sin\left(\pm x + C_2\right)$$

$$y = C_1 \sin\left(x + C_2\right)$$

Équations dans lesquelles y est absent

$$y'' = f\left(x, y'\right)$$

$$p = y'$$

$$\frac{dp}{dx} = f\left(x, p\right)$$

O = 1 et D = 1 pour p

Puis trouve y à partir de p

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$xy'' + 2y' = 12x^2$$

$p = y'$

$$x\frac{dp}{dx} + 2p = 12x^2$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{2}{x}p = 12x \qquad e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln(x)}$$

$$= e^{\ln x^2}$$

$$= x^2$$

$$x^2 \frac{dp}{dx} + 2xp = 12x^3$$

$$x^2 dp + 2xp\,dx = 12x^3 dx$$

$$d\left(x^2 p\right) = 12x^3 dx$$

$$x^2 p = 3x^4 + C_1$$

$$p = 3x^2 + \frac{C_1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \frac{C_1}{x^2}$$

$$y = x^3 - \frac{C_1}{x} + C_2$$

Exercice

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \tanh x$$

Réponse $y = C_1 \sinh x + C_2$

$$\frac{dp}{dx} = p \tanh x$$

$$\frac{dp}{p} = \tanh x dx$$

$$\ln|p| = \ln|\cosh x| + C$$

$$p = C_1 \cosh x$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \cosh x$$

$$y = C_1 \sinh x + C_2$$

Équations dans lesquelles x est absent

$$y'' = f\left(y, y'\right)$$

$$p = y'$$

$$\frac{dp}{dx} = f\left(y, p\right)$$

Multiplie par dy

$$\frac{dp}{dx}dy = f\left(y, p\right)dy$$

$$\frac{dy}{dx}dp = f\left(y, p\right)dy$$

$$pdp = f\left(y, p\right)dy$$

O = 1 D = 1 pour p

Puis trouve y à partir de p

Exemple

Quelle est la solution particulière de l'équation suivante si $y = 0$ et $y' = 1$ quand $x = 0$.

$$y'' + e^{y}\left(y'\right)^{3} = 0$$

$p = y'$

$$\frac{dp}{dx} + e^{y}p^{3} = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = -e^{y}p^{3}$$

$$\frac{dp}{dx}dy = -e^{y}p^{3}dy$$

Multiplie par dy

$$\frac{dy}{dx}dp = -e^{y}p^{3}dy$$

$$pdp = -e^{y}p^{3}dy$$

$$-\frac{dp}{p^{2}} = e^{y}dy$$

$$-\frac{dp}{p^2} = e^y dy$$

$$\frac{1}{p} = e^y + C_1$$

$y = 0$ et $y' = 1$ quand $x = 0$

$$\frac{1}{1} = e^0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

$$\frac{1}{p} = e^y$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y$$

$$dx = e^y dy$$

$$x = e^y + C_2$$

$y = 0$ et $y' = 1$ quand $x = 0$

$$0 = e^0 + C_2$$

$$C_2 = -1$$

$$x = e^y + 1$$

$$y = \ln\left(x - 1\right)$$

Exercice

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Réponse $y = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{C_1 x + C_2}}$

$$y\frac{dp}{dx}=3p^2$$

$$y\frac{dp}{dx}dy=3p^2dy$$

$$ypdp=3p^2dy$$

$$ydp=3pdy$$

$$\frac{dp}{p}=3\frac{dy}{y}$$

$$\ln\left|p\right|=3\ln\left|y\right|+\ln C_1$$

$$p=C_1y^3$$

$$\frac{dy}{dx}=C_1y^3$$

$$\frac{dy}{y^3}=C_1dx$$

$$-\frac{1}{2y^2}=C_1x+C_2$$

$$\frac{1}{y^2}=C_1x+C_2$$

$$y=\frac{\pm 1}{\sqrt{C_1x+C_2}}$$

Les équations linéaires à coefficient constant.

Équation linéaire

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x)$$

Si $R(x)$ n'est pas nulle, on a une *équation linéaire non-homogène*.

$$y'' + 3xy' + \sin(x)\,y = e^{x}$$

Si la fonction $R(x)$ est nulle, on a une *équation linéaire homogène*.

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}\,y' + \frac{6}{1-x^2}\,y = 0$$

Équation linéaire

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x)$$

On a une *équation linéaire à coefficients constants* si les fonctions $P(x)$ et $Q(x)$ sont des constantes.

$$y'' + 3y' + 2y = e^x \qquad \text{Non-homogène}$$

$$2y'' - 2y' + 4y = 0 \qquad \text{Homogène}$$

On va commencer avec les équations linéaires à coefficients constants homogène.

Les équations linéaires à coefficients constants homogènes.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Pourrait résoudre avec x absent, mais long

On va faire le changement de variable $y = ue^{\lambda x}$

On va choisir λ plus tard

$$y' = u'e^{\lambda x} + u\lambda e^{\lambda x}$$
$$y'' = u''e^{\lambda x} + 2u'\lambda e^{\lambda x} + u\lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$
$$au''e^{\lambda x} + 2au'\lambda e^{\lambda x} + au\lambda^2 e^{\lambda x} + b\left(u'e^{\lambda x} + u\lambda e^{\lambda x}\right) + cue^{\lambda x} = 0$$
$$e^{\lambda x}\left(au'' + (2a\lambda + b)u' + \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)u\right) = 0$$

$$e^{\lambda x}\left(au''+\left(2a\lambda+b\right)u'+\left(a\lambda^2+b\lambda+c\right)u\right)=0$$

Choisit λ pour que $a\lambda^2+b\lambda+c=0$

$$\lambda_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Utilise la première valeur

$$e^{\lambda x}\left(au''+\left(2a\lambda_1+b\right)u'\right)=0$$

$$au''+\left(2a\lambda_1+b\right)u'=0$$

Mais

$$\begin{aligned}2a\lambda_1+b&=2a\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+b\\&=-b+\sqrt{b^2-4ac}+b\\&=\sqrt{b^2-4ac}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\left(\lambda_1-\lambda_2\right)&=a\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-a\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\sqrt{b^2-4ac}\end{aligned}$$

$$au''+a\left(\lambda_1-\lambda_2\right)u'=0$$

$$u''+\left(\lambda_1-\lambda_2\right)u'=0$$

$$u'' + (\lambda_1 - \lambda_2) u' = 0$$

Intègre

$$u' + (\lambda_1 - \lambda_2) u = A$$

Linéaire $\quad e^{\int (\lambda_1 - \lambda_2) dx} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$

$$e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} u' + (\lambda_1 - \lambda_2) e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} u = A e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}$$

$$e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} du + (\lambda_1 - \lambda_2) e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} u dx = A e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} dx$$

$$d\left(e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} u\right) = A e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} dx$$

$$\int d\left(e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} u\right) = \int A e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} dx$$

$$e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} u = \frac{A}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} + B$$

$$u = \frac{A}{\lambda_1 - \lambda_2} + B e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}$$

$$u = C_1 + C_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}$$

Solution est donc

$$y = ue^{\lambda_1 x}$$

$$y = \left(C_1 + C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}\right) e^{\lambda_1 x}$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} e^{\lambda_1 x}$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Il suffit donc de trouver λ_1 et λ_2, qui sont les solutions de

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Équation caractéristique

Il y a alors 3 possibilités

1) L'équation caractéristique a deux solutions réelles.

Solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 2

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Alors la solution est

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

si les valeurs de λ données par $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ sont réelles.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - -4 \cdot 2}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$= 1 \text{ et } -2$$

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$$

2) L’équation caractéristique a deux solutions complexes

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i$$
$$\lambda_2 = \alpha - \beta i$$

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$$

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} \\ &= e^{\alpha x}\left(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}\right) \\ &= e^{\alpha x}\left(C_1\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) + C_2\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)\right) \\ &= e^{\alpha x}\left(\left(C_1 + C_2\right)\cos\beta x + \left(C_1 i - C_2 i\right)\sin\beta x\right) \end{aligned}$$

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

Solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 2

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Alors la solution est

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

si les valeurs de λ données par $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ sont les nombres complexes $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ et $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} \\ &= -2 + 3i \text{ et } -2 - 3i \end{aligned}$$

$$y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$$

Solution pourrait aussi être

$$y = Ae^{\alpha x}\cos\left(\beta x + \phi\right)$$

$$\begin{aligned} y &= Ae^{\alpha x}\cos\left(\beta x + \phi\right) \\ &= Ae^{\alpha x}\left(\cos\beta x\cos\phi - \sin\beta x\sin\phi\right) \\ &= e^{\alpha x}\left(\left(A\cos\phi\right)\cos\beta x + \left(-A\sin\phi\right)\sin\beta x\right) \end{aligned}$$

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

Solution pourrait aussi être

$$y = Ae^{\alpha x}\sin(\beta x + \phi)$$

$$\begin{aligned}
y &= Ae^{\alpha x}\sin(\beta x + \phi) \\
&= Ae^{\alpha x}(\cos\beta x \sin\phi + \sin\beta x \cos\phi) \\
&= e^{\alpha x}((A\sin\phi)\cos\beta x + (A\cos\phi)\sin\beta x)
\end{aligned}$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

3) L'équation caractéristique n'a qu'une seule solution.

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ alors $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$

Donc $u'' + (\lambda_1 - \lambda_2)u' = 0$ devient $u'' = 0$

Intègre 2 fois $u' = C_1$

$$u = C_1 x + C_2$$

Solution est alors $y = ue^{\lambda x}$

$$y = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}$$

Solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 2

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Alors la solution est

$$y = \left(C_1 x + C_2\right) e^{\lambda x}$$

S'il n'y a qu'une seule solution à l'équation $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1}}{2}$$
$$= \frac{2 \pm 0}{2}$$
$$= 1$$

$$y = C_1 x e^x + C_2 e^x$$

N’importe quel des 3 cas

Exemple

Quelle est la solution particulière de l’équation suivante si $y(0) = 3$ et $y'(0) = 2$.

$$8y'' + 6y' + y = 0$$

$$8\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2 \cdot 8} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{16} \\ &= -\tfrac{1}{4} \text{ et } -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-x/4}$$

$$y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-x/4}$$

$y(0) = 3$

$$3 = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

$$3 = C_1 + C_2$$

$y'(0) = 2$

$$y' = C_1 \left(\tfrac{-1}{2}\right) e^{-x/2} + C_2 \left(\tfrac{-1}{4}\right) e^{-x/4}$$

$$2 = C_1 \left(\tfrac{-1}{2}\right) e^0 + C_2 \left(\tfrac{-1}{4}\right) e^0$$

$$2 = C_1 \left(\tfrac{-1}{2}\right) + C_2 \left(\tfrac{-1}{4}\right)$$

$$8 = -2C_1 - C_2$$

$$3 + 8 = \left(C_1 + C_2\right) + \left(-2C_1 - C_2\right)$$

$$11 = -C_1$$

$$3 = C_1 + C_2$$

$$8 = -2C_1 - C_2$$

De là $C_2 = 14$

$$y = -11 e^{-x/2} - 14 e^{-x/4}$$

Exercice

Quelle est la solution générale de l'équation suivante.

$$y'' - 5y' + 7y = 0$$

Réponse $\qquad y = e^{5x/2}\left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 7 = 0$$

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 7}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \tfrac{5}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i \text{ et } \tfrac{5}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i\end{aligned}$$

$$y = e^{5x/2}\left(C_1 \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} x\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right)$$

Les équations linéaires à coefficients constants non homogènes.

Solution d'une équation linéaire non homogène d'ordre 2

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

Alors la solution est

$$y = y_h + y_{nh}$$

où y_h est la solution de l'équation homogène et y_{nh} est une solution particulière qui dépend de la forme de $f(x)$.

Principe de superposition

Vrai uniquement pour linéaires

Forme que doit prendre y_{nh} selon la forme de $f(x)$.

$f(x)$	y_{nh}
$P(x)$	$Q(x)$
$P(x)e^{\gamma x}$	$Q(x)e^{\gamma x}$
$P(x)\cos\omega x$	$Q(x)\cos\omega x + R(x)\sin\omega x$
$P(x)\sin\omega x$	$Q(x)\cos\omega x + R(x)\sin\omega x$
$P(x)e^{\gamma x}\cos\omega x$	$e^{\gamma x}\left(Q(x)\cos\omega x + R(x)\sin\omega x\right)$
$P(x)e^{\gamma x}\sin\omega x$	$e^{\gamma x}\left(Q(x)\cos\omega x + R(x)\sin\omega x\right)$

P, *Q* et *R* sont polynômes de mêmes degrés

$$f\left(x\right)=e^{2x}(3x^2+4x+1)$$

$$y_{nh}=e^{2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$$

Trouve les valeurs des constantes en remplaçant dans l'équation

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y'' + 4y = 8x^2 + 2$$

Commence avec homogène $y'' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = 2i \text{ et } -2i$$

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$f(x)$ est un polynôme de degré 2, alors y_{nh} est aussi un polynôme de degré 2

$$y_{nh} = Ax^2 + Bx + C$$

$$y'_{nh} = 2Ax + B$$
$$y''_{nh} = 2A$$

$$y'' + 4y = 8x^2 + 2$$
$$2A + 4\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 8x^2 + 2$$
$$4Ax^2 + 4Bx + \left(2A + 4C\right) = 8x^2 + 2$$

$$4A = 8$$
$$4B = 0$$
$$2A + 4C = 2$$

$A = 2$, $B = 0$ et $C = -½$

$$y_{nh} = 2x^2 - \tfrac{1}{2}$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x^2 - \tfrac{1}{2}$$

Si $f(x)$ est la somme de deux formes dans le tableau, alors y_{nh} est simplement la somme des y_{nh} indiqués au tableau. C'est la *règle de sommation*.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y'' + y' - 2y = e^{-x} + \cos 2x$$

Commence avec homogène $\quad y'' + y' - 2y = 0$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = 1 \text{ et } -2$$

$$y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$$

$$y'' + y' - 2y = e^{-x} + \cos 2x$$

$$y_{nh} = Ae^{-x} + B\cos 2x + C\sin 2x$$

$$y'_{nh} = -Ae^{-x} - 2B\sin 2x + 2C\cos 2x$$

$$y''_{nh} = Ae^{-x} - 4B\cos 2x - 4C\sin 2x$$

$$y'' + y' - 2y = e^{-x} + \cos 2x$$

$$\left(Ae^{-x} - 4B\cos 2x - 4C\sin 2x\right) + \left(-Ae^{-x} - 2B\sin 2x + 2C\cos 2x\right)$$

$$-2\left(Ae^{-x} + B\cos 2x + C\sin 2x\right) = e^{-x} + \cos 2x$$

$$\left(A - A - 2A\right)e^{-x} + \left(-4B + 2C - 2B\right)\cos 2x + \left(-4C - 2B - 2C\right)\sin 2x = e^{-x} + \cos 2x$$

$$-2Ae^{-x} + \left(2C - 6B\right)\cos 2x + \left(-6C - 2B\right)\sin 2x = e^{-x} + \cos 2x$$

$$-2A = 1 \qquad A = -\tfrac{1}{2}$$

$$2C - 6B = 1 \qquad B = -\tfrac{3}{20} \qquad y_{nh} = -\tfrac{1}{2}e^{-x} - \tfrac{3}{20}\cos 2x + \tfrac{1}{20}\sin 2x$$

$$-6C - 2B = 0 \qquad C = \tfrac{1}{20}$$

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \tfrac{1}{2}e^{-x} - \tfrac{3}{20}\cos x + \tfrac{1}{20}\sin x$$

Maintenant, il se pourrait que $f(x)$ soit déjà dans la solution de l'équation homogène. Dans ce cas, il faut appliquer la *règle de modification* qui dit qu'on doit multiplier y_{nh} par x. Si on obtient encore un y_{nh} qui fait partie de la solution homogène, on multiplie encore par x et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne une fonction qui n'est pas dans y_h.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

Commence avec homogène $\quad y'' - 3y' + 2y = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = 1 \text{ et } 2$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

$$y_{nh} = Ae^x$$

$$y_{nh} = Axe^x$$

$$y'_{nh} = Axe^x + Ae^x$$

$$y''_{nh} = Axe^x + 2Ae^x$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

$$\left(Axe^x + 2Ae^x\right) - 3\left(Axe^x + K_1e^x\right) + 2Axe^x = e^x$$

$$\left(A - 3A + 2A\right)xe^x + \left(2A - 3A\right)e^x = e^x$$

$$\left(2A - 3A\right)e^x = e^x$$

$$A = -1$$

$$y_{nh} = -xe^x$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x$$

Exemple

Quelle est la solution générale de l’équation suivante ?

$$y'' - 2y' + y = e^{x} + xe^{x}$$

Commence avec homogène $y'' - 2y' + y = 0$

$$\lambda^{2} - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$y_h = C_1 xe^{x} + C_2 e^{x}$$

$$y'' - 2y' + y = e^x + xe^x$$

$$y_{nh} = (Ax + B)e^x$$

$$y_{nh} = x(Ax + B)e^x$$

$$y_{nh} = x^2(Ax + B)e^x$$

$$= (Ax^3 + Bx^2)e^x$$

$$y'_{nh} = (Ax^3 + Bx^2)e^x + (3Ax^2 + 2Bx)e^x$$

$$= (Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx)e^x$$

$$y''_{nh} = (Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx)e^x + (3Ax^2 + 2(3A + B)x + 2B)e^x$$

$$= (Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B)e^x$$

$$y'' - 2y' + y = e^x + xe^x$$

$$(Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B)e^x$$

$$-2(Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x = e^x + xe^x$$

$$(A - 2A + A)x^3e^x + (6A + B - 6A - 2B + B)x^2e^x$$

$$+(6A + 4B - 4B)xe^x + (2B)e^x = e^x + xe^x$$

$$(6A)xe^x + (2B)e^x = e^x + xe^x$$

$$(6A)\,xe^{x}+(2B)\,e^{x}=e^{x}+xe^{x}$$

$$6A=1$$

$$2B=1$$

$$A=\tfrac{1}{6}$$

$$B=\tfrac{1}{2}$$

$$y_{nh}=x^{2}\left(\tfrac{1}{6}x+\tfrac{1}{2}\right)e^{x}$$

$$y=C_{1}xe^{x}+C_{2}e^{x}+x^{2}\left(\tfrac{1}{6}x+\tfrac{1}{2}\right)e^{x}$$

Exercice

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y'' + 3y' + 5y = x^3$$

Réponse : $y = e^{-\frac{3}{2}x}\left(C_1 \sin\frac{\sqrt{11}}{2}x + C_2 \cos\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + \frac{1}{5}x^3 - \frac{9}{25}x^2 + \frac{24}{125}x + \frac{18}{625}$

Homogène $\lambda^2+3\lambda+5=0$

$$\lambda=\frac{-3\pm\sqrt{9-20}}{2}=-\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$y_h=e^{-\frac{3}{2}x}\left(C_1\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x+C_2\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$$

$$y_{nh}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$
$$y'_{nh}=3Ax^2+2Bx+C$$
$$y''_{nh}=6Ax+2B$$

$$y''+3y'+5y=x^3$$

$$(6Ax+2B)+3\left(3Ax^2+2Bx+C\right)+5\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)=x^3$$

$$5A=1$$
$$9A+5B=0$$
$$6A+6B+5C=0$$
$$2B+3C+5D=0$$

$$5A = 1$$
$$9A + 5B = 0$$
$$6A + 6B + 5C = 0$$
$$2B + 3C + 5D = 0$$

$A = 1/5$

$$9\frac{1}{5} + 5B = 0$$

$$B = -\frac{9}{25}$$

$$6\frac{1}{5} + 6\frac{-9}{25} + 5C = 0$$
$$\frac{6}{5} - \frac{54}{25} + 5C = 0$$
$$5C = -\frac{30-54}{25} = \frac{24}{25}$$
$$C = \frac{24}{125}$$

$$2\frac{-9}{25} + 3\frac{24}{125} + 5D = 0$$
$$5D = \frac{18}{25} - \frac{72}{125}$$
$$5D = \frac{90-72}{125}$$
$$D = \frac{18}{625}$$

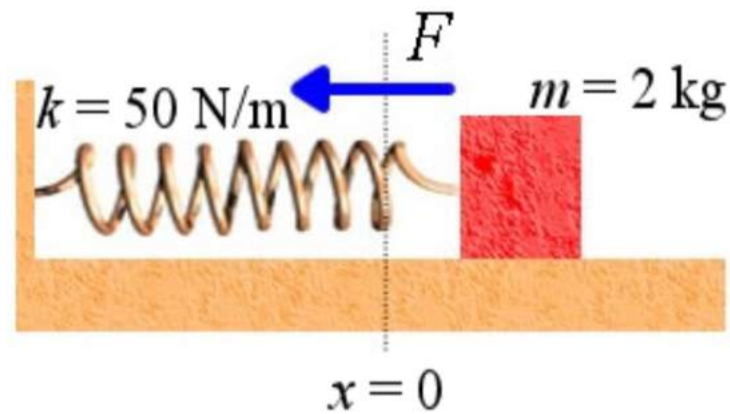
Applications pour des équations d’ordre 2

Arrive souvent en mécanique, car a dans $F = ma$ est deuxième dérivée de x

Un système masse ressort

Sans friction

$v = 0$ et $x = 10$ cm à $t = 0$



$$\sum F = ma$$

$$-50\tfrac{N}{m}\,x = 2kg \cdot a$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$2kg \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 50\tfrac{N}{m}\,x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 25\tfrac{1}{s^2}\,x = 0$$

$$\lambda^2 + 25\tfrac{1}{s^2} = 0 \qquad \lambda = \pm i5\tfrac{1}{s}$$

$$x = C_1 \sin\left(5\tfrac{1}{s}t\right) + C_2 \cos\left(5\tfrac{1}{s}t\right)$$

$$x = C_1 \sin\left(5\tfrac{1}{s}t\right) + C_2 \cos\left(5\tfrac{1}{s}t\right)$$

$x = 10$ cm à $t = 0$

$$0{,}1m = C_1 \sin\left(5\tfrac{1}{s}\cdot 0s\right) + C_2 \cos\left(5\tfrac{1}{s}\cdot 0s\right)$$

$$0{,}1m = C_2$$

$v = 0$ à $t = 0$

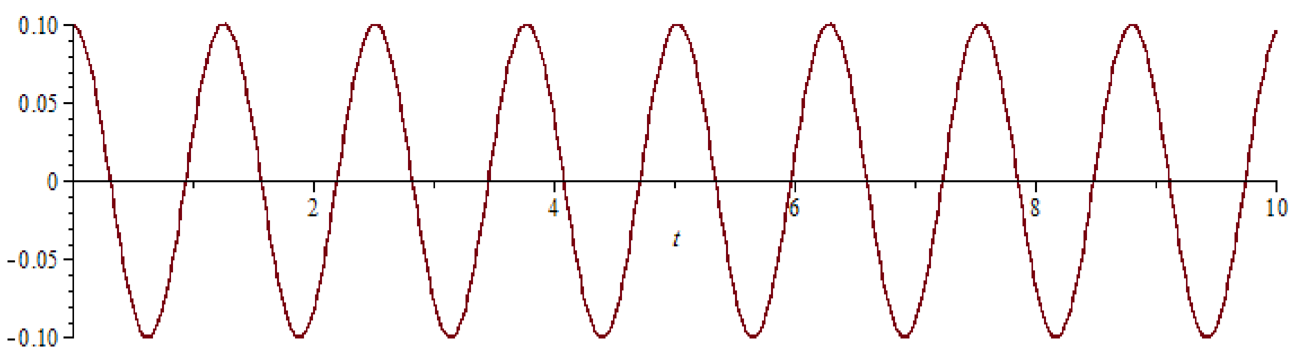
$$v = \frac{d\left(C_1 \sin\left(5\tfrac{1}{s}t\right) + 0{,}1m\cos\left(5\tfrac{1}{s}t\right)\right)}{dt}$$

$$v = C_1 \cdot 5\tfrac{1}{s} \cdot \cos\left(5\tfrac{1}{s}t\right) - 0{,}1m \cdot 5\tfrac{1}{s} \cdot \sin\left(5\tfrac{1}{s}t\right)$$

$$0 = C_1 \cdot 5\tfrac{1}{s} \cdot \cos\left(5\tfrac{1}{s}\cdot 0s\right) - 0{,}1m \cdot 5\tfrac{1}{s} \cdot \sin\left(5\tfrac{1}{s}\cdot 0s\right)$$

$$C_1 = 0$$

$$x = 0{,}1m \cdot \cos\left(5\tfrac{1}{s}t\right)$$



Ondes : $x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$

Avec friction

$F = -bv$ Disons que $b = 0{,}2$ kg/s

$$\sum F = ma$$

$$-50\,\tfrac{N}{m}\,x - 2\,\tfrac{kg}{s}\,v = 2kg \cdot a$$

$$2kg \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\tfrac{kg}{s}\,\frac{dx}{dt} + 50\,\tfrac{N}{m}\,x = 0$$

$$2kg \cdot \lambda^2 + 2\,\tfrac{kg}{s}\,\lambda + 50\,\tfrac{N}{m} = 0$$

$$\lambda = \frac{-2\,\tfrac{kg}{s} \pm \sqrt{4\,\tfrac{kg^2}{s^2} - 4 \cdot 2kg \cdot 50\,\tfrac{N}{m}}}{4kg}$$

$$= \frac{-2\,\tfrac{1}{s} \pm \sqrt{-396\,\tfrac{1}{s^2}}}{4}$$

$$= -0{,}5\,\tfrac{1}{s} \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,i\,\tfrac{1}{s}$$

$$x = e^{-0{,}5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1 \sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}\,t\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}\,t\right)\right)$$

$x = 10$ cm à $t = 0$

$$0{,}1m = e^{-0{,}5\frac{1}{s}\cdot 0s}\left(C_1 \sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}\cdot 0s\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}\cdot 0s\right)\right)$$

$$0{,}1m = 1\left(C_2\right)$$

$$0{,}1m = C_2$$

$v = 0$ à $t = 0$

$$v = \frac{d\left(e^{-0{,}5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1 \sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}t\right) + 0{,}1m\cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}t\right)\right)\right)}{dt}$$

$$v = e^{-0{,}5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}\cdot\cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}t\right) - 0{,}1m\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}\cdot\sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}t\right)\right)$$

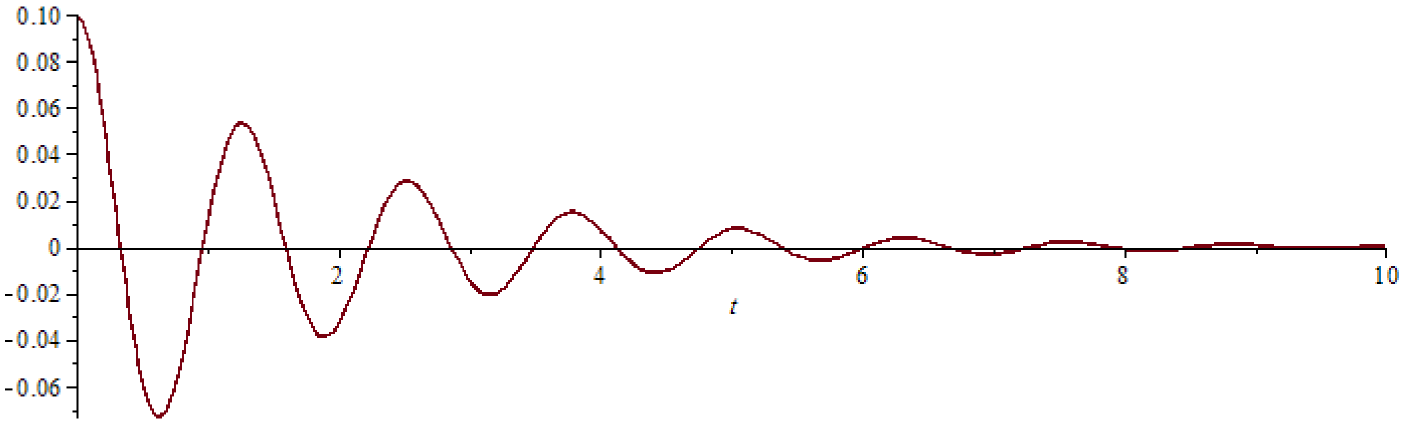
$$-0{,}5\tfrac{1}{s}e^{-0{,}5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1 \sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}t\right) + 0{,}1m\cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}t\right)\right)$$

$$0 = e^{-0}\left(C_1\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}\cdot\cos 0 - 0{,}1m\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}\cdot\sin 0\right) - 0{,}5\tfrac{1}{s}e^{-0}\left(A\sin 0 + 0{,}1m\cos 0\right)$$

$$0 = \left(C_1\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}\right) - 0{,}5\tfrac{1}{s}\left(0{,}1m\right)$$

$$C_1 = \frac{0{,}1}{3\sqrt{11}}m$$

$$x = e^{-0{,}5\frac{1}{s}\cdot t}\left(\frac{0{,}1}{3\sqrt{11}}m\sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}t\right)+0{,}1m\cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\,\tfrac{1}{s}t\right)\right)$$



Avec friction et une force externe qui agit sur la masse

$$F = 10N\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

$$\sum F = ma$$

$$-50\tfrac{N}{m}x - 2\tfrac{kg}{s}v + 10N\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right) = 2kg \cdot a$$

$$2kg \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 2\tfrac{kg}{s}\frac{dx}{dt} + 50\tfrac{N}{m}x = 10N\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

Homogène $$2kg \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 2\tfrac{kg}{s}\frac{dx}{dt} + 50\tfrac{N}{m}x = 0$$

$$x_h = e^{-0,5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1\sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right) + C_2\cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right)\right)$$

Peu important après 10 secondes

$$2kg\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+2\tfrac{kg}{s}\frac{dx}{dt}+50\tfrac{N}{m}x=10N\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

$$x_{nh}=A\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)+B\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

$$\frac{dx_{nh}}{dt}=A\cdot 4\tfrac{1}{s}\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)-B\cdot 4\tfrac{1}{s}\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

$$\frac{d^2x_{nh}}{dt^2}=-A\cdot 16\tfrac{1}{s^2}\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)-B\cdot 16\tfrac{1}{s^2}\cdot\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

$$\begin{aligned}2kg\cdot&\left(-A\cdot 16\tfrac{1}{s^2}\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)-B\cdot 16\tfrac{1}{s^2}\cdot\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)\right)\\&+2\tfrac{kg}{s}\left(A\cdot 4\tfrac{1}{s}\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)-B\cdot 4\tfrac{1}{s}\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)\right)\\&+50\tfrac{N}{m}\left(A\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)+B\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)\right)=10N\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)\end{aligned}$$

Cosinus $-2kg\cdot B\cdot 16\tfrac{1}{s^2}+2\tfrac{kg}{s}A\cdot 4\tfrac{1}{s}+50\tfrac{N}{m}\cdot B=10N$

Sinus $-2kg\cdot A\cdot 16\tfrac{1}{s^2}-2\tfrac{kg}{s}\cdot B\cdot 4\tfrac{1}{s}+50\tfrac{N}{m}A=0$

$$18\tfrac{kg}{s^2}\cdot B+8\tfrac{kg}{s^2}A=10N$$

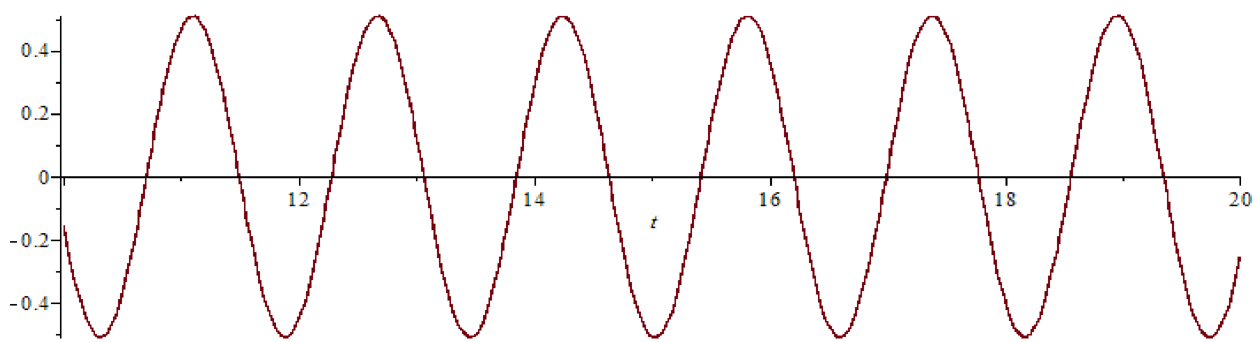
$$18\tfrac{kg}{s^2}\cdot A-8\tfrac{kg}{s^2}\cdot B=0$$

$$A=\tfrac{20}{97}m \qquad B=\tfrac{45}{97}m$$

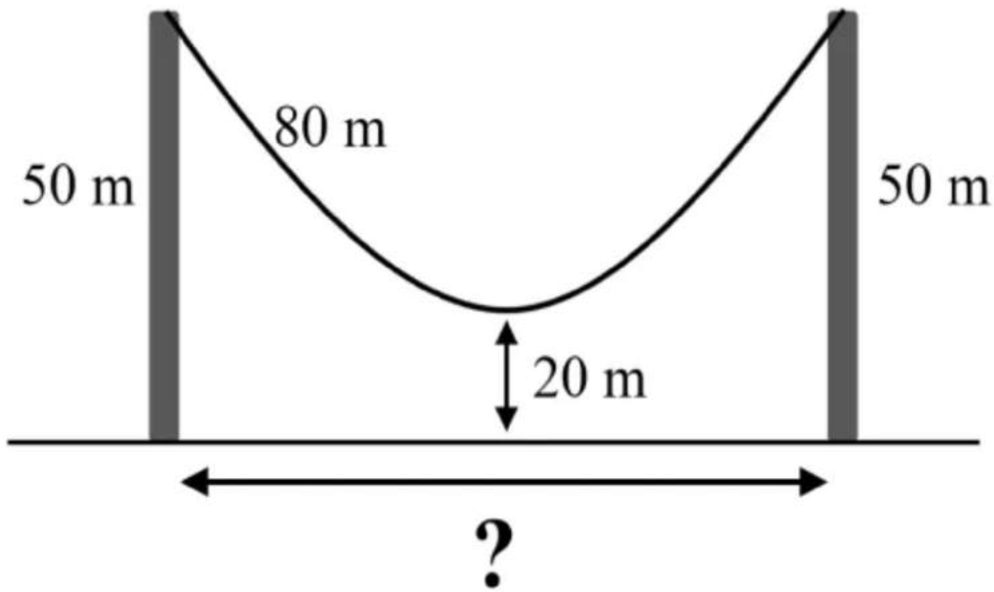
$$x=e^{-0{,}5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1\sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right)+C_2\cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right)\right)+\frac{20}{97}m\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)+\frac{45}{97}m\cdot\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

Après quelques secondes, il reste

$$x=\frac{20}{97}m\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)+\frac{45}{97}m\cdot\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

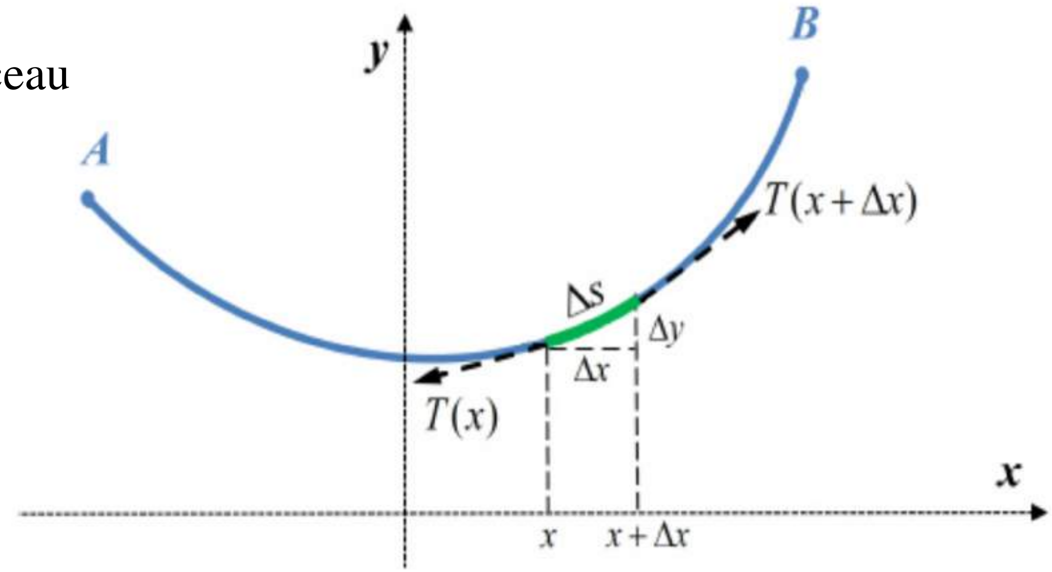


Un câble suspendu



Il faut équation de la forme

Petit morceau



$$\sum F_x = T_x(x+\Delta x) - T_x(x) = 0$$

$$\sum F_x = T_y(x+\Delta x) - T_y(x) - mg = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(T_x(x+\Delta x) - T_x(x)\right) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{T_x(x+\Delta x) - T_x(x)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{dT_x}{dx} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(T_y(x+\Delta x) - T_y(x) - mg\right) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{T_y(x+\Delta x) - T_y(x)}{\Delta x}\Delta x - mg = 0$$

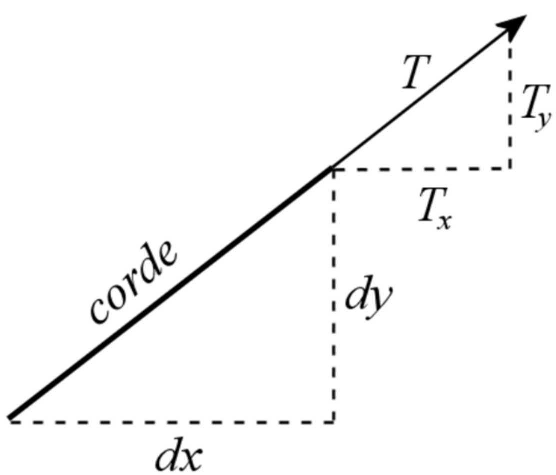
$$\frac{dT_y}{dx}dx - gdm = 0$$

T_x est constante

Il faut la masse d'un petit morceau

$$dm = \lambda ds$$
$$= \lambda\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$
$$= \lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$\frac{dT_y}{dx}dx - g\lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 0$$
$$\frac{dT_y}{dx} - g\lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_y}{T_x}$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}T_x\right)}{dx} - g\lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{g\lambda}{T_x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{g\lambda}{T_x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$$ y absent

$$\frac{dp}{dx} - \frac{g\lambda}{T_x}\sqrt{1+p^2} = 0$$

$$\frac{dp}{dx} - \frac{g\lambda}{T_x}\sqrt{1+p^2} = 0$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{g\lambda}{T_x}dx$$

$$\operatorname{arsinh}(p) = \frac{g\lambda}{T_x}x + C_1$$

pente = 0 au point le plus bas ($x = 0$)

$$\operatorname{arsinh}(0) = \frac{g\lambda}{T_x}0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

$$\operatorname{arsinh}(p) = \frac{g\lambda}{T_x} x$$

$$p = \sinh\left(\frac{g\lambda}{T_x} x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{g\lambda}{T_x} x\right)$$

$$dy = \sinh\left(\frac{g\lambda}{T_x} x\right) dx$$

$$y = \frac{T_x}{g\lambda} \cosh\left(\frac{g\lambda}{T_x} x\right) + C_2$$

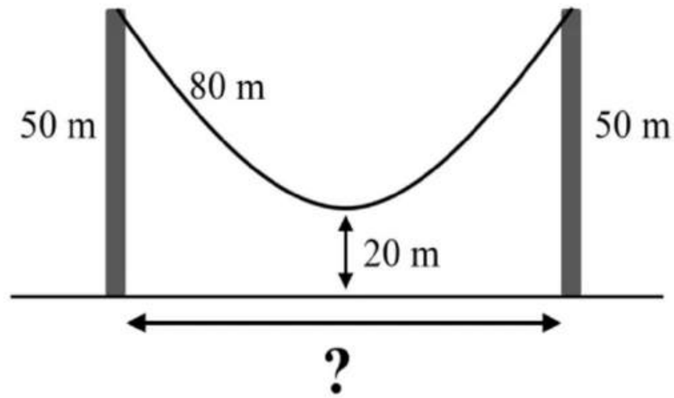
Plus bas, hauteur = y_0

$$y_0 = \frac{T_x}{g\lambda} \cosh(0) + C_2$$

$$C_2 = \left(y_0 - \frac{T_x}{g\lambda}\right)$$

$$y = \frac{T_x}{g\lambda}\cosh\left(\frac{g\lambda}{T_x}x\right) + y_0 - \frac{T_x}{g\lambda}$$

Revenons à notre problème

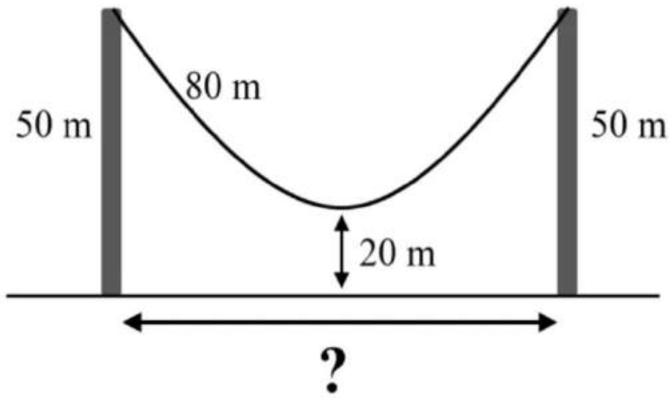


Ici, $y_0 = 20$ m

$$y = \frac{T_x}{g\lambda}\cosh\left(\frac{g\lambda}{T_x}x\right) + 20m - \frac{T_x}{g\lambda}$$

$$a = \frac{T_x}{g\lambda}$$

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + 20m - a$$



On sait qu'à $x = L$, $y = 50$ m

$$50m = a\cosh\left(\tfrac{L}{a}\right) + 20m - a$$
$$30m = a\cosh\left(\tfrac{L}{a}\right) - a$$
$$30m = a\left(\cosh\left(\tfrac{L}{a}\right) - 1\right)$$

Pas assez d'info pour trouver *L*…

Longueur = 80 m

$$80m = \int_{-L}^{L}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$80m = \int_{-L}^{L}\sqrt{1+\left(a\cdot\frac{1}{a}\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2}\,dx$$
$$80m = \int_{-L}^{L}\sqrt{1+\sinh^2\left(\tfrac{x}{a}\right)}\,dx$$
$$80m = \int_{-L}^{L}\cosh\left(\tfrac{x}{a}\right)dx$$
$$80m = \left[a\sinh\left(\tfrac{x}{a}\right)\right]_{-L}^{L}$$
$$80m = 2a\sinh\left(\tfrac{L}{a}\right)$$

$$30m = a\left(\cosh\left(\tfrac{L}{a}\right) - 1\right)$$

$$40m = a\sinh\left(\tfrac{L}{a}\right)$$

Facile à résoudre ?

$$\tfrac{30m}{a} + 1 = \cosh\left(\tfrac{L}{a}\right)$$

$$\tfrac{40m}{a} = \sinh\left(\tfrac{L}{a}\right)$$

$\cosh^2 x$ - $\sinh^2 x = 1$

$$\left(\frac{30m}{a} + 1\right)^2 - \left(\frac{40m}{a}\right)^2 = 1$$

$$(30m + a)^2 - (40m)^2 = a^2$$

$$900m^2 + 60m \cdot a + a^2 - 1600m^2 = a^2$$

$$900m^2 + 60m \cdot a - 1600m^2 = 0$$

$$a = \tfrac{35}{3}m$$

$$40m = a\sinh\left(\tfrac{L}{a}\right)$$

$$40m = \tfrac{35}{3}m\sinh\left(\tfrac{3L}{35m}\right)$$

$$L = 22{,}702m$$

Distance = 45,4 m